ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие состоит из 3-х частей и 13 глав по темам расчетно-графических работ. Каждая глава содержит краткое изложение теории, где приведены основные формулы и уравнения и примеры решения задач, аналогичных задачам в расчетно-графических работах.

В первой части пособия приведены главы, соответствующие учебному материалу 1-го семестра изучения сопротивления материалов – геометрические характеристики поперечных сечений стержней, центральное растяжение и сжатие прямых стержней, внутренние усилия в балках и плоских стержневых системах при изгибе, напряжения в балках при изгибе и расчеты на прочность.

В конце каждой части пособия приведен сортамент стальных прокатных стержней – уголков, двутавров и швеллеров.

Пособие написано авторским коллективом кафедры сопротивления материалов МГСУ. Большую помощь при написании и подготовке к изданию учебного пособия оказали авторам коллеги по кафедре – профессор О.В. Мкртычев, доценты А.Я. Астахова, А.В. Ильяшенко и А.Г. Паушкин.

В пособии использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: сила – P, площадь поперечного сечения стержня – F. Соотношения между основными механическими величинами в единицах СИ и в технической системе приведены в следующей таблице:

Наименование величины	Единица		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	1Н ≈ 0,1 кгс 1кН ≈ 0,1тс
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	1Н/м ≈ 0,1кгс/м 1кН/м ≈ 0,1тс/м
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Нм	1Нм ≈ 0,1кгс·м 1кНм ≈ 0,1тс·м
Напряжение, давление	Паскаль	Па	1Па ≈ 0,1кгс/м^2 1МПа ≈ 10кгс/см^2

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также кН/см^2 (1 кН/см^2 = 10 МПа).

ГЛАВА 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

1.1. Основные определения и формулы

Основными геометрическими характеристиками поперечных сечений стержней (рис.1.1), используемыми при расчете стержней на прочность и жесткость, являются следующие.

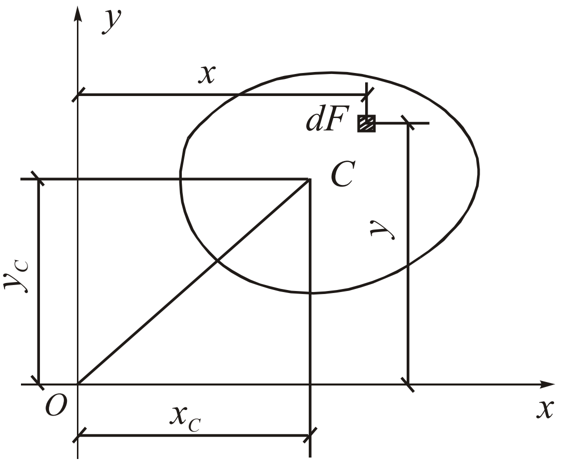

Рис.1.1

Площадь сечения F.

Статические моменты площади сечения относительно осей Ox и Oy

$$S_x = \iint_F y dF \ , \quad S_y = \iint_F x dF \, . \qquad (1.1)$$

Осевые моменты инерции

$$J_x = \iint_F y^2 dF \ , \quad J_y = \iint_F x^2 dF \, . \qquad (1.2)$$

Центробежный момент инерции

$$J_{xy} = \iint_F xy dF \, . \qquad (1.3)$$

Полярный момент инерции

$$J_p = \iint_F r^2 dF = J_x + J_y \, . \qquad (1.4)$$

Статические моменты имеют размерность длины в третьей степени (см^3), а моменты инерции – единицы длины в четвертой степени (см^4). Статические моменты и центробежный момент инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Осевые моменты инерции всегда являются положительными величинами.

Координаты центра тяжести сечения определяются по формулам

$$x_C = \frac{S_y}{F} \ , \qquad y_C = \frac{S_x}{F} \, . \qquad (1.5)$$

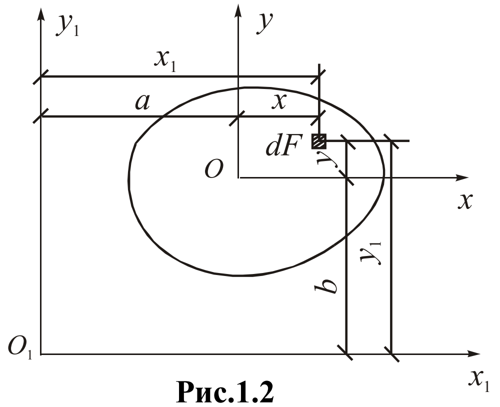

Рис.1.2

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными осями. Статический момент сечения относительно любой центральной оси равен нулю. Частным случаем центральных осей являются оси симметрии сечения.

При определении моментов инерции сечений используются зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей координат (рис.1.2):

$$J_{x_1} = J_x + b^2 F \, , \quad J_{y_1} = J_y + a^2 F \, , \quad J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF \, , \qquad (1.6)$$

где a и b – координаты центра тяжести O в системе координат $O_1 x_1 y_1$.

Две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции. Осевые моменты инерции относительно главных осей имеют экстремальные значения $J_{max} = J_1$ и $J_{min} = J_2$. Они называются главными моментами инерции.

Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными осями сечения.

Величины главных моментов инерции J_1 и J_2 и углы наклона главных осей α_1 и α_2 к оси Ox определяются по формулам

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}\ ;$$
$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1}, \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2}. \tag{1.7}$$

Ось симметрии сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей. Для сечений, имеющих более двух осей симметрии, а также при равенстве главных моментов инерции $J_1 = J_2$ все центральные оси являются главными.

Ниже приведены справочные данные о геометрических характеристиках простых сечений.

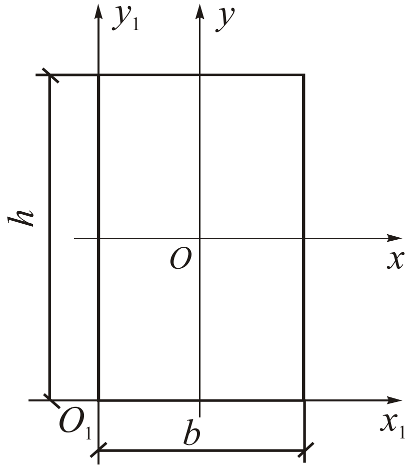

Рис.1.3

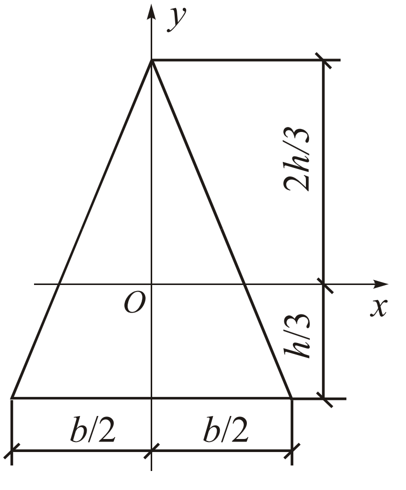

Рис.1.4

Прямоугольник (рис.1.3)

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{hb^3}{12}, \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}, \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}. \tag{1.8}$$

Равнобедренный треугольник (рис.1.4)

$$J_x = \frac{bh^3}{36}, \quad J_y = \frac{hb^3}{48}\ . \tag{1.9}$$

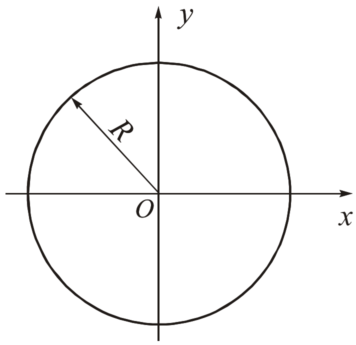

Рис.1.5

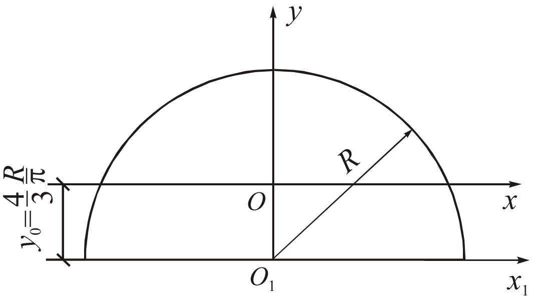

Рис.1.6

Круг (рис.1.5)

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}\ , \qquad J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}\ . \tag{1.10}$$

Полукруг (рис.1.6)

$$J_{x_1} = J_y = \frac{\pi R^4}{8}\ , \quad J_x \approx 0{,}11 R^4\ , \quad y_0 = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R\ . \tag{1.11}$$

Геометрические характеристики сечений прокатных стержней (двутавра, швеллера, уголка) приведены в сортаменте.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.1

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей сечения в виде прямоугольника с круговыми вырезами (рис.1.7).

Размеры сечений на рисунках $1.7 \div 1.12$ даны в сантиметрах.

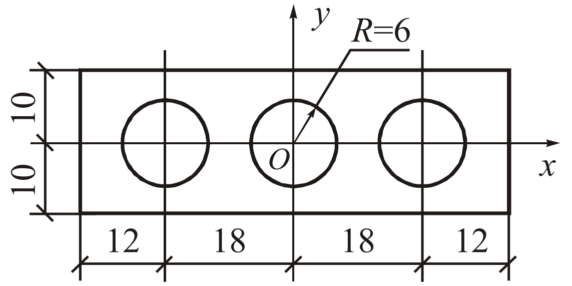

Рис.1.7

Оси симметрии Ox, Oy являются главными центральными осями всего сечения.

Моменты инерции и площади прямоугольника и круговых вырезов относительно их собственных осей определяются по формулам (1.8) и (1.10)

$$J_x^{(1)} = \frac{60\cdot 20^3}{12} = 40000\ \text{см}^4,$$

$$J_y^{(1)} = \frac{20\cdot 60^3}{12} = 360000\ \text{см}^4\ , \quad F_1 = 60\cdot 20 = 1200\ \ \text{см}^2\ ;$$

$$J_x^{(2)} = J_y^{(2)} = \frac{\pi\cdot 6^4}{4} = 1017\ \text{см}^4\ , \qquad F_2 = \pi\cdot 6^2 = 113\ \text{см}^2\ .$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей определяются по формулам (1.6).

$$J_x = J_x^{(1)} - 3J_x^{(2)} = 40000 - 3 \cdot 1017 = 36949 \text{ см}^4;$$
$$J_y = J_y^{(1)} - 3J_y^{(2)} - 2F_2 a^2 = 360000 - 3 \cdot 1017 - 2 \cdot 113 \cdot 18^2 = 283725 \text{ см}^4 .$$

Задача 1.2

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения, показанного на рис.1.8.

Разобьем сечение на три простые фигуры: прямоугольник с размерами 12×8 см и два равнобедренных треугольника с размерами 12×6 см. Моменты инерции и площади прямоугольника и треугольников относительно их собственных центральных осей определяются по формулам (1.8) и (1.9).

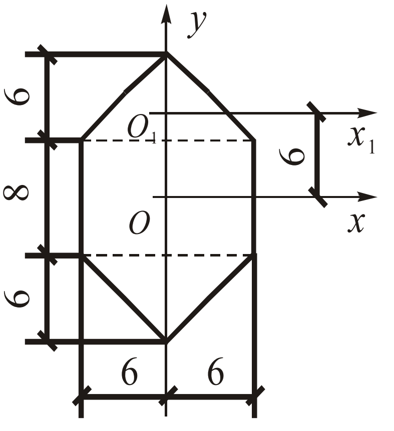

Рис.1.8

$$J_x^{(1)} = \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 512 \text{ см}^4 , \quad J_y^{(1)} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152 \text{ см}^4 ,$$
$$F_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^2;$$
$$J_x^{(2)} = \frac{12 \cdot 6^3}{36} = 72 \text{ см}^4 , \quad J_y^{(2)} = \frac{6 \cdot 12^3}{48} = 216 \text{ см}^4 ,$$
$$F_2 = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ см}^2 .$$

Площадь всего сечения равна

$$F = 96 + 2 \cdot 36 = 168 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей Ox, Oy определяются по формулам (1.6).

$$J_x = J_x^{(1)} + 2\left(J_x^{(2)} + F_2 b^2\right) = 512 + 2\left(72 + 36 \cdot 6^2\right) = 3248 \text{ см}^4;$$
$$J_y = J_y^{(1)} + 2J_y^{(2)} = 1152 + 2 \cdot 216 = 1584 \text{ см}^4.$$

Задача 1.3

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения стального стержня, составленного из четырех равнобоких уголков $\text{L}100 \times 100 \times 10$ и листа сечением 300×10 мм (рис.1.9).

Выпишем из сортамента площадь и моменты инерции сечения уголка относительно собственных центральных осей $O_1 x_1$ и $O_1 y_1$:

$$J_{x_1}^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} = 179 \text{ см}^4 , \qquad F_1 = 19{,}2 \text{ см}^2 .$$

Моменты инерции относительно осей Ox и Oy и площадь сечения листа равны

$$J_x^{(2)} = \frac{1 \cdot 30^3}{12} = 2250 \text{ см}^4 , \quad J_y^{(2)} = \frac{30 \cdot 1^3}{12} = 2{,}5 \text{ см}^4 , \quad F_2 = 30 \text{ см}^2.$$

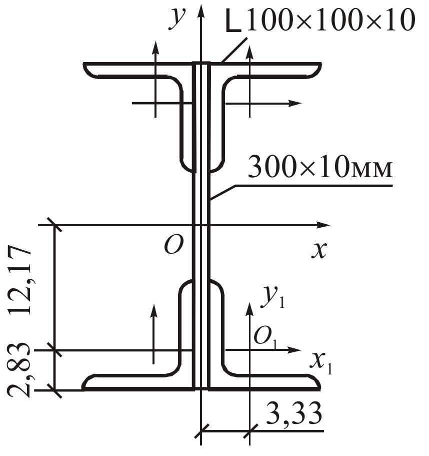

Рис.1.9

Площадь всего сечения равна

$$F = 4 \cdot 19{,}2 + 30 = 106{,}8 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей Ox и Oy определяются по формулам (1.6).

$$J_x = 4\left(J_{x_1}^{(1)} + F_1 b_1^2\right) + J_x^{(2)} = 4\left(179 + 19{,}2 \cdot 12{,}17^2\right) + 2250 = 14341 \text{ см}^4 ;$$

$$J_y = 4\left(J_{y_1}^{(1)} + F_1 a_1^2\right) + J_y^{(2)} = 4\left(179 + 19{,}2 \cdot 3{,}33^2\right) + 2{,}5 = 1570 \text{ см}^4 .$$

Задача 1.4

Определим положение центра тяжести и моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения с одной осью симметрии (рис.1.10).

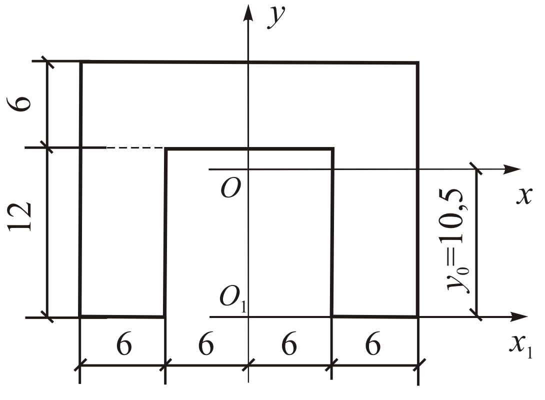

Рис.1.10

Данное сечение можно рассматривать как прямоугольник с размерами 24×18 см и прямоугольный вырез с размерами 12×12 см.

Площадь сечения равна

$$F = 24 \cdot 18 - 12 \cdot 12 = 288 \text{ см}^2.$$

Для определения положения центра тяжести сечения, который находится на оси симметрии Oy, примем в качестве вспомогательной оси ось O_1x_1, проходящую по основанию фигур.

Статический момент сечения относительно этой оси определим как разность статических моментов прямоугольника и квадрата

$$S_{x_1} = F_1 y_1 - F_2 y_2 = 24 \cdot 18 \cdot 9 - 12 \cdot 12 \cdot 6 = 3024 \text{ см}^3 .$$

Определим по формуле (1.5) координату центра тяжести

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{3024}{288} = 10{,}5 \text{ см}.$$

Оси Ox и Oy являются главными центральными осями сечения.

По третьей из формул (1.8) определим момент инерции сечения относительно оси O_1x_1:

$$J_{x_1} = \frac{24 \cdot 18^3}{3} - \frac{12 \cdot 12^3}{3} = 39744 \text{ см}^4 .$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей определяются по формулам (1.6).

$$J_x = J_{x_1} - F\, y_0^2 = 39744 - 288 \cdot 10{,}5^2 = 7992 \text{ см}^4 ;$$

$$J_y = \frac{18 \cdot 24^3}{12} - \frac{12 \cdot 12^3}{12} = 19008 \text{ см}^4 .$$

Задача 1.5

Определим положение центра тяжести и моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения стальной балки, составленной из двух двутавров I27 и стального листа сечением 400×12 мм (рис.1.11).

Моменты инерции и площади сечений двутавра и листа относительно собственных центральных осей соответственно равны:

$$J_{x_1} = 5010 \text{ см}^4 , \quad J_{y_1} = 260 \text{ см}^4 ,$$

$$F_1 = 40{,}2 \text{ см}^2 ;$$

$$J_{x_2} = \frac{40 \cdot 1{,}2^3}{12} = 5{,}76 \text{ см}^4 ,$$

$$J_{y_2} = \frac{1{,}2 \cdot 40^3}{12} = 6400 \text{ см}^4 ,$$

$$F_2 = 40 \cdot 1{,}2 = 48 \text{ см}^2 .$$

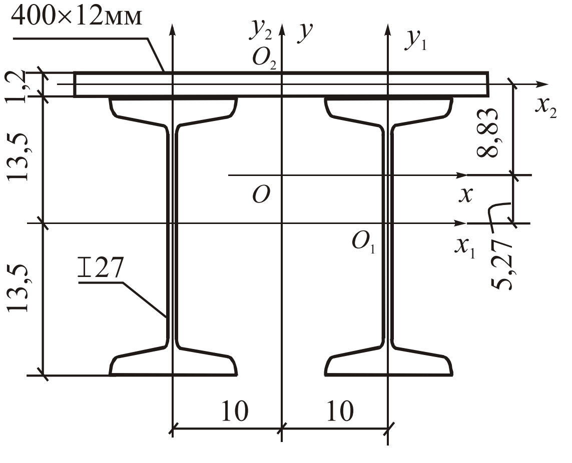

Рис.1.11

Площадь всего сечения равна

$$F = 2 \cdot 40{,}2 + 48 = 128{,}4 \text{ см}^2.$$

Для определения положения центра тяжести всего сечения определим статический момент сечения относительно оси O_1x_1, проходящей через центры тяжести двутавров:

$$S_{x_1} = F_2 y_2 = 48\left(13{,}5 + \frac{1{,}2}{2}\right) = 676{,}8 \text{ см}^3 .$$

По второй из формул (1.5) получим

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{676{,}8}{128{,}4} = 5{,}27 \text{ см}.$$

Оси Ox и Oy являются главными центральными осями. Моменты инерции сечения относительно этих осей равны

$$J_x = 2\left(5010 + 40{,}2 \cdot 5{,}27^2\right) + (5{,}76 + 48 \cdot 8{,}83^2) = 16000 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2\left(260 + 40{,}2 \cdot 10^2\right) + 6400 = 14960 \text{ см}^4.$$

Задача 1.6

Для стержня несимметричного сечения, составленного из двутавра I50 и неравнобокого уголка L200×125×16 (рис.1.12,*а*), определим положение центра тяжести сечения, моменты инерции относительно главных центральных осей и положение этих осей.

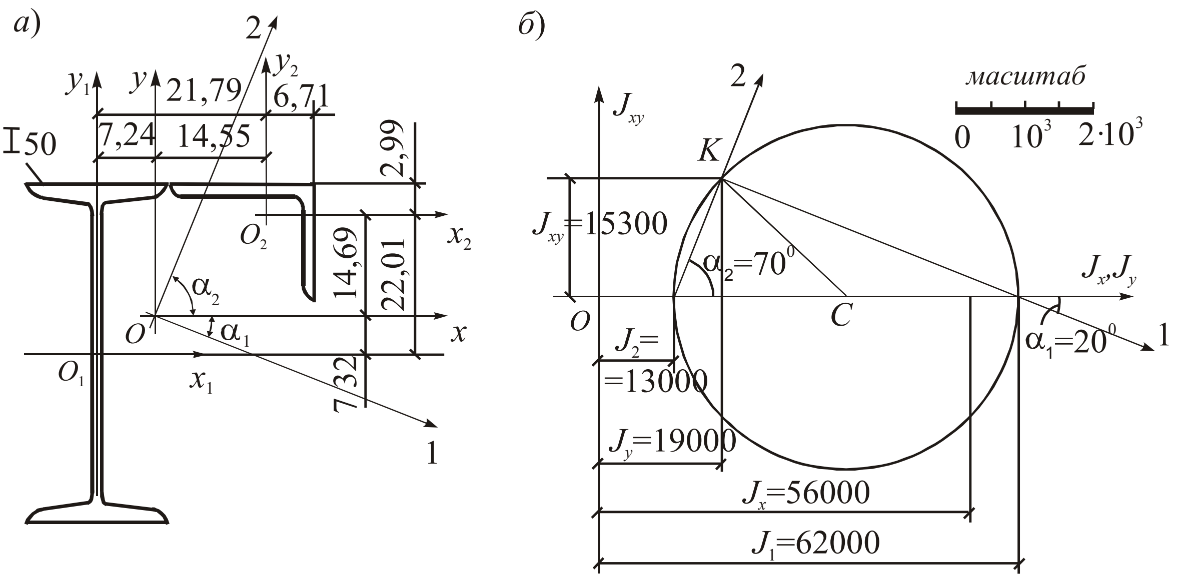

Рис.1.12

Моменты инерции и площади сечений двутавра и уголка относительно их собственных центральных осей соответственно равны:

$$J_{x_1} = 39727 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = 1043 \text{ см}^4, \quad J_{x_1 y_1} = 0, \qquad F_1 = 100 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_2} = 617 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = 2026 \text{ см}^4, \quad J_{x_2 y_2} = -644 \text{ см}^4, \quad F_2 = 49{,}8 \text{ см}^2.$$

Площадь всего сечения равна

$$F = 100 + 49{,}8 = 149{,}8 \text{ см}^2.$$

Для определения положения центра тяжести выберем в качестве вспомогательных осей оси двутавра O_1x_1 и O_1y_1. По формулам (1.5) получим

$$x_0 = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{F_2 x_2}{F} = \frac{49{,}8 \cdot 21{,}79}{149{,}8} = 7{,}24 \text{ см};$$

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{F_2 y_2}{F} = \frac{49{,}8 \cdot 22{,}01}{149{,}8} = 7{,}32 \text{ см}.$$

Эти величины и координаты центров тяжести двутавра и уголка в системе координат Oxy показаны на рис.1.12,*а* и соответственно равны:

$$a_1 = -7{,}24\ \text{см},\quad b_1 = -7{,}32\ \text{см},\quad a_2 = 14{,}55\ \text{см},\quad b_2 = 14{,}69\ \text{см}.$$

Определим по формулам (1.5) моменты инерции сечения относительно центральных осей Ox и Oy.

$$J_x = J_{x_1} + F_1 b_1^2 + J_{x_2} + F_2 b_2^2 =$$

$$= 39727 + 100 \cdot 7{,}32^2 + 617 + 49{,}8 \cdot 14{,}69^2 = 56449\ \text{см}^4\ ;$$

$$J_y = J_{y_1} + F_1 a_1^2 + J_{y_2} + F_2 a_2^2 =$$

$$= 1043 + 100 \cdot 7{,}24^2 + 2026 + 49{,}8 \cdot 14{,}55^2 = 18854\ \text{см}^4\ ;$$

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + F_1 a_1 b_1 + J_{x_2 y_2} + F_2 a_2 b_2 =$$

$$= 100 \cdot (-7{,}24) \cdot (-7{,}32) - 644 + 49{,}8 \cdot 14{,}55 \cdot 14{,}69 = 15300\ \text{см}^4\ .$$

По формулам (1.7) определим величины главных моментов инерции и углы наклона главных осей 1 и 2 к оси Ox.

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{56449 + 18854}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{56449 - 18854}{2}\right)^2 + 15300^2}\ ;$$

$$J_1 = 61889\ \text{см}^4, \qquad J_2 = 13415\ \text{см}^4;$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} = \frac{15300}{18854 - 61889} = -0{,}356, \qquad \alpha_1 = -19{,}6^\circ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2} = \frac{15300}{18854 - 13415} = 2{,}813, \qquad \alpha_2 = 70{,}4^\circ.$$

На рис.1.12,*б* приведено графическое определение величин главных моментов инерции и положения главных осей.

ГЛАВА 2

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

2.1. Основные определения и формулы

Центральное растяжение и сжатие прямого стержня вызывается действием осевых нагрузок, в состав которых входят сосредоточенные силы и распределенные нагрузки, характеризующиеся интенсивностью q. При $q = const$ нагрузка называется равномерно распределенной, равнодействующая которой равна произведению qa, где a – длина участка распределения.

В поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения и одно внутреннее усилие – продольная сила N, определяемая с помощью метода сечений. При этом продольная сила равна сумме проекций на ось Ox нагрузок, приложенных к одной из частей стержня (рис.2.1).

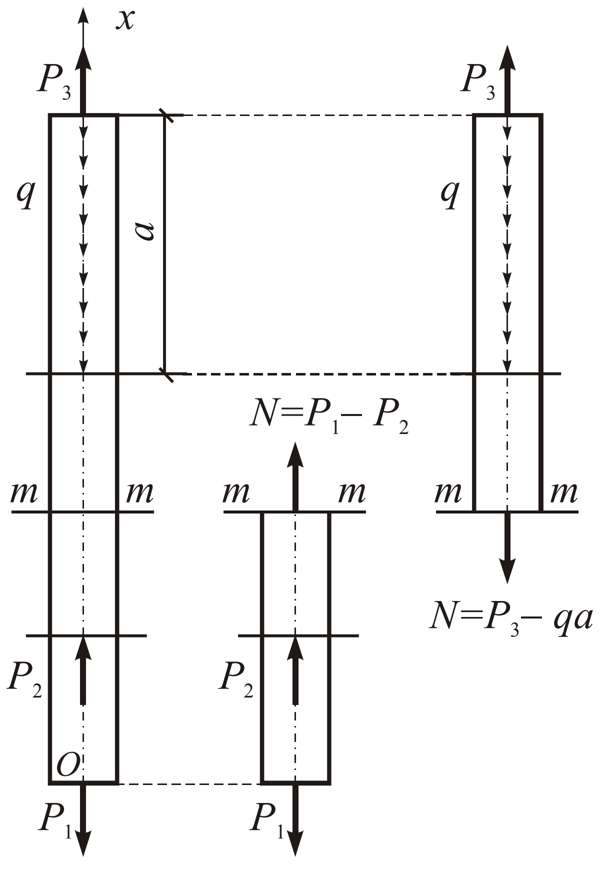

Рис.2.1

Результаты вычисления продольных сил N для верхней и нижней частей стержня должны совпадать. Растягивающая продольная сила считается положительной, а сжимающая – отрицательной. Продольная сила имеет размерность сосредоточенной силы (например, кН).

После определения продольных сил N в характерных сечениях стержня можно построить график изменения этих сил по длине стержня (эпюру N). При её построении используется дифференциальное соотношение

$$\frac{dN}{dx} = -q\ . \tag{2.1}$$

Нормальные напряжения при центральном растяжении и сжатии одинаковы во всех точках поперечного сечения и определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}\ , \tag{2.2}$$

где F – площадь поперечного сечения.

В системе СИ напряжения имеют размерность $\text{Па} = \text{Н/м}^2$, $\text{МПа} = 10^{-1}\ \text{кН/см}^2$ и др.

Относительная продольная деформация стержня длиной l равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}\ , \tag{2.3}$$

где Δl – удлинение или укорочение стержня.

В пределах упругих деформаций справедливо линейное соотношение между напряжениями и деформациями, называемое законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon \ , \tag{2.4}$$

где E – модуль упругости материала стержня.

Удлинение или укорочение стержня, закрепленного в начальном сечении $x = 0$, определяется по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF} dx \ . \tag{2.5}$$

Для частного случая $EF = const$ и $N = const$ имеем

$$\Delta l = \frac{N l}{EF} \ . \tag{2.6}$$

Для стержня с постоянной жесткостью EF при произвольном законе изменения продольной силы N величину Δl можно определить по формуле

$$\Delta l = \frac{1}{EF}\Omega_N = \frac{1}{E}\Omega_\sigma \tag{2.7}$$

где Ω_N и Ω_σ – площади эпюры N или эпюры σ на рассматриваемом участке стержня.

Поперечные сечения стержня, оставаясь плоскими и перпендикулярными к оси, получают осевые перемещения $u = u(x)$. Эпюра осевых перемещений строится после определения удлинений или укорочений Δl участков стержня.

Если при определении продольных сил и опорных реакций уравнений равновесия недостаточно, то стержень или стержневая система называются статически неопределимыми. Для их расчета необходимо использовать условия деформации.

Расчет на прочность элементов строительных конструкций производится по методу предельных состояний. В поперечных сечениях стержня при центральном растяжении или сжатии должно выполняться условие прочности

$$\sigma = \frac{N}{F} \le \gamma_c R \ , \tag{2.8}$$

где R – расчетное сопротивление материала, характеризующее его прочность, и γ_c – коэффициент условий работы. Величина продольной силы N вычисляется от действия расчетных нагрузок, определяемых с учетом коэффициента надежности по нагрузкам γ_f. Значения R, γ_c и γ_f приведены в соответствующих разделах СНиП.

Подбор сечения стержня производится по формуле

$$F \ge \frac{N}{\gamma_c R} \ . \tag{2.9}$$

Расчет элементов машиностроительных конструкций производится по методу допускаемых напряжений. Условие прочности в этом случае записывается в виде

$$\sigma = \frac{N}{F} \le [\sigma] \,, \tag{2.10}$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

При расчете стержней и стержневых систем из пластичных материалов может быть использована упрощённая диаграмма зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$, например, диаграмма Прандтля (рис.2.2). Согласно этой диаграмме при достижении напряжениями предела текучести $\sigma_т$ деформации неограниченно возрастают. При этом продольная сила в стержне принимает предельное значение (разрушающая сила)

$$N = N_{пред} = \sigma_т F \ . \tag{2.11}$$

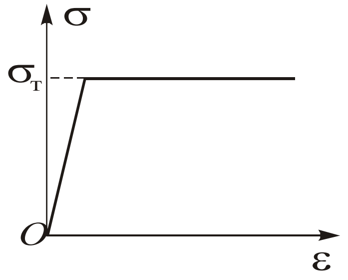

Рис.2.2

За начало разрушения стержневой системы можно принять такое состояние, при котором напряжения во всех стержнях достигнут предела текучести. При этом величина предельной нагрузки $P_{пред}$ определяется из уравнений равновесия. Допускаемая нагрузка определяется по формуле

$$P = \frac{P_{пред}}{n} \,, \tag{2.12}$$

где n – коэффициент запаса прочности.

2.2. Примеры решения задач

Задача 2.1

Для стержня ступенчато постоянного сечения, находящегося под действием осевых нагрузок (рис.2.3,*а*), построим эпюры N и σ. Определим удлинения (укорочения) участков стержня и всего стержня в целом и построим эпюру осевых перемещений. В расчетах примем $E = 1 \cdot 10^5$ МПа $= 1 \cdot 10^4$ кН/см^2.

Определим опорную реакцию в точке закрепления стержня.

$$\Sigma X = 0, \quad -R + 9 + 30 \cdot 1{,}2 - 24 = 0, \quad R = 21 \text{ кН} .$$

Направление опорной реакции в начале расчета принято правильно.

Определим с помощью метода сечений продольные силы и нормальные напряжения в пределах трех характерных участков стержня.

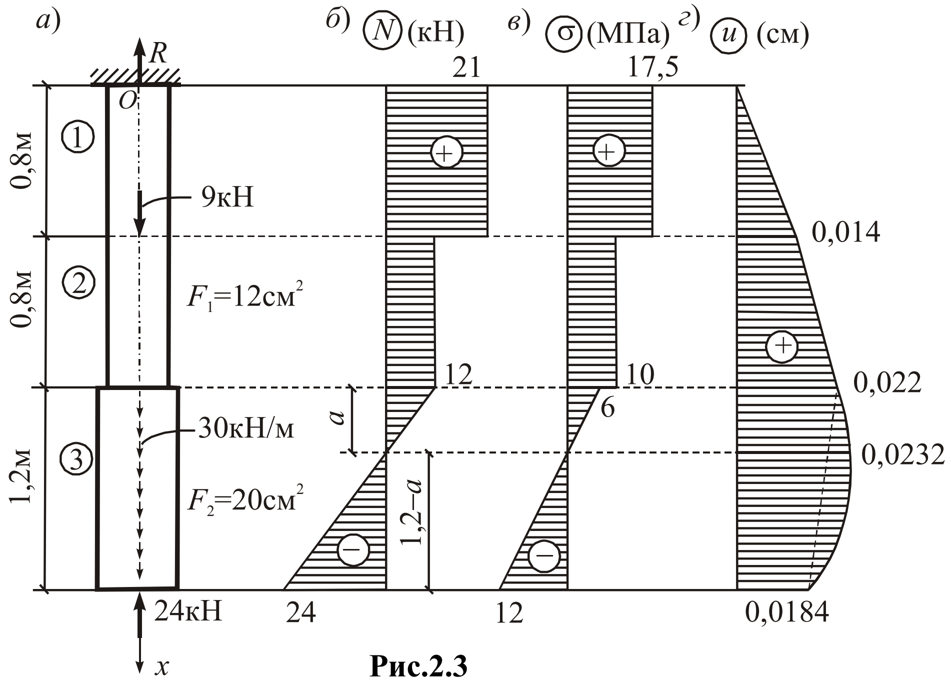

Рис.2.3

Участок 1 ($0 \le x \le 0{,}8$ м, рис.2.4).

$\Sigma X = 0, \quad -21 + N = 0$;

$N = 21$ кН (растяжение);

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{21}{12} = 1{,}75\ \text{кН/см}^2 = 17{,}5\ \text{МПа}.$$

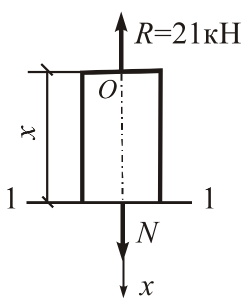

Рис.2.4

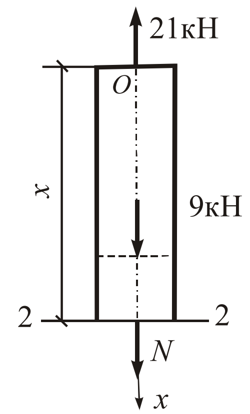

Рис.2.5

Участок 2 ($0{,}8 \le x \le 1{,}6$ м, рис.2.5).

$\Sigma X = 0, \quad -21 + 9 + N = 0$;

$N = 12$ кН (растяжение),

$$\sigma = \frac{12}{12} = 1\ \text{кН/см}^2 = 10\ \text{МПа}.$$

Участок 3 ($1{,}6 \le x \le 2{,}8$ м, рис.2.6).

$\Sigma X = 0, \quad -N + 30(2{,}8 - x) - 24 = 0, \quad N = 30(2{,}8 - x) - 24$;

$x = 1{,}6$ м, $N = 30 \cdot 1{,}2 - 24 = 12$ кН (растяжение),

$$\sigma = \frac{12}{20} = 0{,}6\ \text{кН/см}^2 = 6\ \text{МПа}.$$

$x = 2{,}8$ м, $N = -24$ кН (сжатие),

$$\sigma = -\frac{24}{20} = -1{,}2\ \text{кН/см}^2 = -12\ \text{МПа}.$$

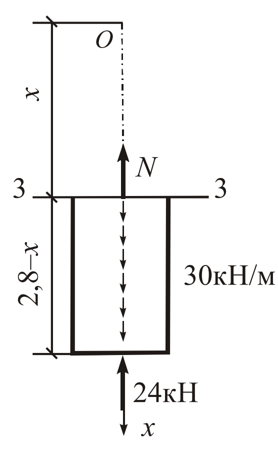

Рис.2.6

Строим эпюры N и σ (рис.2.3,*б*,*в*). В пределах первого и второго участков продольные силы и нормальные напряжения имеют постоянные значения, а в пределах третьего участка они изменяются по линейному закону. В сечении $x = 0{,}8$ м продольная сила имеет скачок на величину 9 кН.

Определим величины удлинений (укорочений) участков стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{21 \cdot 80}{1 \cdot 10^4 \cdot 12} = 0{,}014 \text{ см (удлинение)},$$

$$\Delta l_2 = \frac{12 \cdot 80}{1 \cdot 10^4 \cdot 12} = 0{,}008 \text{ см (удлинение)},$$

$$\Delta l_3 = \frac{1}{EF_2}\Omega_N = \frac{1}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} \cdot \frac{(-24+12)}{2} \cdot 120 =$$

$$= -0{,}0036 \text{ см (укорочение)}.$$

Общее удлинение стержня равно

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0{,}014 + 0{,}008 - 0{,}0036 = 0{,}0184 \text{ см}.$$

Определим осевые перемещения характерных сечений стержня.

$x = 0,\quad u = u_0 = 0$;
$x = 0{,}8$ м , $\quad u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 0{,}014$ см ;
$x = 1{,}6$ м , $\quad u_2 = u_1 + \Delta l_2 = 0{,}014 + 0{,}008 = 0{,}022$ см ;
$x = 2{,}8$ м , $\quad u_3 = u_2 + \Delta l_3 = \Delta l = 0{,}0184$ см .

Эпюра u приведена на рис.2.3,*г*. В пределах первого и второго участков осевые перемещения изменяются по линейному закону, а в пределах третьего участка – по закону квадратной параболы. В сечении, где $N = \sigma = 0$, имеется экстремум u_{max}, который равен:

$$u_{max} = u_2 + \Delta l_3^* = 0{,}022 + \frac{1}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 40 = 0{,}0232 \text{ см},$$

где Δl_3^* – удлинение верхней части третьего участка стержня длиной a, которая определяется из пропорции:

$$\frac{24}{1{,}2 - a} = \frac{12}{a}, \qquad a = 0{,}4 \text{ м}.$$

Все поперечные сечения перемещаются в положительном направлении оси Ox, то есть вниз.

Задача.2.2

Для стержня ступенчато постоянного сечения, испытывающего центральное растяжение и сжатие (рис.2.7,*а*), построим эпюры N и σ. Определим удлинения (укорочения) участков стержня и всего стержня в целом и построим эпюру осевых перемещений. В расчетах примем $E = 2 \cdot 10^5$ МПа $= 2 \cdot 10^4$ кН/см^2.

Определим с помощью метода сечений значения продольных сил и нормальных напряжений в характерных сечениях стержня, начиная с сечения вблизи свободного торца.

Участок 3 ($2 \le x \le 3$ м).

$$x = 3 \text{ м}, \quad N = 0, \quad \sigma = 0;$$

$x = 2$ м , $\quad N = -\,30{\cdot}1 = -30$ кН (сжатие) ;

$$\sigma = -\frac{30}{15} = -\,2\ \text{кН/см}^2 = -\,20\ \text{МПа}\ .$$

Участок 2 $(1{,}2 \le x \le 2\ \text{м})$.

$x = 2$ м , $\quad N = -\,30$ кН ,

$$\sigma = -\frac{30}{10} = -\,3\ \text{кН/см}^2 = -\,30\ \text{МПа}\ .$$

$x = 1{,}2$ м , $\quad N = -\,30$ кН , $\quad \sigma = -\,30$ МПа .

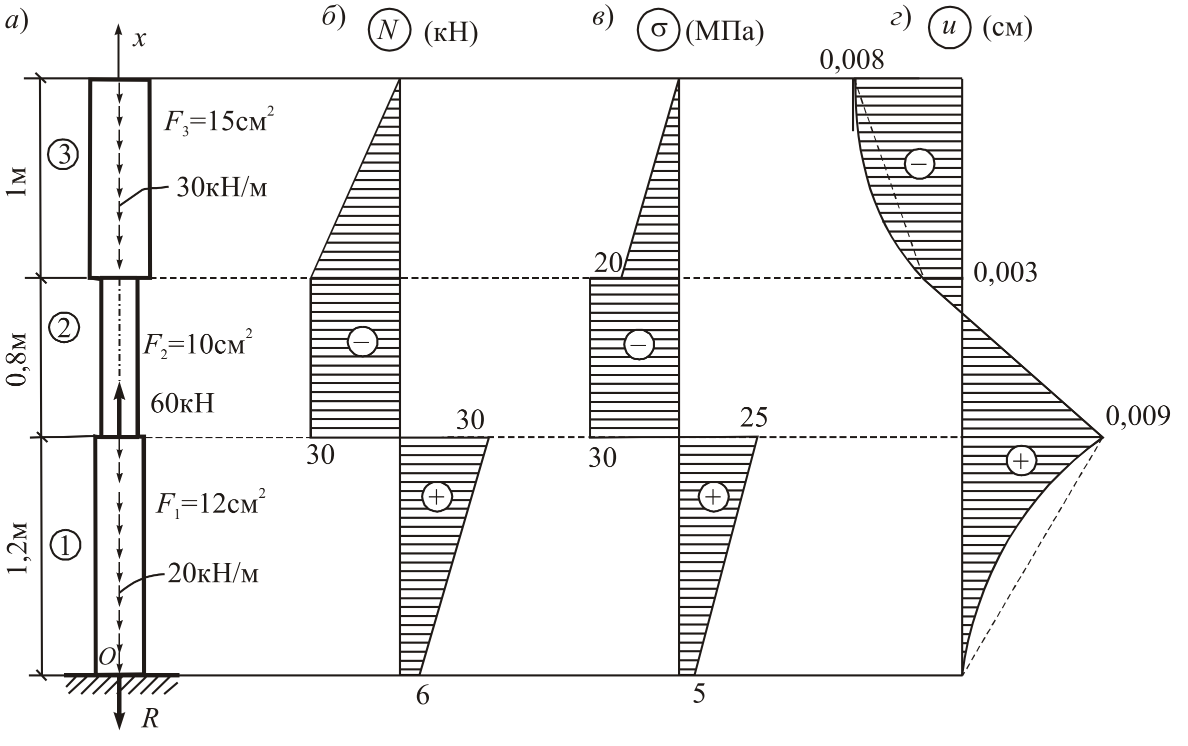

Рис.2.7

Участок 1 $(0 \le x \le 1{,}2\ \text{м})$.

$x = 1{,}2$ м , $\quad N = -\,30 + 60 = 30$ кН (растяжение) ;

$$\sigma = \frac{30}{12} = 2{,}5\ \text{кН/см}^2 = 25\ \text{МПа}\ ;$$

$x = 0$, $\quad N = 30 - 20{\cdot}1{,}2 = 6$ кН ;

$$\sigma = \frac{6}{12} = 0{,}5\ \text{кН/см}^2 = 5\ \text{МПа}\ .$$

Эпюры N и σ приведены на рис.2.7,*б*,*в*. В пределах первого и третьего участков продольные силы и нормальные напряжения изменяются по линейному закону, а в пределах второго участка они имеют постоянное значение. В сечении $x = 1{,}2$ м продольная сила имеет скачок на величину 60 кН.

Опорная реакция в закрепленном сечении равна $R = 6$ кН. Её направление показано на рис.2.7,*а*.

Определим величины удлинений (укорочений) участков стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2\cdot 10^4 \cdot 12}\cdot\frac{(30+6)}{2}\cdot 120 = 0{,}009\ \text{см};$$
$$\Delta l_2 = -\frac{30\cdot 80}{2\cdot 10^4\cdot 10} = -\,0{,}012\ \text{см};$$
$$\Delta l_3 = -\frac{1}{2\cdot 10^4\cdot 15}\cdot\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 100 = -\,0{,}005\ \text{см};$$
$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0{,}009 - 0{,}012 - 0{,}005 = -\,0{,}008\ \text{см}.$$

Стержень в целом укорачивается.

Определяем осевые перемещения характерных сечений стержня.

$x = 0$, $u_0 = 0$;

$x = 1{,}2$ м, $u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 0{,}009$ см;

$x = 2$ м, $u_2 = u_1 + \Delta l_2 = 0{,}009 - 0{,}012 = -\,0{,}003$ см;

$x = 3$ м, $u_3 = u_2 + \Delta l_3 = \Delta l = -\,0{,}008$ см.

Эпюра u приведена на рис.2.7,*г*. В пределах второго участка осевые перемещения изменяются по линейному закону, а в пределах первого и третьего участков – по квадратичному закону. В сечении $x = 3$ м касательная к эпюре u параллельна оси Ox. В пределах второго участка имеется сечение, осевое перемещение которого равно нулю.

Задача 2.3

Чугунный стержень ступенчато постоянного сечения закреплен на обоих торцах и находится под действием двух сосредоточенных сил (рис.2.8,*а*). Построим в общем виде эпюры N, σ и u и определим величину силы P из условий прочности по методу допускаемых напряжений. В расчетах примем $F = 10$ см^2 и допускаемые напряжения при растяжении и сжатии $[\sigma_р] = 80$ МПа $= 8$ кН/см^2, $[\sigma_с] = 150$ МПа $= 15$ кН/см^2.

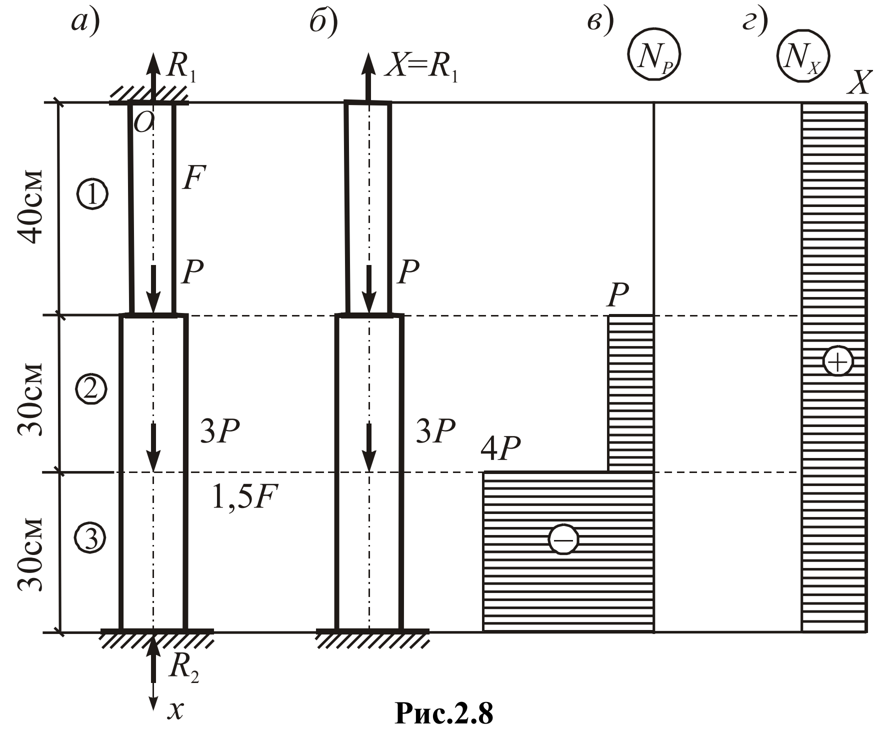

Рис.2.8

В точках закрепления стержня возникают две опорные реакции R_1 и R_2. Составим уравнение равновесия:

$$\Sigma X = 0\ , \quad -R_1 + P + 3P - R_2 = 0\ , \quad R_1 + R_2 = 4P.$$

Получили одно уравнение с двумя неизвестными. Данный стержень является статически неопределимым, и для его расчета необходимо использовать условие деформации стержня $\Delta l = 0$. Раскроем это условие с помощью принципа независимости действия сил.

Отбросим мысленно одно из закреплений, например, верхнее, и введем в этом сечении неизвестную силу $X = R_1$ (рис.2.8,*б*). Произведем расчет полученного таким образом статически определимого стержня раздельно на действие заданных нагрузок и силы X. Соответствующие эпюры продольных сил приведены на рис.2.8,*в*,*г*. При этом величины удлинений и укорочений стержня равны:

$$\Delta l_P = -\frac{P \cdot 30}{E \cdot 1{,}5F} - \frac{4P \cdot 30}{E \cdot 1{,}5F} = -100\frac{P}{EF};$$

$$\Delta l_X = \frac{X \cdot 40}{EF} + \frac{X \cdot 60}{E \cdot 1{,}5F} = 80\frac{X}{EF}\ .$$

Используем условие деформации стержня и находим опорные реакции.

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_X = -100\frac{P}{EF} + 80\frac{X}{EF} = 0;$$

$$X = R_1 = 1{,}25P, \qquad R_2 = 4P - R_1 = 2{,}75P.$$

Определяем значения N, σ и Δl в пределах участков стержня.

Участок 1.

$$N = R_1 = 1{,}25P\ , \qquad \sigma = 1{,}25\frac{P}{F};$$

$$\Delta l_1 = \frac{1{,}25P \cdot 40}{EF} = 50\frac{P}{EF}.$$

Участок 2.

$$N = 1{,}25P - P = 0{,}25P\ , \quad \sigma = 0{,}25\frac{P}{1{,}5F} = 0{,}167\frac{P}{F};$$

$$\Delta l_2 = \frac{0{,}25P \cdot 30}{E \cdot 1{,}5F} = 5\frac{P}{EF}.$$

Участок 3.

$$N = -R_2 = -2{,}75P\ , \quad \sigma = -2{,}75\frac{P}{1{,}5F} = -1{,}83\frac{P}{F};$$

$$\Delta l_3 = -\frac{2{,}75P \cdot 30}{E \cdot 1{,}5F} = -55\frac{P}{EF}.$$

Проверим выполнение условия деформации стержня.

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru