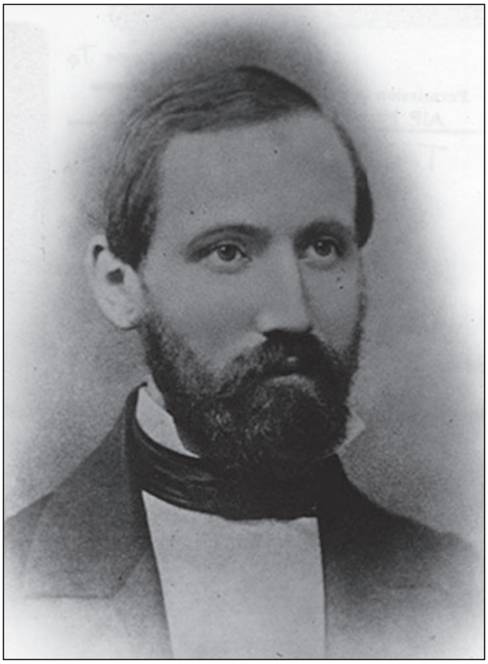

Бернгард Риман (1826–1866), немецкий математический гений,
интеграл которого является предметом этой книги
(AIP Emilio Segrè Visual Archives, T. J. J. See Collection)

Эта книга посвящена всем, кто, прочитав следующую строку из шпионского романа времен холодной войны Джона Ле Карра 1989 года «Русский дом», сразу узнает, что столкнулся с очень интересным персонажем:

> «Иногда он даже не следил за тем, на что смотрел, но он мог наслаждаться весь день хорошей страницей математики», –

а также всем, кто понимает, насколько разочаровывает сетование в книге Энтони Зи «Квантовая теория поля в двух словах»:

> «Ах, если бы мы только могли взять интеграл… Но мы не можем».

$$\int e^x = \{f(u)\}^n$$

$$\int \frac{d(\text{cabin})}{\text{cabin}} = \log\{\text{cabin}\} + C = \text{houseboat}$$

$$\left\{\int_1^{\sqrt[3]{3}} z^2 dz\right\} \cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) = \ln\{\sqrt[3]{e}\}$$

"The integral of z squared dz
From one to the cube root of three
All times the cosine
Of three pi o'er nine
Equals the natural log of the cube root of e"[1].

Это три классические интегральные шутки, любимые той любопытной группой людей, которые, если бы им дали выбор между борьбой с хорошей математической задачей или чем-то еще, подумали бы, что решение очевидно.

[1] «Интеграл от z в квадрате dz
От единицы до корня кубического из трех,
Умноженный на косинус
От три пи-на-девять,
Равен натуральному логарифму корня кубического из e».

Для поддержки теоретических расчетов, выполненных в этой книге, предоставляются числовые «подтверждения» с использованием нескольких команд интегрирования, доступных в программных пакетах, разработанных MathWorks, Inc. of Natick, MA. В частности, MATLAB® 8.1 (Release 2013a) и пакет расширения Symbolic Math Toolbox 5.10, оба пакета работают на ПК с Windows 7. Эта версия MATLAB® сейчас несколько устарела, но все команды, использованные в этой книге, работают с более новыми версиями и, вероятно, будут работать в последующих версиях еще несколько лет. MATLAB® является зарегистрированным товарным знаком MathWorks, Inc. Компания MathWorks не гарантирует точности текста в этой книге. Использование или обсуждение MATLAB® и пакета расширения Symbolic Math Toolbox здесь не означает одобрения или спонсорства компании MathWorks, конкретного педагогического подхода или конкретного использования MATLAB® и пакета Symbolic Math Toolbox.

Содержание

Вступительное слово от издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте **www.dmkpress.com**, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу **http://dmkpress.com/authors/publish_book/** или напишите в издательство по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг – возможно, ошибку в основном тексте или программном коде, – мы будем очень благодарны, если вы сообщите нам о ней. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Если вы найдете какие-либо ошибки в коде, пожалуйста, сообщите о них главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**, и мы исправим это в следующих тиражах.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательства «ДМК Пресс» и Springer очень серьезно относятся к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты **dmkpress@gmail.com**.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

> Инженерия – это как танцы; вы не изучаете это в затемненном лекционном зале, просматривая слайды: вы изучаете это, выходя на танцпол и наступая на пальцы ног.
>
> – Профессор *Джек Олфорд* (1920–2006), соучредитель инженерной клиники в колледже Харви Мадда, который нанял автора в 1971 году в качестве доцента. То же самое можно сказать и о нахождении определенных интегралов

Чтобы по-настоящему оценить эту книгу, посвященную тайному искусству вычисления определенных интегралов, необходимо (хотя, возможно, недостаточно) быть человеком, который в жестокой битве один на один за первое место в списке греховных удовольствий находит следующий вопрос более привлекательным, чем чашка горячего кофе с сахарным пончиком:

без фактического вычисления x показать, что

если $x+\frac{1}{x}=1$, из этого следует, что $x^7+\frac{1}{x^7}=1$.

Хорошо, я знаю, что многие (но, я надеюсь, не вы) подумают, столкнувшись с таким вопросом: какое земное значение может иметь такая задача? Ну, насколько я знаю, никакое, но ее очарование (или нет) для вас обеспечивает (я думаю) превосходное психологическое понимание того, стоит ли вам тратить время и/или хорошие деньги на эту книгу. Если вы смущены, озадачены или равнодушны (а может быть, все вместе), то я советую вам отложить эту книгу и вместо этого поискать хороший детективный роман, последнюю биографию Линкольна (кажется, каждый год появляется новая – что еще могло остаться невысказанным?) или, возможно, вегетарианскую кулинарную книгу.

Но если ваша ручка уже вынута и на вашем столе накапливаются нацарапанные страницы расчетов, то, черт возьми, вы – просто тот человек, для которого я написал эту книгу. (Если после доблестных усилий вы все еще в тупике, но тем не менее просто ощущаете необходимость посмотреть, как это сделать, или если ваша ручка просто исписалась – решение задачи представлено в конце книги.)

Точнее говоря, я написал для трех разных категорий читателей: (1) студентов, изучающих физику/инженерию/математику; (2) профессоров, которые ищут интересный материал для лекций, и (3) неакадемических профессионалов, которым нужно «хорошее техническое чтение».

Есть две возможные проблемы, связанные с вычислением определенных интегралов, которые мы должны рассмотреть сразу. Во-первых, действительно ли математики делают подобные вещи? Разве простые вычисления – не грязное дело (которое лучше всего делать вне поля зрения, в тени переулков, чтобы не нанести непоправимого ущерба юным умам впечатлительных юношей) покрытых жиром инженеров с дырявыми рукавами их рубашек или придурковатых физиков в потрепанных штанах и с меловой пылью на носу? Разве не в глубоком, чистом океане аналитических доказательств и теорем мы находим настоящих математиков, плавающих, как могучие лоснящиеся тюлени? Как инженер я сам нахожу это отношение немного элитарным, и поэтому мне приятно отметить удовольствие от вычислений, которым наслаждались многие великие математики, от Ньютона до наших дней.

Позвольте мне привести два примера. Во-первых, репутация величайшего английского математика первой половины XX века Г. Х. Харди (1877–1947) частично опирается на его феноменальное умение находить определенные интегралы. (Имя Харди часто упоминается в этой книге.) И во-вторых, герой этой книги (Риман) сегодня известен (помимо своего интеграла) формулировкой величайшей нерешенной проблемы математики, о которой я расскажу вам гораздо больше в конце книги. Но после его смерти, когда его личные заметки по этой самой проблеме были изучены, было обнаружено, что во всех глубоких теоретических материалах заложено вычисление $\sqrt{2}$ до 38 знаков после запятой!

Мне кажется просто безумием жалоба, которую я иногда слышу, на то, что нет конца определенным интегралам. (Но ведь это должно быть поводом для радости!) Вы можете играть с интегралами, с верхним и нижним пределами бесчисленным множеством способов[1], но идет ворчание – какой смысл вычислять определенные интегралы, поскольку вы не можете решить их все? Я надеюсь, что изложения этой проблемы на словах достаточно, чтобы прояснить ее смехотворный характер. Мы никогда не сможем найти все возможные определенные интегралы, так зачем беспокоиться? Ну, а что дальше – вы не можете сложить все возможные пары действительных чисел, так зачем беспокоиться о том, чтобы научиться складывать? Как я уже сказал, это безумие!

Что делает вычисление конкретных интегралов в этой книге ценным, так это не конкретные ответы, которые мы получим, а скорее уловки (извините, методы), которые будем использовать для получения этих ответов; методы, которые вы можете использовать при вычислении интегралов, с которыми вы столкнетесь в будущем в своей работе. Многие из интегралов, которые я покажу вам, действительно имеют важное применение в математической физике и технике, но другие включены только потому, что на первый взгляд они выглядят настолько чертовски крутыми, что испытываешь настоящий удар, когда видишь, как они просто рушатся, когда на них нападают с правильным трюком.

Из всего вышесказанного вы, вероятно, поняли, что я написал эту книгу в легкой манере (что означает «это не строгий учебник по математике»). Я не

---

[1] В следующей главе вы увидите, что при соответствующем изменении переменной мы можем преобразовать любой интеграл в интеграл от 0 до ∞, или от 1 до ∞, или от 0 до 1. Так что все не так плохо, как я это представлял.

собираюсь сильно беспокоиться, например, о том, чтобы доказать равномерную сходимость чего-либо, и если вы не знаете, что это значит, не беспокойтесь об этом, потому что я тоже не буду беспокоиться об этом. Дело не в том, что вопросы строгости не важны – они важны, – но не здесь для нас.

Когда, проделав длинную запутанную последовательность манипуляций, чтобы получить то, что мы считаем значением некоторого определенного интеграла, я просто запускаю замечательную команду `quad` численного интегрирования MATLAB (quad – сокращение от quadrature, квадратура), и мы вычисляем значение этого интеграла. Если наш теоретический ответ говорит, что $\sqrt{\pi} = 1.772453\ldots$, а `quad` говорит, что это равно 9.3, мы, конечно, будем подозревать, что где-то во всех наших вычислениях мы, возможно, просто лопухнулись! Однако если `quad` говорит, что это значение равно 1.77246, то это достаточно хорошо для меня, и мы пойдем, довольные успехом и покрасневшие от удовольствия, к следующей проблеме.

Сказав это, я был бы не совсем честен, если бы прямо сейчас не признал, что такое счастье может быть бредовым. Рассмотрим, к примеру, следующий контрпример к принятой философии этой книги. Предположим, вы использовали пакет программного обеспечения, чтобы показать следующее:

$$\int_0^\infty \cos(x)\frac{\sin(4x)}{x}dx = 1.57079632679\ldots,$$

$$\int_0^\infty \cos(x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin(4x)}{x}dx = 1.57079632679\ldots,$$

$$\int_0^\infty \cos(x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)\frac{\sin(4x)}{x}dx = 1.57079632679\ldots$$

и так далее, вплоть до

$$\int_0^\infty \cos(x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{30}\right)\frac{\sin(4x)}{x}dx = 1.57079632679\ldots.$$

Нужно быть слепым (а также полностью лишенным воображения), чтобы не заподозрить сразу две вещи:

$$\text{повторяющееся значение } 1.57079\ldots \text{ есть на самом деле } \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

и

$$\int_0^\infty \left\{\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right\}\frac{\sin(4x)}{x}dx = \frac{\pi}{2} \text{ для всех } n. \tag{2}$$

Это впечатляет! Но затем вы запускаете следующий случай с $n = 31$, и компьютер возвращает ответ

$$\int_0^\infty \cos(x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{30}\right)\cos\left(\frac{x}{31}\right)\frac{\sin(4x)}{x}dx = 1.57079632533\ldots.$$

В этой книге я бы отбросил отклонение (обратите внимание на последние три цифры!) как ошибку округления – и был бы неправ! Это не ошибка округления, и, несмотря на весьма убедительные численные вычисления, предполагаемое тождество «для всех n» просто не соответствует действительности. Это «почти» верно, но в математике «почти» не считается[1].

Это такая кошмарная вещь, которая заставляет математиков чувствовать себя обязанными четко формулировать любые предположения, которые они делают, и, если они действительно безупречны, показать, что эти предположения обоснованы, прежде чем идти вперед к анализу. Я не буду здесь так стесняться и, несмотря на предыдущий пример того, как плохо все может пойти не так, буду предполагать почти все, что удобно на данный момент (если не считать чего-то действительно абсурдного, например $1 + 1 = 3$), откладывая момент истины, когда мы «проверяем» теоретический результат с помощью MATLAB. Истинный математик почувствовал бы стыд (возможно, даже подумав, что наступило состояние морального вырождения), заняв такую бесцеремонную позицию. Я, с другой стороны, буду невосприимчив к таким душераздирающим сомнениям. Тем не менее имейте в виду, что мы будем рисковать.

Поэтому я снова признаю, что нарушение одного или нескольких условий, установленных строгими выкладками, может привести к катастрофе. Дополнительные юмористические примеры этого обескураживающего события могут быть найдены в статье[2] одного математика с чувством юмора. Эта статья начинается с такой провокационной строки: «Просматривая таблицу интегралов в унылый воскресный полдень [разве вы часто не делаете то же самое?], некоторое время назад я наткнулся на четыре расходящихся тригонометрических интеграла. Мне было интересно, как эти расходящиеся интегралы [с неверными конечными значениями] оказались в респектабельной таблице». Через пару предложений автор пишет: «У нас нет намерения опорочить ни известного математика, который сделал первоначальную ошибку [заслуженно известный французский гений Огюстен-Луи Коши (1789–1857), с которым вы познакомитесь, когда мы доберемся до контурного интегрирования], ни редакторов других прекрасных таблиц, в которых появляются интегралы. Мы все совершаем ошибки и не собираемся ни на кого указывать пальцем…»

А если мы лопухнулись, ну и что? Никто не должен знать. Мы просто спокойно соберем наши страницы с ошибками, разорвем их на части и бросим всё это

[1] Информативное обсуждение увлекательной математики, стоящей за этими вычислениями, см. в ст.: *Лорд Ник.* Забавная последовательность тригонометрических интегралов // Математическая газета. 2007. Июль. С. 281–285. (*Lord Nick.* An Amusing Sequence of Trigonometrical Integrals // The Mathematical Gazette. July 2007. P. 281–285).

[2] *Talvila Erik.* Some Divergent Trigonometric Integrals // The American Mathematical Monthly. May 2001. P. 432–436.

гнилое месиво в камин. Наши математические грехи будут только между нами и Богом (который хорошо известен как прощающий).

Однако уход от компьютера не обязательно поможет. Вот конкретный пример того, что я имею в виду под этим. В своем классическом жанре[1] Мюррей Шпигель (покойный профессор математики в Политехническом институте Ренсселера) просит читателей показать, что

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi\ln(2)}{2},$$

что равно 1,088793.... Можно только догадываться, сколько студентов боролись (и как долго), чтобы доказать это, поскольку данный ответ неверен. Позже в этой книге, в (5.1.3), мы возьмем данный интеграл правильно, но использование функции `quad` (недоступной Шпигелю в 1964 г.) быстро показывает, что числовое значение на самом деле значительно больше 1,4603.... В конце этого предисловия я покажу вам два примера (включая интеграл Шпигеля) полезного использования функции `quad`.

Наше использование `quad` вызывает вопрос, почему, если мы всегда можем вычислить значение любого определенного интеграла с тем количеством десятичных цифр, которое мы хотим, мы вообще заботимся о поиске точных выражений для этих интегралов? Это действительно философский вопрос, и я думаю, что он относится к таинственной особенности математики, где, казалось бы, несвязанные понятия могут оказаться тесно связанными. Выражения, которые мы найдем для многих определенных интегралов, найденных в этой книге, будут включать такие знакомые числа, как ln(2) и π, и другие числа, которые не так хорошо известны, как, например, постоянная Каталана (обычно записываемая как *G*) по имени французского математика Эжена Каталана (Eugène Catalan, 1814–1894).

Общая нить, соединяющая эти и другие числа, заключается в том, что все они могут быть записаны как бесконечные ряды, которые, в свою очередь, могут быть записаны как определенные интегралы:

$$\ln(2) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = 0.693147\ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 0.785398\ldots$$

$$G = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0.9159655\ldots$$

[1] *Spiegel M. R.* Outline of Theory and Problems of Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and Its Applications. Schaum, 1964. P. 198 (problem 91). [*Шпигель М. Р.* Изложение теории и проблем комплексных переменных с введением в конформные отображения и их приложения. Шаум, 1964. С. 198 (проблема 91).]

И конечно, на гораздо более глубоком уровне понимается, что известные интегралы Френеля $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ и $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ не просто «довольно близки» к 0,627, а точно равны $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

В 2004 году два математика опубликовали замечательную книгу, очень похожую по духу на эту, и я надеюсь, что мои бесцеремонные слова покажутся ужасными только самым суровым пуристам. Книга «Неотразимые интегралы» (Irresistible Integrals. Cambridge University Press) покойного Джорджа Бороса и Виктора Молла из Университета Тулейна (George Boros, and Victor Moll, Tulane University) не так охотно, как эта, обращается к дьявольской математике XVIII века времен Эйлера, но я сильно подозреваю, что авторы часто искушались. Их подзаголовок выдавал их: Символика, Анализ и Эксперименты [особенно обратите внимание на это слово!] в вычислении интегралов. Будучи математиками, они обладали большей силой воли, чем мой тщедушный инженер-электрик, склонный к строгости, но время от времени даже они не могли полностью подавить свое истинное удовольствие от нахождения определенных интегралов.

И затем три года спустя, в другой книге, соавтором которой является Молл, мы находим философское утверждение, которое точно отражает мое собственное (и этой книги): «Рассматривая интересное тождество, зарытое в длинной и сложной статье по незнакомому предмету, что дало бы вам больше уверенности в его правильности: посмотреть доказательство или численно подтвердить, что оно верно с точностью до 10 000 знаков после запятой?»[1] Эта книга и «Неотразимые интегралы» – действительно интересные математические книги.

Однако «Неотразимые интегралы» отличается от этой книги тем, что Борас и Молл писали для более подготовленной математически аудитории. Для понимания данной книги достаточен уровень знаний, эквивалентный уровню знаний по математике для младших и старших курсов математического колледжа. Они также гораздо больше используют компьютерные вычисления Mathematica, чем я MATLAB. С другой стороны, хотя я и предполагаю гораздо меньшие знания у моих читателей, только то, что хороший студент знал бы после первого года расширенного курса математического анализа (AP calculus), плюс лишь небольшое знакомство с концепцией дифференциального уравнения, но с одним БОЛЬШИМ исключением. А большое исключение – это контурное интегрирование, которого Борас и Молл избегали в своей книге, потому что «не все [математические специальности] (мы боимся, немногие) изучают комплексный анализ».

Должен сказать, что это застало меня врасплох. Для современного бакалавра математики не иметь курса комплексного анализа – это мне кажется шоки-

[1] *Петерс А. К.* Экспериментальная математика в действии. 2007. С. 4–5 (*Peters A. K.* Experimental Mathematics in Action). Наши вычисления здесь с `quad` не будут до 10 000 знаков после запятой, но идея та же самая.

рующим. Будучи специалистом в области электротехники, 50 лет назад я начал изучать комплексный анализ с помощью контурного интегрирования (на математическом факультете Стэнфорда) в начале первого курса, используя знаменитую книгу Р. В. Черчилля «Комплексные переменные и приложения» (*Churchill R. V.* Complex Variables and Applications). (У меня до сих пор сохранилась потрепанная, испачканная кофе копия.) Я думаю, что контурное интегрирование – это слишком красивая и мощная теория, чтобы ее можно было исключить из этой книги, но, признавая, что мой предполагаемый читатель может не иметь предварительных знаний о комплексном анализе, все интегралы, вычисленные в этой книге методами контурного интегрирования, собраны в отдельной главе в конце книги. Кроме того, в эту главу я включил «ускоренный мини-курс» в теоретический комплексный анализ, необходимый для понимания техники (при условии что читатель уже сталкивался с комплексными числами и действиями над ними).

«Неотразимые интегралы» содержат много прекрасных интегралов, но значительная их часть представлена в основном как «наброски», а детали вывода (часто представляющие существенные проблемы) оставлены на усмотрение читателя. А в данной книге каждый интеграл получен полностью. Здесь даже есть интегралы, которых нет в книге Бораса и Молла, такие как знаменитый интеграл, впервые разобранный в 1697 году швейцарским математиком Джоном Бернулли (1667–1748), интеграл, который настолько очаровал его, что он назвал его «чудесные ряды» («series mirabilia», «marvelous series»):

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots = 0.78343\ldots,$$

или его вариант

$$\int_0^1 x^{-x} dx = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots = 1.29128\ldots.$$

В этой книге также получены столь же экзотические интегралы

$$\int_0^1 x^{x^2} dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^5} - \cdots = 0.89648\ldots$$

и

$$\int_0^1 x^{\sqrt{x}} dx = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{2}{6}\right)^5 - \cdots = 0.65858\ldots.$$

Я не верю, что какой-либо из этих двух последних интегралов уже появлялся в какой-нибудь книге.

Один знаменитый интеграл, который также отсутствует в «Неотразимых интегралах», особенно интересен тем, что он, по-видимому (я немного это объясню), обязан своим вычислением математику из университета Тулейна (Tulane University), профессору Моллу (Victor H. Moll). Тогдашний глава математического факультета Тулейна профессор Герберт Бьюкенен (1881–1974) начал свою статью[1] 1936 года следующими словами: «Рассматривая проблему исследования в квантовой механике, профессор Дж. С. Моррис из Принстонского университета недавно столкнулся с интегралом

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx.$$

Поскольку интеграл не поддается никаким обычным методам, профессор Моррис попросил автора найти его [Джозеф Чандлер Моррис (1902–1970) был выпускником Тулейна, он защитил свою кандидатскую диссертацию по физике в Принстоне; позже он был главой физического факультета, а затем вице-президентом в Тулейне]».

Профессор Бьюкенен показал, что интеграл равен бесконечному ряду, сумма которого составляет 6,49..., и сразу после того, как он пришел к этому значению, он написал: «Из других соображений [детали которых не упоминаются, но которые, я предполагаю, были результатами либо численных расчетов, либо даже, возможно, физических экспериментов, проведенных в Принстоне Моррисом], интеграл должен иметь значение от 6,3 до 6,9. Таким образом, вышеупомянутое значение $\left[6.4939\ldots = \frac{\pi^4}{15}\right]$ обеспечивает теоретическую проверку экспериментальных результатов».

Итак, здесь мы имеем важный определенный интеграл, который, по-видимому, «обнаружен» физиком и решен математиком. На самом деле, как вы узнаете в главе 5, Бьюкенен был не первым, кто нашел этот интеграл; он был вычислен Риманом в 1859 году, задолго до 1936 года. Тем не менее это хорошая иллюстрация плодотворного сосуществования и позитивного взаимодействия эксперимента и теории, и она полностью соответствует подходу, который я использовал при написании данной книги.

Есть еще одно отличие этой книги от «Неотразимых интегралов», которое отражает мое образование как инженера, а не профессионального математика. На протяжении всей книги я старался привлечь к обсуждению множество физических приложений из таких разных областей, как теория радио и теоретическая механика. Однако во всех таких случаях математика играет центральную роль. Так, например, когда поднимается тема эллиптических интегралов (в конце главы 6), я делаю это в контексте известной проблемы физики. Происхождение этой проблемы связано, однако, не с физиком, а с математиком XIX века.

---

[1] *Бьюкенен Х. Е.* Об одном интеграле, возникающем в квантовой механике // Национальный математический журнал. 1936. Апр. С. 247–248. (*Buchanan H. E.* On a Certain Integral Arising in Quantum Mechanics // National Mathematics Magazine. April 1936. P. 247–248.) В своей книге «Электрическое одеяло миссис Перкинс» (*Mrs. Perkins's Electric Quilt*), Принстон, 2009, с. 100–102, я рассматривал этот интеграл не так, как Бьюкенен, и в главе 5 мы выведем его еще иным способом, как частный случай формулы (5.3.4).

Позвольте мне закончить это предисловие на той же ноте, что и его начало. Несмотря на всю математику, эта книга написана в духе «давайте повеселимся». Точно такое же отношение было у Харди, когда в 1926 году он ответил на просьбу о помощи молодого студента Тринити-колледжа в Кембридже. В тот год, еще будучи подростком, Х. С. М. Коксетер (1907–2003) предпринял исследование различных четырехмерных форм. Его исследования привели его («путем геометрического рассмотрения и проверки графически») к нескольким весьма впечатляющим определенным интегралам, таким как[1]

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{-1}\left\{\frac{\cos x}{1+2\cos x}\right\}dx = \frac{5\pi^2}{24}.$$

В письме в «Математическую газету» (*Mathematical Gazette*) он спросил, может ли кто-нибудь из читателей журнала показать ему, как получить такой интеграл (мы вычислим вышеупомянутый так называемый интеграл Коксетера позже, в самом длинном выводе этой книги).

Коксетер стал одним из величайших геометров мира, и он писал десятилетия спустя в предисловии к своей книге «Двенадцать геометрических очерков» издания 1968 года: «я до сих пор помню трепет получения [решений от Харди], когда я второй месяц учился на первом курсе в Кембридже». К решениям Харди прилагалась записка, нацарапанная на полях: «я очень старался не тратить время на ваши интегралы, но для меня вызов определенного интеграла непреодолим»[2].

Если вы разделяете увлечение Харди (и мое) определенными интегралами, то эта книга для вас. Тем не менее, несмотря на мое восхищение почти магическим талантом Харди к интегралам, я не думаю, что он всегда был прав.

---

[1] Команда `quad` MATLAB говорит, что этот интеграл есть 2.0561677…, что очень хорошо согласуется с $\frac{5\pi^2}{24} = 2.0561675\ldots$. Синтаксис кода: `quad(@(x)acos(cos(x)./(1+2*cos(x))),0,pi/2)`.
Для интеграла, который я показал вам ранее, из книги Шпигеля, код `quad` (я использовал 1e6 = 10^6 для бесконечного верхнего предела): `quad(@(x)log(1+x)./(1+x.^2),0,1e6)`. Большинство интегралов в этой книге являются одномерными, но для тех случаев, когда мы столкнемся с интегралами более высокой размерности, есть функции `dblquad` и `triplequad`, и компаньон MATLAB, пакет Symbolic Math Toolbox и его команда `int` (от слова «integrate») могут сделать то же самое. Синтаксис для этих случаев объясню, когда мы впервые столкнемся с многомерными интегралами.

[2] Итак, мы видим, откуда Борас и Молл взяли название своей книги. Несколько лет назад в своей книге *Dr. Euler's Fabulous Formula* (*Пол Дж. Нахин*. Необыкновенная формула доктора Эйлера. М.: ДМК Пресс, 2020) я привел еще один пример увлечения Харди определенными интегралами: см. раздел 5.7 данной книги «Харди и Шустер и их оптический интеграл», с. 263–274. Там я написал: «показать Харди на невзятый определенный интеграл было очень похоже на размахивание красным флагом перед быком». Позже в этой книге я покажу вам вывод «первых принципов» оптического интеграла (гораздо более изощренный вывод Харди использует преобразования Фурье).

Я пишу это почти кощунственное утверждение, потому что, помимо Бораса и Молла, еще одним обильным источником интегралов является «Трактат об интегральном исчислении», массивная двухтомная работа – почти 1900 страниц – английского педагога Джозефа Эдвардса (1854–1931).

Несмотря на то что в настоящее время все эти книги давно распроданы и не переиздаются, оба тома имеются в интернете и доступны для бесплатного скачивания. В апрельском обзоре *Nature* за 1922 год Харди почти с издевкой совершенно ясно дал понять, что ему не нравятся работы Эдвардса («Книга мистера Эдвардса может служить напоминанием о том, что начало девятнадцатого века еще не умерло, и ее нельзя рассматривать как серьезный вклад в анализ»). В конце, признав, что в книге есть что-то хорошее, Харди не удержался и бросил Эдвардсу в утешение последнюю фразу: «короче говоря, книга может быть полезна достаточно опытному преподавателю, при условии что он постарается не допустить, чтобы она попала в руки его ученика». Ну, я не согласен. Я нашел трактат Эдвардса потрясающим чтением, сундуком с сокровищами, наполненным математическими драгоценными камнями.

Некоторые из них вы найдете в этой книге. Она включает также десятки задач с подробными решениями в конце книги, если вы застряли. Наслаждайтесь!

Дарем, Нью-Хэмпшир (Durham, NH) *Пол Дж. Нахин* (Paul J. Nahin)

Глава 1

Введение

1.1. Интеграл Римана

Непосредственная цель этого вступительного раздела – рассмотреть вопрос о том, сможете ли вы понять технические комментарии в книге. Говоря прямо, знаете ли вы, что такое интеграл? Вы можете смело пропустить следующие несколько абзацев, если это окажется «старой шляпой», но, возможно, для некоторых это будет полезно. Изложение будет гораздо менее строго, чем хотелось бы чистому математику, и я намерен просто определить терминологию.

Если $y = f(x)$ – некоторая (любая) «достаточно хорошая» функция (если вы сумеете ее рисовать, то для нас это и будет «достаточно хорошая»), то определенный интеграл от функции $f(x)$, где x изменяется от $x = a$ до $x = b$, – это площадь (число, полностью определенное с помощью a, b и $f(x)$) фигуры, ограниченной функцией $f(x)$ и осью Ox. Это, по сути, затененная область, показанная на рис. 1.1.1. Вот почему вы часто увидите фразу «область под кривой» в этой и других книгах по интегралам. (Мы будем иметь дело в основном с вещественно-значными функциями в этой книге, но в конце будет довольно много обсуждений, касающихся комплексных функций.) На рисунке я показал $f(x)$, пересекающую x-ось при $x = c$; площадь выше оси Ox (от $x = a$ до $x = c$) – это положительная площадь, в то время как площадь ниже оси Ox (от $x = c$ до $x = b$) является отрицательной.

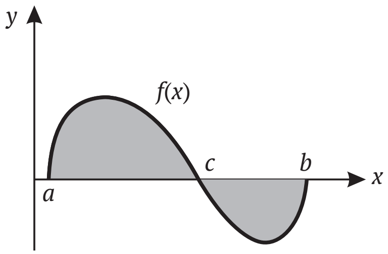

Рис. 1.1.1 ❖ Определенный интеграл Римана

Этот интеграл, называемый интегралом Римана, – в честь гениального немецкого математика Бернгарда Римана (1826–1866) – мы записываем в математических обозначениях как $\int_a^b f(x)dx$, где удлиненное S (это знак интеграла!) означает суммирование. Стоит взглянуть на то, как строится интеграл Римана, потому что не все функции имеют интеграл Римана (это функции, которые ведут себя «нехорошо»). Я покажу вам такую функцию в разделе 1.3. Идеи Римана датируются 1854 годом.

Суммирование вступает в игру, потому что интеграл на самом деле является предельным значением бесконечного числа членов в сумме. Вот как это происходит. Чтобы вычислить площадь под кривой, представьте, что интервал интегрирования по оси x от a до b разделен на n подынтервалов, при этом i-й подынтервал имеет длину Δx_i. То есть если конечные точки подынтервалов – это

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

тогда

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если мы сделаем подынтервалы равной длины, то

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a),$$

откуда получаем

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Мы предполагаем на данный момент, что n – это некоторое конечное (но «большое») целое число, что означает, что Δx является «малым».

Действительно, мы предполагаем, что Δx настолько мало, что $f(x)$, рассматриваемая на подынтервале, изменяется лишь незначительно на протяжении всего подынтервала. Пусть ζ_i – любое значение переменной x в интервале $x_{i-1} \le \zeta_i \le x_i$. Теперь площадь, ограниченная $f(x)$ над этим подынтервалом, является просто площадью очень тонкого вертикального прямоугольника высоты $f(\zeta_i)$ и горизонтальной ширины Δx, то есть площадью, равной $f(\zeta_i)\Delta x$. (Затененная вертикальная полоса на рис. 1.1.2.) Если мы сложим все эти прямоугольные области от $x = a$ до $x = b$, то получим очень хорошее приближение к общей площади под кривой от от $x = a$ до $x = b$, причем приближение становится только лучше, когда $n \to \infty$, и тогда $\Delta x \to 0$ (отдельные прямоугольные ленты становятся тоньше и тоньше). То есть значение I интеграла задается так:

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx,$$

где символ суммирования стал символом интеграла, а Δx стал дифференциалом dx. Будем называть $f(x)$ подынтегральным выражением, а a и b – нижним и верхним пределами интегрирования соответственно.