

Оглавление

От авторов	4
Справочные материалы по математике	9
Диагностическая работа	11
§ 1. Теоретические сведения и подготовительные задания	13
§ 2. Практикум по решению задач с развёрнутым ответом	81
1. Задачи повышенного уровня сложности	81
1.1. Базовые понятия и свойства фигур	82
1.2. Прямоугольный треугольник и его свойства	88
1.3. Окружность и её свойства	94
2. Задачи на доказательство	104
2.1. Базовые свойства геометрических фигур	104
2.2. Площади	111
2.3. Свойства окружностей и касательных	118
3. Задачи высокого уровня сложности	125
3.1. Свойства подобных треугольников	126
3.2. Прямоугольные треугольники и ортогональность	139
3.3. Свойства биссектрис	147
4. Варианты для самостоятельного решения	160
§ 3. Решения задач с развёрнутым ответом	165
1. Решение задач повышенного уровня сложности	165
2. Решение задач на доказательство	177
3. Решение задач высокого уровня сложности	189
Ответы	221

От авторов

Дорогие выпускники!

Пособие, которое вы держите в руках, поможет вам повторить изученный в 7–9-х классах материал по геометрии и научиться выполнять задания повышенного и высокого уровней сложности, контрольные работы, а также уверенно сдать ОГЭ в конце учебного года.

Как работать с книгой?

Сначала советуем выполнить диагностическую работу. Проверьте правильность своих ответов и выясните, какие темы вызвали у вас затруднения. Затем повторите теоретический материал, вспомните основные определения и теоремы и решите задачи для самопроверки по каждой теме. Это поможет вам при выполнении первой части ОГЭ. Часть заданий вы выполните уверенно и без ошибок, но, скорее всего, найдутся и такие, которые вы не сумеете решить. В таком случае вам необходимо ещё раз изучить соответствующий раздел теории и, может быть, обратиться к учебнику и повторить отдельные темы.

После этого переходите к отработке заданий высокого уровня сложности из практикума по решению задач.

Каждому заданию второй части экзаменационной работы соответствует отдельный раздел, задачи в котором условно отнесены к одной из трёх тем в соответствии с основными разделами курса. В начале каждого раздела даются краткая теория, используемые теоремы и образцы пошагового выполнения заданий. Обратите внимание на решения, выполненные девятиклассниками, и комментарии экспертов, оценивших эти решения.

Затем приводятся задачи для самостоятельной работы, подобранные парами: нечётные — с решениями (решения находятся в параграфе 3), а подобные им чётные — только с ответами.

Если какую-то задачу вы выполнить не смогли, вернитесь к теории и посмотрите образцы пошаговых решений. Постарайтесь найти ошибку самостоятельно, а если не получится, то вновь обратитесь к теории и образцам решения данной или парной задачи или попросите помощи у учителя, одноклассников.

Даже если вам удалось решить задачу легко и быстро, советуем проверить ответ и посмотреть решение. Это поможет вам понять, верно ли решена задача, и, может быть, освоить другой способ решения.

Так как в книге собраны все известные прототипы задач из открытого банка ОГЭ, прочные навыки выполнения всех типов заданий вам обеспечены. Количество решаемых задач по каждой теме вы определите самостоятельно в зависимости от успешности освоения учебного материала. В конце практикума размещены шесть вариантов самостоятельных работ. Выполняя их, вы ещё раз потренируетесь в решении и проверите себя. Обратите внимание на то, что в каждом варианте первые две задачи базового уровня сложности, а три последние подобны задачам 23–25 ОГЭ. Если вы выполнили их без ошибок, значит, весь материал освоен вами на «отлично»!

Успехов вам!

Уважаемые учителя и методисты!

Наше пособие представляет собой сборник тренировочных заданий для формирования устойчивых навыков решения задач повышенного и высокого уровней сложности, подобных содержащимся в открытом банке ОГЭ, размещённом на сайте ФИПИ*, и предлагаемых непосредственно на экзамене. Кроме того, книга содержит теоретический материал, необходимый для решения задач, и задачи базового уровня сложности для его закрепления. Пособие поможет вам в организации итогового повторения, выявлении возможных пробелов в подготовке выпускников к экзамену и проведении тренинга, закреплении и обобщении изученного материала.

Пособие составлено в соответствии с Федеральной образовательной программой по математике и содержанием учебников, допущенных к использованию в образовательном процессе школ РФ. В книге приведены решения всех нечётных задач практикума, что позволит упростить работу учителя и эффективно провести дифференцированную и индивидуальную подготовку учащихся к экзамену.

* www.fipi.ru.

Доля задач по геометрии в контрольных измерительных материалах по математике как на ОГЭ, так и на ЕГЭ значительна. Кроме того, согласно рекомендациям ФИПИ для прохождения аттестационного порога (получения положительной оценки на экзамене за курс основной школы) требуется набрать не менее двух баллов за решение заданий по геометрии.

Задачи базового уровня сложности содержатся в части 1 экзаменационной работы.

Часть 2 КИМ ОГЭ направлена на проверку освоения материала повышенного и высокого уровней сложности. Её назначение — дифференцировать уровень подготовки школьников, выявить ту часть выпускников, которая составляет потенциальный контингент профильных классов.

Рекомендуем не решать подряд все задачи вариантов (это разумно делать эпизодически или на завершающем этапе работы), а организовывать учебный процесс и тематическое повторение так, чтобы учитывать цели и уровень знаний и умений каждого ученика, формировать так называемое общее поле понятий и теорем наряду с общими учебными действиями.

Нерационально навязывать неподготовленному ученику решение задач повышенного и тем более высокого уровней сложности, нужно дать ему возможность выработать базовые умения. Но и предлагать сильному ученику задания базового уровня, если он их усвоил, тоже не следует. Нужно дать ему возможность решать более сложные задачи. Для этого и предназначено наше пособие.

В книге рассматриваются решения и оценивание заданий по геометрии из второй части экзаменационной работы, а также систематизируются задачи, прототипы которых использовались в КИМ ОГЭ с 2014 г.; они содержатся в открытом банке, размещённом на сайте ФИПИ.

Авторы предлагают задачи для самостоятельного решения, ответы ко всем заданиям и решения нечётных номеров задач для самостоятельной работы, при этом чётные задания составлены по принципу парности к разобраным. Решения приведены в конце книги.

Для контроля уровня подготовки учащихся в пособии представлены 6 вариантов самостоятельной работы, которые содержат задания как по-

вышенного и высокого, так и базового уровней сложности для получения удовлетворительной оценки.

В справочнике приведён основной теоретический материал (определения, теоремы и т. п.) за курс планиметрии 7–9-х классов.

Наряду с теоретическим материалом для обобщающего повторения даны тематические подборки задач базового уровня (задачи, подобные заданиям с кратким ответом ОГЭ, в том числе и с практическим содержанием), которые размещены в рубрике «Проверь себя». Эти задачи позволят учителю осуществить системно-деятельностный подход на начальном этапе подготовки к итоговой аттестации.

Кроме того, в каждый параграф включены теоремы, которые используются при решении задач. Значительная часть этого материала повторяется в разных разделах. Такое повторение, безусловно, полезно для тех учащихся, которые отрабатывают навыки решения заданий по определённой теме.

Заметим, что в части 2 ОГЭ задания расположены в порядке возрастания уровня сложности. Однако, независимо от сложности, выполнение любой задачи с развёрнутым ответом оценивается двумя баллами.

Задача 23 — геометрическая задача на вычисление. Она сложнее базового школьного уровня и проверяет знание основных теорем, терминов и умение записывать решение.

Задача 24 — задача повышенного уровня сложности на доказательство; по сравнению с предыдущей задачей она сложнее как логически, так и технически.

Задача 25 — высокого уровня сложности; такие задания требуют свободного владения не только геометрическим, но и алгебраическим материалом и рассчитаны на выпускников, которые изучали математику дополнительно, в рамках кружков или элективных курсов.

Основные требования к решениям заданий с развёрнутым ответом таковы: решение должно быть математически грамотным и полным, а ход рассуждений выпускника — понятным. Оформление решения должно обеспечивать соблюдение этих требований. Не следует требовать от девятиклассников слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений,

все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочётов. При решении задачи можно применять без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации программ среднего общего образования.

Если решение ученика удовлетворяет всем требованиям, то ему выставляется наивысший балл по этому заданию.

Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на её наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается 1 балл.

В рекомендациях ФИПИ* по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ для проведения основного государственного экзамена (ОГЭ) даются максимальные баллы за каждое задание и шкала пересчёта первичного балла в отметку по пятибалльной системе.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты издательства legionrus@legionrus.com.

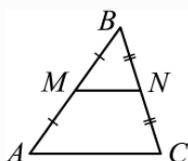
* <http://www.fipi.ru/sites/default/files>.

Справочные материалы по математике*

Геометрия

Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

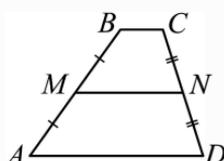
Средняя линия треугольника и трапеции



MN — ср. лин.

$MN \parallel AC$

$$MN = \frac{AC}{2}$$



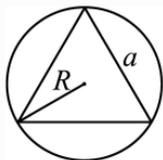
$BC \parallel AD$

MN — ср. лин.

$MN \parallel AD$

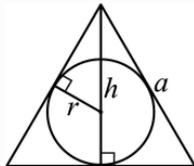
$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

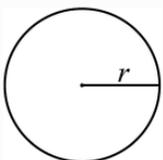
Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$,
 $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$,
 $AC = b$, $BC = a$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$



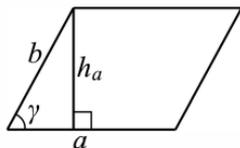
Длина окружности $C = 2\pi R$

Площадь круга $S = \pi r^2$

*Выдаются вместе с текстом экзаменационной работы.

Площади фигур

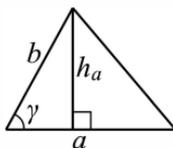
Параллелограмм



$$S = ah_a$$

$$S = ab \sin \gamma$$

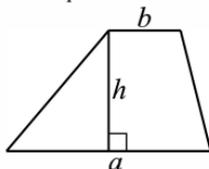
Треугольник



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

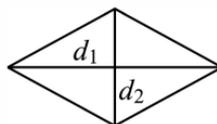
$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

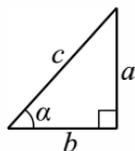
Ромб



$$d_1, d_2 \text{ — диагонали}$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Прямоугольный треугольник



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Некоторые значения тригонометрических функций

градусы α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Диагностическая работа

1. В треугольнике ABC угол A равен 35° , угол B равен 70° . Найдите угол C .

2. Фотографию размерами $10\text{ см} \times 15\text{ см}$ наклеили на прямоугольный лист альбома такого размера, что вокруг фотографии получилась окантовка одинаковой ширины 2 см (см. рис. 1). Найдите площадь фотографии с окантовкой.

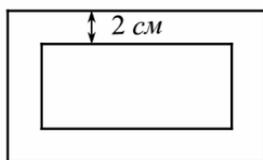


Рис. 1

3. Прямые DE и AB параллельны, $\angle D = 50^\circ$ (см. рис. 2). Найдите угол ABK , если BK — биссектриса треугольника ABC .

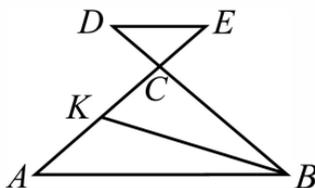


Рис. 2

4. Параллельные прямые BC и DE пересекают стороны угла A (см. рис. 3). Найдите длину отрезка CE , если $AB = 8$, $BD = 11$, $AC = 10$.

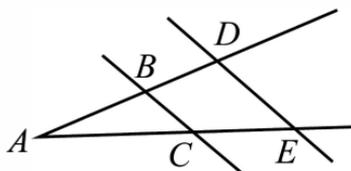


Рис. 3

5. В окружность с центром O вписан треугольник (см. рис. 4). Найдите углы треугольника, если $\sphericalangle AB = 140^\circ$.

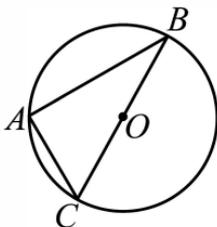


Рис. 4

6. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 5).

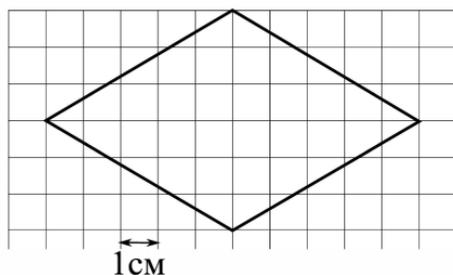


Рис. 5

7. Два катера вышли из порта, следуя один на восток, другой на юг. Скорости их равны соответственно 16 км/ч и 30 км/ч . Какое расстояние между ними будет через 2 часа?

8. Окружность с центром на стороне PM треугольника APM проходит через вершину M и касается прямой PA в точке A . Найдите диаметр окружности, если $PA = 12$, $PM = 16$.

§ 1. Теоретические сведения и подготовительные задания

Углы

- Развёрнутый угол равен 180° .
- Прямой угол равен 90° .
- Вертикальные углы равны.
- Смежные углы равны в сумме 180° .
- Биссектриса угла делит угол на два равных угла.

Проверь себя

1. На прямой AC взята точка B . Луч BD — биссектриса угла CBE (см. рис. 6). Известно, что $\angle DBE = 50^\circ$. Найдите угол DBA . Ответ дайте в градусах.

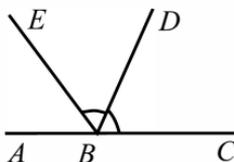


Рис. 6

2. На прямой MK взята точка P . Луч PO — биссектриса угла MPT (см. рис. 7). Известно, что $\angle OPM = 35^\circ$. Найдите угол TPK . Ответ дайте в градусах.

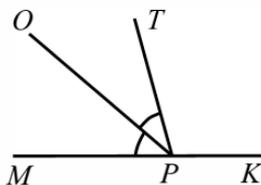


Рис. 7

3. Найдите величину угла AOB , если OB — биссектриса угла AOC , $\angle DOC = 64^\circ$ (см. рис. 8). Ответ дайте в градусах.

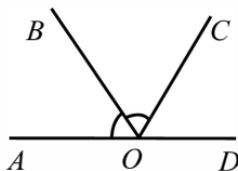


Рис. 8

4. Прямые AB и CD пересекаются в точке O , OM — биссектриса угла DOB (см. рис. 9). Найдите угол AOM , если известно, что $\angle AOC = 54^\circ$. Ответ дайте в градусах.

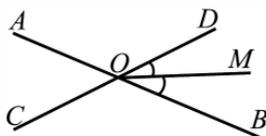


Рис. 9

5. Прямые AM и BK пересекаются в точке C , CD — биссектриса угла ACK (см. рис. 10). Найдите угол BCD , если известно, что $\angle KCM = 62^\circ$. Ответ дайте в градусах.

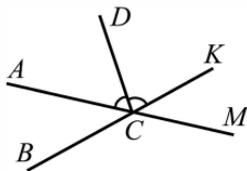


Рис. 10

6. Найдите величину угла CEA , если угол AED — прямой и EC — биссектриса угла BED (см. рис. 11). Ответ дайте в градусах.

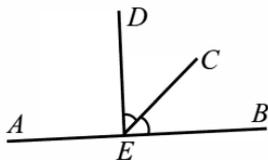


Рис. 11

Параллельные прямые

- *Аксиома параллельных прямых.*

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести ровно одну прямую, параллельную данной.

- Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.
- Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не пересекаются.
- Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, односторонние углы в сумме составляют 180° .
- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные накрест лежащие углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей сумма односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.

Проверь себя

7. Прямые a и b параллельны (см. рис. 12). Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 43^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$. Ответ дайте в градусах.

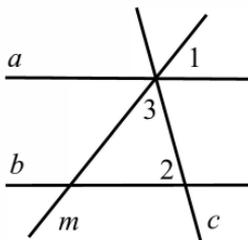


Рис. 12

8. Прямые a и b параллельны (см. рис. 12). Найдите $\angle 1$, если $\angle 3 = 38^\circ$, $\angle 2 = 71^\circ$. Ответ дайте в градусах.

9. Прямые p и k параллельны (см. рис. 13). Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 71^\circ$, $\angle 2 = 58^\circ$. Ответ дайте в градусах.

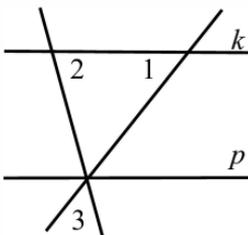


Рис. 13

10. Прямые b и c параллельны (см. рис. 14). Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 36^\circ$, $\angle 2 = 38^\circ$. Ответ дайте в градусах.

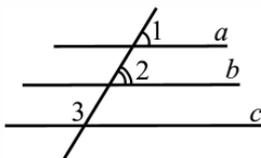


Рис. 14

11. Прямые b и c параллельны (см. рис. 15). Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 100^\circ$. Ответ дайте в градусах.

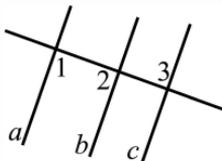


Рис. 15

Теорема Фалеса

Если на одной прямой отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то эти прямые высекают на второй прямой также равные между собой отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Проверь себя

12. Параллельные прямые AB , CD и PK пересекают стороны угла M так, что $PA = 7$, $AC = 2$, $BD = 3$ (см. рис. 16). Найдите KB .

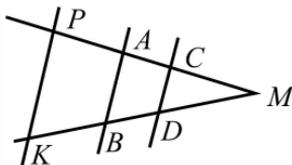


Рис. 16

13. Параллельные прямые AB , CD и PK пересекают стороны угла M так, что $KB = 8$, $KD = 10$, $PC = 15$ (см. рис. 16). Найдите AP .

14. Параллельные прямые BD и CE пересекают стороны угла A так, что $DA = 5$, $DE = 8$, $AB = 7,5$ (см. рис. 17). Найдите CB .

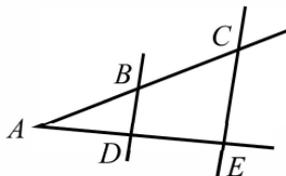


Рис. 17

15. Параллельные прямые BD и CE пересекают стороны угла A так, что $DA = 12$, $BC = 20$, $AC = 35$ (см. рис. 17). Найдите DE .

Признаки равенства треугольников

- Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними).
- Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам).
- Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны (по трём сторонам).

Признаки равенства прямоугольных треугольников

- по двум катетам,
- по катету и гипотенузе,
- по гипотенузе и острому углу,
- по катету и острому углу.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru