Оглавление

Предисловие

Эта книга — подробный конспект лекций курса по моделированию аукционов. Курс был прочитан дистанционно в НИУ-ВШЭ в 2011 году. Самое важное отличие книги от других книг по моделированию аукционов — огромное количество задач с решениями!

Из книги любопытный читатель узнает, например:

- что аукцион — это не обязательно «дядя с молоточком»;
- как устроены самые крупные аукционы;
- почему не всегда победитель аукциона платит ту сумму, которую поставил;
- как влияют на прибыль организатора разные правила проведения аукциона;
- при каких условиях может нарушиться закон спроса.

В книге четыре главы. Первая — про разные виды аукционов и теорему об эквивалентности доходностей, которая утверждает, что при независимости игроков все аукционы приносят одинаковый доход организатору аукциона. Вторая глава — техническая. Её цель — заполнить пробелы по теории вероятностей, рассказать технику решения задач с помощью о-малых и объяснить концепцию аффилированных сигналов. Третья глава посвящена сравнению доходностей организатора аукциона в случае, когда игроки зависимы из-за того, что получают общую информацию о товаре. Четвертая глава излагает аукционы с помощью общего языка теории механизмов. В главе вводится механизм Викри—Кларка—Гровса и доказывается оптимальность аукциона второй цены с резервной ценой.

Моделирование аукционов — довольно сложная и сильно математизированная дисциплина. Именно из-за теоретической сложности она редко встречается в программе бакалавриата. Моей целью было сделать этот курс максимально доступным для бакалавров. Поэтому я старался, во-первых, снизить входные требования к уровню подготовки, во-вторых, включить в курс максимальное количество задач с решениями.

Для чтения книги требуется немного теории игр и теории вероятностей. Из теории игр — понимание равновесия Нэша. Из теории вероятностей — умение считать условные вероятности и математические ожидания дискретных и непрерывных случайных величин.

Выражаю большую благодарность рецензентам Вадиму Львовичу Шагину и Николаю Петровичу Пильнику за ценные замечания.

Для удобства поиска внутри книги нумерация формул идёт постраничная. Например, формула (27.3) — это третья формула на 27-й странице. Конец доказательства обозначается значком □.

Читателю могут также оказаться полезными видеолекции курса, vimeo.com/album/1530587, и блог, бывший активным в 2011 году, auctiontheory.wordpress.com/.

Удачи в освоении теории аукционов!

Борис Демешев
bdemeshev@hse.ru
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Глава 1

Аукционы бывают разные

1.1. Три аукциона и три модели

- **Английский аукцион**. Именно этот аукцион описан в «12 стульях» Ильфа и Петрова. Игроки по очереди называют ставки. Каждая последующая ставка должна быть больше, чем предыдущая. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую цену. Победитель платит за товар столько, сколько он сам поставил[1]. По этому принципу устроен самый крупный современный онлайн-аукцион товаров в Интернете, eBay, http://www.ebay.com/.

- **Голландский аукцион цветов**. Большинство цветов, продающихся в России, было куплено на аукционе цветов в Голландии. Этот традиционный аукцион отличается от английского. Потенциальные покупатели цветов сидят в общем зале. Перед ними на стене — большие часы с одной стрелкой. Стрелка показывает текущую цену товара. Изначально цена высока и никто не хочет покупать. С движением стрелки цена опускается. Наступит момент, когда одного из покупателей цена наконец устроит. Он получает товар и платит соответствующую цену.

- **Аукцион интернет-рекламы**. Когда пользователь набирает в поисковике (в Яндексе, Гугле или любом другом) какое-нибудь слово, к примеру «НИУ-ВШЭ», поисковик выдает найденные страницы и рекламные ссылки. Естественно, рекламодатели платят за то, что поисковик показывает их рекламные ссылки. Более того, рекламные ссылки продаются на аукционе! Представим себе, что

[1] Про оплату комиссионого сбора в 12 стульях мы, конечно, помним.

поисковик продаёт одно рекламное место. Желающие рекламодатели независимо друг от друга направляют свои заявки: «я готов платить за него 5 копеек за клик», «я готов платить 10 копеек за клик», «я готов платить 7 копеек за клик». Побеждает, естественно, тот, кто готов платить больше других. Но платит он не ту сумму, которую заявил в своей заявке! Победитель платит вторую по величине ставку! В нашем примере с тремя заявками рекламное место достаётся тому, кто был готов платить 10 копеек за клик, но платить он будет 7 копеек за клик. В реальности всё чуть сложнее. Например, рекламных мест может быть несколько, тогда тот, кому досталось второе по притягательности место, платит ставку того, кому досталось третье. Гугл продаёт свои рекламные ссылки на adwords.google.com.

Этим трём реальным примерам мы сопоставим три простые модели.

Общее между тремя моделями:

На аукционе продаётся единица неделимого товара, скажем одна морковка. За право получить морковку борятся n покупателей.

1. **Кнопочный аукцион**. У каждого покупателя есть кнопка. Стартовая цена равна нулю. Изначально все покупатели давят на свои кнопки. Затем цена начинает расти. Как только игрок отпускает свою кнопку, он покидает аукцион. Аукцион прекращается, когда остаётся лишь один игрок, жмущий на кнопку. Товар достаётся этому игроку по цене, сложившейся на момент остановки.

   Эта модель является упрощением реального английского аукциона. В реальности часто бывает, что игроки начинают активно играть лишь незадолго до окончания аукциона. Эта модель не предназначена для описания такого явления. В реальности игроки могут повышать текущую цену на произвольную величину, здесь же цена меняется непрерывно. Тем не менее многие свойства английского аукциона кнопочная модель ловит.

2. **Закрытый аукцион первой цены**. Покупатели одновременно делают свои ставки. Товар достаётся тому покупателю, который назвал самую высокую цену. Победитель платит продавцу свою ставку.

   Такой аукцион лучше всего подходит для моделирования голландского аукциона. Действительно, на голландском аукционе никакой другой информации, кроме того, по какой цене был продан товар, ни один из игроков не получает. Голландский аукцион и аукцион первой цены стратегически эквивалентны — множество стратегий у каждого игрока одно и то же, и функция выигрышей — такая же. В реальности на цену аукциона влияет, например, такой фактор, как скорость движения стрелки на часах.

3. **Закрытый аукцион второй цены**. Покупатели одновременно делают свои ставки. Товар достаётся тому покупателю, который назвал самую высокую цену. Победитель платит продавцу вторую по величине ставку, то есть наибольшую ставку, сделанную покупателями, за исключением его самого.

   Эта модель хорошо подходит для аукциона интернет-рекламы с одним рекламным местом.

Чтобы разграничить реальность и модели, мы будем использовать слова «английский аукцион», «голландский аукцион» для описания реальных явлений, а слова «аукцион первой цены», «аукцион второй цены», «кнопочный аукцион» — для описания моделей.

Иногда вводят понятия: **открытый аукцион**, то есть аукцион, где игроки видят ставки других игроков, и **закрытый аукцион**, где игроки не видят ставок других игроков. По этой классификации кнопочный аукцион является открытым, а аукционы, где игроки делают ставки одновременно, — закрытыми.

Для формального описания наших задач нам потребуется куча обозначений. Мы их будем вводить потихоньку, поэтому пугаться не стоит. Нужно всего лишь быть очень аккуратным и отличать заглавные и строчные буквы, например x и X. Для удобства вынесем все обозначения в отдельный список. Встречайте...

Обозначения!

Событие:

- W_i — событие, состоящее в том, что победителем аукциона стал игрок i.

Случайные величины:

- X_i — случайная величина, сигнал о ценности, получаемый игроком. Значение X_i известно игроку i. Функцию распределения этой случайной величины обозначим $F()$, а функцию плотности — $f()$.

- V_i — случайная величина, ценность товара для игрока i. Если игрок точно знает ценность товара, то $V_i = X_i$. Есть множество других возможностей, например $X_i = V_i + e_i$, где e_i — некая случайная ошибка.

- Bid_i — случайная величина, ставка, которую сделает игрок i в равновесии Нэша. В симметричном равновесии Нэша:

$$Bid_i = b(X_i). \tag{10.1}$$

- Pay_i — случайная величина, выплата, которую делает игрок i в равновесии Нэша.

- R — случайная величина, доход продавца в равновесии Нэша:

$$R = Pay_1 + Pay_2 + \ldots + Pay_n. \tag{10.2}$$

- $Profit_i$ — случайная величина, выигрыш игрока i в равновесии Нэша:

$$Profit_i = V_i \cdot 1_{W_i} - Pay_i. \tag{10.3}$$

- Y_1, ..., Y_{n-1} — случайные величины X_2, ..., X_n, упорядоченные по убыванию. В частности, $Y_1 = \max\{X_2, \ldots, X_n\}$ и $Y_{n-1} = \min\{X_2, \ldots, X_n\}$.

Детерминистические функции:

- $b(\cdot)$ — неслучайная функция, зависимость ставки от сигнала в равновесии Нэша;
- $q(x) = \mathbb{P}(W_1|X_1 = x)$ — вероятность выигрыша первого игрока, если $X_1 = x$ в равновесии Нэша;
- $pay_1(x) = \mathbb{E}(Pay_1|X_1 = x)$ — средняя выплата первого игрока, если $X_1 = x$ в равновесии Нэша.

При поиске равновесия Нэша полезно ещё одно обозначение. Мы ищем наилучший ответ первого игрока на действия остальных, поэтому все игроки, кроме первого, используют равновесные стратегии, а первый игрок ставит константу b_1 вне зависимости от сигнала.

- $\pi_1(x, b_1) = \mathbb{E}(Profit_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1)$ — средний выигрыш первого игрока, если $X_1 = x$, он ставит константу b_1, а остальные игроки используют равновесные стратегии.

Для полного описания моделей нужно сказать, как распределены ценности V_i и какую информацию X_i о ценностях получают игроки. Наиболее популярен анализ двух частных случаев:

1. Частные независимые ценности. Каждый игрок знает, какую ценность товар представляет для него, то есть $X_i = V_i$. Такая ситуация возникает, если товар сложно перепродать вне аукциона или игроки не собираются делать этого. Для простоты ценности предполагают независимыми случайными величинами.

2. Общая ценность. Если товар можно легко перепродать и купить вне аукциона по стабильной цене, то ценность товара для каждого игрока определяется этой рыночной ценой товара. То есть $V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = V_n = V$. При этом игроки могут не знать этого V. Каждый игрок знает лишь свой сигнал X_i, который зависит от V, но не обязательно ему равен.

В общем случае, который мы проанализируем, не будет ни равенства ценностей, ни независимости сигналов. Но начнем мы со случая частных независимых ценностей.

А теперь давайте найдём оптимальные стратегии игроков и средний доход продавца в трёх моделях.

1.2. Поиск оптимальных стратегий

Кратко напомним предпосылки. Сигнал X_i, который получает игрок i, — это и есть ценность товара для него, то есть $X_i = V_i$. Пусть ценности X_i будут независимыми и равномерными на отрезке $[0; 1]$ случайными величинами. Мы ограничимся поиском симметричного равновесия, то есть равновесия, где все игроки используют одинаковую стратегию. Фактические ставки при этом могут отличаться! Стратегия — это функция $b()$ от ценности, и даже если эти фукнции $b()$ одиковые, величины $b(X_i)$ будут разными в силу того, что ценности X_i будут разными.

До начала игры игроки ничем не отличаются: у них одинаковый закон распределения ценности товара, поэтому при анализе мы будем изучать поведение первого игрока.

Поехали!

1. Аукцион первой цены.

   Предположим, что есть некая равновесная стратегия $b(x)$. Предположим также, что она дифференцируема и возрастает по x.

Первый игрок выигрывает, если его ставка больше всех остальных, то есть $b_1 > Bid_i$ для $i \geqslant 2$. Обозначим событие, состоящее в том, что первый игрок выиграл буквой W_1. Его ожидаемый выигрыш равен:

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)\,\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1). \tag{13.1}$$

Вероятность:

$$\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{P}(b_1 > Bid_2 \cap b_1 > Bid_3 \cap \ldots \cap b_1 > Bid_n). \tag{13.2}$$

Наша задача — найти равновесие Нэша, то есть такую ситуацию, когда использование стратегии $b(x)$ является наилучшим действием, если остальные игроки используют такую же стратегию. Поэтому мы предположим, что все игроки, кроме первого, используют стратегию $b(x)$, и найдём условие, при котором первому игроку тоже выгодно её использовать.

$$\begin{multline}\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{P}(b_1 > b(X_2) \cap b_1 > b(X_3) \cap \ldots \cap b_1 > b(X_n)). \tag{13.3}\end{multline}$$

В силу независимости случайных величин X_i:

$$\begin{multline}\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{P}(b_1 > b(X_2)) \cdot \mathbb{P}(b_1 > b(X_3)) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(b_1 > b(X_n)). \tag{13.4}\end{multline}$$

В силу одинакового закона распределения X_i:

$$\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{P}(b_1 > b(X_2))^{n-1}. \tag{13.5}$$

Далее следует начало красивого трюка!

Чудо-замена

Все мы знаем, как делать замену переменных при решении задач. Входит, скажем, в уравнение переменная k, а мы говорим, что вместо k мы будем писать

$\cos(m)$. Или наоборот, входит в уравнение $\cos(m)$, а мы говорим, что вместо $\cos(m)$ будем писать k. Так вот сейчас мы сделаем замену. Мы заменим число b_1 на неизвестную (!) функцию‼

Итак, мы делаем замену $b_1 := b(a)$. С помощью этой замены мы упростим вероятность:

$$\mathbb{P}(b_1 > b(X_2))^{n-1} = \mathbb{P}(b(a) > b(X_2))^{n-1} = \\ = \mathbb{P}(a > X_2)^{n-1} = \mathbb{P}(X_2 < a)^{n-1} = F(a)^{n-1}. \quad (14.1)$$

На всякий случай: $F(a) = \mathbb{P}(X_i \leqslant a)$ — это функция распределения.

И наша прибыль имеет вид:

$$\pi_1 = (x - b(a))(F(a))^{n-1}. \quad (14.2)$$

Вместо максимизации по b_1 нам придется максимизировать по a. Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока приравниваем производную по a к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = -b'(a)(F(a))^{n-1} + (x - b(a))(n-1)F(a)^{n-2}f(a) = 0. \quad (14.3)$$

После упрощения:

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))(n-1)f(a) = 0. \quad (14.4)$$

Завершение красивого трюка! Мы хотим потребовать, чтобы первому игроку тоже было оптимально использовать стратегию $b()$. Ценность товара для первого игрока мы обозначили x, значит, оптимальное b_1 должно равняться $b(x)$. А мы делали замену $b_1 = b(a)$. Значит, в точке оптимума $b(x) = b(a)$, или $x = a$.

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))(n-1)f(x) = 0. \quad (14.5)$$

Это дифференциальное уравнение можно решить в общем виде, но мы ограничимся нашим равномерным случаем.

Для равномерной случайной на отрезке $[0;1]$ получаем $f(x)=1$ и $F(x)=x$:

$$-b'(x)x+(x-b(x))(n-1)=0. \tag{14.6}$$

Это линейное дифференциальное уравнение... Его можно решить стандартными методами, скажем, вариацией постоянной, а можно угадать вид решения. Мы пойдем путем угадывания, но я предполагаю, что все могут решить его честно! Раз фигурируют производная и первая степень x, попробуем $b(x)=kx+m$:

$$-kx+(x-kx-m)(n-1)=0. \tag{15.1}$$

Собираем коэффициенты при x:

$$-m(n-1)+x(-k+(1-k)(n-1))=0. \tag{15.2}$$

Это должно быть тождеством для любого x, значит, $m=0$ и $-k+(1-k)(n-1)=0$. Находим k, $k=\frac{n-1}{n}$.

Оптимальная стратегия первого и всех остальных игроков: $b(x)=\frac{n-1}{n}x$.

Комментарии:

а) Так как $\frac{n-1}{n}<1$, игроки занижают свою истинную ценность в равновесии Нэша. Причем чем меньше игроков, тем сильнее занижаются ставки по сравнению с субъективной ценностью товара.

б) Можно обойтись без красивого трюка. Для этого можно рассмотреть функцию, обратную к функции $b()$, и применить её внутри вероятности.

в) В равномерном случае можно обойтись и без дифференциальных уравнений. Для этого достаточно сделать удачную догадку до начала решения. То есть начать со слов: «Предположим, что оптимальная стратегия имеет вид $b(x)=kx+m$», — и максимизировать по k и m.

г) Тот, кто попробует честно решить линейное дифференциальное уравнение, обнаружит, что общее решение имеет вид $b(x)=c\cdot x^{-(n-1)}+\frac{n-1}{n}x$. Почему мы берём $c=0$? Наше дифференциальное уравнение является необходимым условием, полученным в предположении, что $b(x)$ — возрастающая функция. Только решение при $c=0$ является возрастающим.

д) Мы проверили только необходимое условие максимума: первая производная равна нулю. Желающие могут взять вторую производную и убедиться, что она меньше нуля, как и положено в максимуме. Позже мы в общем случае докажем, что достаточное условие выполнено.

е) Мы доказали, что найденная $b(x)$ — единственное симметричное равновесие Нэша, где $b(x)$ — возрастающая функция. Мы не искали равновесия Нэша, где $b(x)$ хотя бы иногда убывает.

Пример 16.1. Решение «в лоб», без чудо-замены.

Начнём с того, что прибыль представима в виде:

$$\pi(x, b_1) = (x - b_1)\,\mathbb{P}(b(X_2) < b_1)^{n-1}. \tag{16.2}$$

По нашим предположениям функция $b()$ строго возрастает, значит, у неё есть обратная. Обозначим её $b^{-1}()$:

$$\pi(x, b_1) = (x - b_1)\,\mathbb{P}(X_2 < b^{-1}(b_1))^{n-1} = (x - b_1)F(b^{-1}(b_1))^{n-1}. \tag{16.3}$$

Берём производную по b_1:

$$\begin{multline}\frac{\partial \pi(x, b_1)}{\partial b_1} = -F(b^{-1}(b_1))^{n-1} + \\ + (x - b_1)(n-1)F(b^{-1}(b_1))^{n-2} f(b^{-1}(b_1)) \cdot \frac{db^{-1}(b_1)}{db_1} = 0. \tag{16.4}\end{multline}$$

Отсюда как-то неявно выражается b_1 как функция от x. Но мы на самом деле знаем ответ! Мы уже предположили, что ситуация, когда все игроки используют функцию $b()$, — это равновесие Нэша. Значит, если все игроки, кроме первого, используют $b()$, то и первому игроку оптимально её использовать! Следовательно, решением должно являться $b_1 = b(x)$. Поэтому при подстановке $b_1 = b(x)$ должно получаться тождество, верное при любых x.

При подстановке $b_1 = b(x)$ величина $b^{-1}(b_1)$ превращается в x. Собственно, это и есть a при чудо-замене… Получаем дифференциальное уравнение:

$$-F(x)^{n-1} + (x - b(x))(n-1)F(x)^{n-2} f(x) \left.\frac{db^{-1}(b_1)}{db_1}\right|_{b_1 = b(x)} = 0. \tag{16.5}$$

Сокращаем F^{n-2}:

$$-F(x) + (x - b(x))(n-1)f(x)\left.\frac{db^{-1}(b_1)}{db_1}\right|_{b_1=b(x)} = 0. \tag{16.6}$$

Остаётся вспомнить, что производная обратной функции — это единица, делённая на производную исходной функции, и наше уравнение совпадает с 14.5.

2. Аукцион второй цены. Раз все игроки одинаковые, ограничимся рассмотрением первого игрока. Результат аукциона для него зависит от его собственной ставки и от максимальной ставки остальных игроков. Ценность товара для первого игрока у нас обозначена X_1. Обозначим максимальную ставку остальных игроков — m. Величину X_1 игрок знает, а m — нет. В наших обозначениях $m = b(Y_1)$, но это не существенно.

   Сравним две стратегии первого игрока: $b_1 = X_1$, $b_1 = X_1 + \Delta$. Числа X_1 и $X_1 + \Delta$ разбивают числовую прямую на три интервала. Неизвестное m попадет в один из этих трёх интервалов. Запишем выигрыш первого игрока в табличку. Если $b_1 < m$, то он ничего не платит и не получает товар. Если $b_1 > m$, то игрок получает товар ценностью X_1 и платит m:

	$m \in (-\infty; X_1)$	$m \in (X_1; X_1 + \Delta)$	$m \in (X_1 + \Delta; +\infty)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - m$	0	0
$b_1 = X_1 + \Delta$	$X_1 - m$	$X_1 - m$	0

   Мы видим, что в двух случаях из трёх стратегии приносят одинаковый выигрыш. Различие есть, только если $m \in (X_1; X_1 + \Delta)$. Стратегия $b_1 = X_1$ приносит нулевой выигрыш, а стратегия $b_1 = X_1 + \Delta$ приносит выигрыш $X_1 - m < 0$. Значит, стратегия b_1 нестрого доминирует любую стратегию вида $b_1 = X_1 + \Delta$ при $\Delta > 0$. Делать ставку выше своей ценности невыгодно!

   Аналогично сравним стратегии $b_1 = X_1$ и $b_1 = X_1 - \Delta$:

	$m \in (-\infty; X_1 - \Delta)$	$m \in (X_1 - \Delta; X_1)$	$m \in (X_1; +\infty)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - m$	$X_1 - m$	0
$b_1 = X_1 - \Delta$	$X_1 - m$	0	0

   На этот раз разница в выигрышах возникает, если $m \in (X_1 - \Delta; X_1)$. Стратегия $b_1 = X_1$ приносит выигрыш $X_1 - m > 0$. Следовательно, стратегия b_1 нестрого доминирует любую стратегию вида $b_1 = X_1 - \Delta$ при $\Delta > 0$.

Вывод. Существует равновесие Нэша, в котором все игроки используют стратегию $b(x) = x$, то есть правдиво декларируют свои ценности.

Комментарии:

а) Равномерность распределения нигде не использовалась в решении. Значит, наше рассуждение проходит для любого непрерывного закона распределения X. Почему нам важна непрерывность распределения? Надеюсь, кто-нибудь обратил внимание, что интервалы для m были открытые, мы не рассматривали случай, когда m идеально точно попадает в его границу. Если распределение ценностей непрерывно, то вероятность того, что m будет равняться конкретному числу, равна нулю. Исключив эти случаи из рассмотрения, мы не изменили ожидаемую прибыль первого игрока, а значит, не изменили его оптимальную стратегию.

   В случае дискретного распределения доходностей очень важным становится правило, согласно которому распределяется товар, если ставки совпали. В непрерывном случае вероятность совпадения ставок равна нулю, и никакое правило распределения товара при «ничьей» не влияет на оптимальные стратегии.

б) Также в решении нигде не использовалась независимость X_i. Значит, рассуждение проходит и для зависимых ценностей. Единственное ограничение: вероятность совпадения ценностей должна равняться нулю.

Пример 18.1. Можно решить аукцион второй цены таким же способом, как и аукцион первой цены. В этом случае:

$$\pi(x, b_1) = \mathbb{E}((X_1 - b(Y_1))1_{b_1 > b(Y_1)} | X_1 = x, Bid_1 := b_1) = \\ = \mathbb{E}((x - b(Y_1))1_{b_1 > b(Y_1)}). \quad (18.2)$$

Поскольку величины X_i независимы, условное математическое ожидание превратилось в безусловное. Чудо-замена $b_1 = b(a)$ и предположение о возрастании функции $b()$ позволяют упростить выражение:

$$\pi(x, b(a)) = x\,\mathbb{P}(Y_1 < a) + \mathbb{E}(b(Y_1)1_{Y_1 < a}) = \\ = x\int_0^a p_{Y_1}(t)dt - \int_0^a b(t)p_{Y_1}(t)\,dt. \quad (18.3)$$

Берём производную по a:

$$\frac{\partial\pi(x, b(a))}{\partial a} = xp_{Y_1}(a) - b(a)p_{Y_1}(a). \quad (18.4)$$

Мы предположили, что $b()$ — это равновесная стратегия, значит, при ценности x игроку должно быть оптимально ставить $b_1 = b(x)$. Кроме того, мы делали замену $b_1 = b(a)$. Значит, производная обращается в ноль при $a = x$:

$$xp_{Y_1}(x) - b(x)p_{Y_1}(x) = 0. \tag{19.1}$$

И отсюда мы получаем решение $b(x) = x$.

Недостаток этого способа в том, что он говорит, только что $b(x) = x$ — равновесие Нэша. А способ с доминированием стратегий говорит, что это не просто равновесие, а равновесие в нестрого доминирующих стратегиях.

3. Кнопочный аукцион.

Снова рассмотрим первого игрока. Если он видит, например, что другие игроки долго давят свои кнопки, он может сделать вывод, что их ценности товара высоки. Наблюдая за другими, он получает информацию о них, но не о себе! Его ценность не зависит от их ценностей! Ситуция резко изменится, когда мы будем рассматривать зависимые ценности в следующих лекциях. А пока наблюдение за другими не дает нашему игроку никакой полезной информации, кроме того, остался ли он уже один в игре или ещё нет.

Естественно, как только игрок остался один в игре, победитель сразу определён. Следовательно, стратегия игрока не зависит от того, сколько ещё игроков осталось, кроме него: ещё двое или трое, или семеро — никакой разницы. Таким образом, ещё до начала аукциона, узнав свою ценность X, игрок может уже спланировать свои действия: «я буду давить на кнопку до тех пор, пока цена не дойдет до некоей цены b или пока я не выиграю аукцион».

Итак, действия игрока описывается его числом b_i. Представим теперь, что игроки просто пишут свои b_i на бумажках, а на кнопки давят роботы, согласно этим b_i. Кто победит на аукционе? Победит тот, кто написал наибольшее b_i. А сколько он заплатит? Он заплатит вторую по величине ставку b_i!

Получается, что при независимых ценностях кнопочный аукцион полностью эквивалентен аукциону второй цены. А его мы уже решали. Оптимальная стратегия: $b(x) = x$.

Когда ценности будут коррелированы, кнопочный аукцион будет отличаться от аукциона второй цены.

1.3. Теорема об одинаковой доходности

Чтобы не повторяться, введём:

Определение 20.0. Закон распределения случайной величины X назовём **регулярным**, если существуют такие числа a и b, что функция распределения F строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a; b]$, $F(a) = 0$ и $F(b) = 1$.

В этой книге мы всегда рассматриваем регулярное распределение на отрезке $[0; 1]$. Это нисколько нас не ограничивает, так как вопрос выбора начала и конца отрезка — это вопрос выбора масштаба, в котором измеряются денежные суммы. Может быть, «один» — это один миллион рублей. Зато обозначения становятся проще.

***Теорема* 20.1.** *Теорема об одинаковой доходности. Revenue equivalence theorem.*

Рассмотрим следующие предпосылки:

RE1. На аукционе выставлен один товар.

RE2. За право получить товар торгуются n игроков.

RE3. Ценности товара для разных игроков одинаково распределенны и независимы.

RE4. Ценности имеют регулярное распределение на отрезке $[0; 1]$.

RE5. В равновесии товар достаётся тому игроку, для которого он ценнее всего.

RE6. В равновесии средний выигрыш игрока с минимальной ценностью (у нас с нулевой ценностью) равен нулю.

RE7. Покупатели нейтральны к риску.

Если аукцион удовлетворяет предпосылкам RE1—RE7, то средний доход продавца не зависит от конкретного механизма проведения аукциона.

Доказательство. Доказательство состоит из трёх шагов. Двух простых и третьего, позапутаннее, — связанного с теоремой об огибающей...

Шаг 1. Рассмотрим игрока с ценностью x. Какова вероятность того, что он выиграет аукцион? Из требования RE5 следует, что это вероятность того, что ценность остальных игроков ниже x. Применяя требования RE1—RE4, получаем, что искомая вероятность, обозначим её $q(x)$, равна

$$q(x) = F(x)^{n-1}.$$

Шаг 2. Заметим, что средняя выручка продавца — это сумма средних платежей всех игроков.

Шаг 3. Оказывается, что средний платеж игрока однозначно выводится из вероятности, упомянутой в шаге 1, и условия RE6. А именно мы докажем, что средняя выплата игрока определяется по формуле:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)\,dt. \tag{21.1}$$

Доказательство на самом деле занимает две или три строчки, но перед ними нужно ввести кучу обозначений. Итак...

Мы выбрали конкретного игрока. Рассмотрим ситуацию, в которой остальные игроки используют равновесные стратегии. Вероятность того, что наш игрок выиграет аукцион, зависит только от его ставки b, так как стратегии остальных зафиксированы. Обозначим её $\widehat{q}(b)$. Если игрок выигрывает аукцион, то он что-то платит, причём необязательно свою ставку! Если не выигрывает, то ничего не платит. Среднее значение этого платежа опять же зависит только от его ставки b, обозначим его $\widehat{pay}(b)$.

Средний выигрыш игрока определяется по формуле:

$$\pi(x, b) = x\widehat{q}(b) - \widehat{pay}(b). \tag{21.2}$$

У игрока есть равновесная стратегия $b(x)$, которая по определению равновесия Нэша является наилучшим ответом на действия других игроков.

При подстановке этой наилучшей стратегии $b(x)$ вместо b мы получаем определения трёх новых функций:

$$q(x) := \widehat{q}(b(x));$$

$$pay(x) = \widehat{pay}(b(x));$$

$$\pi^*(x) = \pi(x, b(x)) = xq(x) - pay(x).$$

Для ясности: единственная разница между функциями $\widehat{q}()$ и $q()$ состоит в том, что первая зависит от ставки, а вторая — от ценности. Повесив на стену столько ружей, пора стрелять!

Находим производную:

$$\frac{d\pi^*(x)}{dx} = \frac{d\pi(x, b(x))}{dx} = \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial b}\frac{db}{dx}. \tag{21.3}$$

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru