

Введение	7
Перечень сокращений	8
▼ 1	
Постановка задачи	9
▼ 2	
Основные положения модели	11
▼ 3	
Нелинейные уравнения динамики октокоптера	16
▼ 4	
Архитектура решения уравнений динамики в SimInTech	22
4.1. Решение дифференциальных уравнений методом структурного моделирования.....	22
4.2. Правые части уравнений	25
4.3. Система уравнений динамики октокоптера в структурном виде	29

▼ 5

Управление моделью коптера..... 32

5.1. База сигналов	32
5.2. Оптимальное управление	34
5.3. Регулятор высоты.....	40
5.4. Регулятор ориентации.....	40
5.5. Регулятор положения в пространстве	42
5.6. Регулятор положения в пространстве по каналам крена и тангажа	45

▼ 6

Пульт управления..... 47

6.1. Пульт управления, его подключение через базу сигналов.....	47
6.2. Анимация	49
6.3. Тестовый полет 1	51
6.4. Тестовый полет 2.....	55
6.5. Тестовый полет 3.....	60
6.6. Выводы по разделу.....	63

▼ 7

Практика: набор модели в виде схемы SimInTech..... 64

7.1. Уравнения динамики для реализации в схеме.....	64
7.2. Набор уравнений в схеме общего вида.....	66
7.3. Интегратор как способ записи дифференциального уравнения 1-го порядка	68
7.4. Блоки «В память».....	69
7.5. Блоки «Из памяти»	72
7.6. Сигналы проекта	75
7.7. База сигналов	76
7.8. Категория «Коптер».....	78
7.9. Категория «ВМГ».....	80
7.10. Масса коптера	82
7.11. Силы, действующие на коптер	83
7.12. Сила тяжести и ориентация коптера	90
7.13. Матрицы преобразования	94
7.14. Моменты сил, действующих на коптер	98
7.15. Инициализация схемы.....	101
7.16. Вычисление координат коптера.....	104

▼ 8

Моделирование ВМГ	109
8.1. Подготовка типовой подпрограммы ВМГ	109
8.2. Использование типовой подпрограммы	110
8.3. Модель винта	113
8.4. Вывод результатов на графики, их оформление, анализ расчета	116

▼ 9

Модель полетного контроллера.....	121
9.1. Регулятор высоты в нулевом приближении	123
9.2. Анализ влияния регулятора высоты на курс.....	132
9.2.1. Исправление регулятора высоты	133
9.2.2. Исправление начального состояния ВМГ.....	135
9.2.3. Регулятор высоты в первом приближении	137
9.3. Регулятор крена и тангажа	140
9.3.1. Идея регуляторов φ и θ	141
9.3.2. Создание регуляторов φ и θ	141
9.3.3. Тестирование, анализ результатов	145
9.3.4. Методы анализа и поиск ошибок (если что-то пошло не так.....)	147
9.3.5. Задание начальных условий, возмущений, анализ регуляторов	152
9.3.6. Применение базы сигналов для задания коэффициентов регуляторов	161
9.4. Структуризация схемы	163
9.4.1. Рамка, штамп.....	164
9.5. Регулятор по направлениям X и Y	170
9.5.1. Новые сигналы	171
9.5.2. Вычисление заданных углов наклона.....	172
9.6. Регулятор курса	175

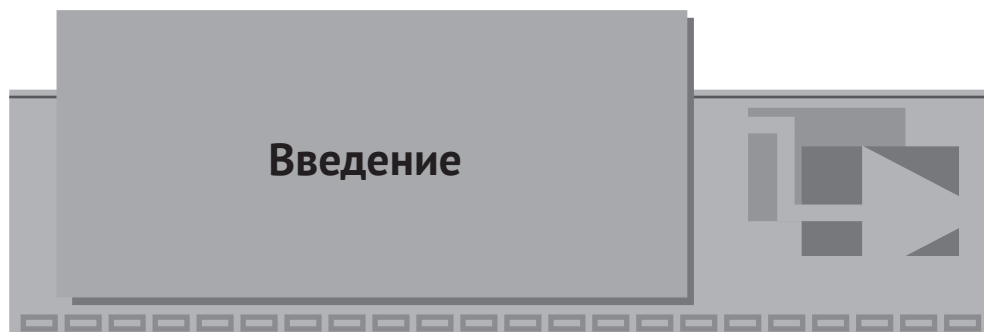
▼ 10

Пульт управления и анимация.....	179
10.1. Пример анимации.....	179
10.2. Плоская анимация в окне анимации.....	182
10.2.1. Постановка задачи	183
10.2.2. Плоская анимация	183
10.2.3. Поворот объекта	190
10.2.4. Текст с анимацией.....	191
10.2.5. Вид сверху.....	194

10.3. Набор пульта управления	196
10.3.1. Категория «Кнопки» базы сигналов.....	197
10.3.2. Алгоритм пульта управления	198
10.3.3. Проект пульта управления как «клиента» к модели динамики	201
10.3.4. Примитивы для пульта	205
10.3.5. Тестирование пульта, настройка внешнего вида и кнопок	208
10.3.6. Кнопки пульта	210
10.4. О трехмерной анимации	212

▼ 11

Доработка и отладка регуляторов октокоптера.....	214
11.1. Сопrotивление воздуха	215
11.2. Корректировка регуляторов	217
11.3. Введение еще одной обратной связи в регуляторы крена и тангажа	220
11.4. Что дальше?	223
Заключение.....	226
Список литературы	227



В настоящей методике изложены теоретические основы и подход к моделированию динамики полета октокоптера, во многом сходные с работами [1] и [2], а также реализация данного подхода с пошаговыми пояснениями в среде динамического моделирования SimInTech.

Если вам требуется реализовать модель динамики БПЛА или синтезировать регулятор высоты коптера со стабилизатором положения коптера в пространстве или даже спроектировать свой собственный полетный контроллер, а вы ничего про это не знаете, то данная методика послужит одной из хороших «точек входа» в тему.

В отечественной среде динамического моделирования SimInTech можно сделать многое в плане моделирования технических устройств, а также проектирования систем автоматического регулирования и управления этими устройствами. Практически любую модель динамики, в которой есть d/dt той или иной физической характеристики, можно легко реализовать в этой среде. Для этого первым делом необходимо сформулировать уравнения динамики моделируемого объекта (или найти их в литературе, понять, осмыслить и реализовать в среде моделирования). В сети и литературе есть довольно много описаний моделей коптеров, относительно простых, например [3], и ряд средней степени сложности; настоящая методика ориентируется на подход к моделированию, изложенный в [1] и [2], как наиболее близкий к модельно-ориентированному подходу к проектированию системы управления.

Подробное изложение теоретических аспектов модели приведено в первой части методики. С некоторыми модификациями изложенный подход пригоден и для моделирования квадрокоптера и гексакоптера. Однако в этих случаях исходные уравнения придется самостоятельно заново вывести и корректно спроецировать на оси координат.

Во второй части методики описана последовательность действий, которые необходимо совершить в среде SimInTech, а также ручкой или карандашом на листе бумаги, для того чтобы создать упрощенную, но близкую к реальности модель динамики БПЛА (а именно – октокоптера), модель его регуляторов (ориентации, высоты и положения в пространстве), макет пульта управления, небольшую техническую анимацию и набор графиков, для удобства отладки создаваемой модели.

Перечень сокращений



- АСУ ТП – автоматизированная система управления;
- БД – база данных (сигналов);
- ВМГ – винтомоторная группа;
- БПЛА – беспилотный летательный аппарат;
- В** – индекс системы координат, связанной с телом;
- I** – система координат инерциальная (связанная с Землей).

Постановка задачи

1

Модель октокоптера будем создавать в обобщенном виде, записывая параметры и характеристики объекта теми или иными переменными. Однако, чтобы модель «заработала», необходимо дать этим переменным какие-то конкретные значения. Также геометрическая конструкция тоже будет задана определенным образом, иначе невозможно получить конкретные уравнения сил и моментов.

Дано: объект массой порядка 10...25 кг, с 4, 6 или 8 парными соосными винтомоторными группами (ВМГ), расположенными по традиционной схеме квадрата-, гекса- или октокоптера на жесткой раме, с 8, 12 или 16 двигателями типа (например) T-motors Antigravity 6007 KV320 или аналогичными и соответствующими им винтами (исходим из силы тяги одной ВМГ порядка 2 кг на 50 % газа). Конструкция аппарата до конца не определена.

Требуется: сконструировать и реализовать модель динамики объекта параметрическим способом, в общем виде и в объеме, достаточном для проектирования полетного контроллера и наземного пульта управления коптером.

В настоящей методике приведено описание логически завершенной работы по поставленной задаче. Этой части недостаточно для построения полноценного полетного контроллера, но достаточно для ознакомления с основными возможностями среды SimInTech и с введением в тему динамического моделирования БПЛА «коптерного» типа. Здесь опущено моделирование эффектов прецессии, принимается, что реактивный момент каждой ВМГ равен нулю, а именно каждая ВМГ имеет два двигателя и винта, вращающихся всегда с равной скоростью в противоположные стороны. Не моделируются отказы оборудования, и предполагается, что объект находится только в воздухе (в штатном режиме полета); режимы посадки и взлета, аварийные ситуации, захват груза и разгрузка в приведенной модели не реализованы, а также не рассматриваются вопросы подробного моделирования датчиков, фильтрации сигналов и шумов, изгиб рамы коптера и/или винтов, работа на непроецируемых нагрузках, написание драйверов к той или иной аппаратуре и т. д. и т. п. Однако при необходимости приведенная модель является легко расширяемой и может стать основой для проектирования реальной прошивки полетного контроллера.

Модель, реализованная в настоящей методике, заканчивается на этапе, когда на ней можно отлаживать регуляторы и качество переходных процессов, а также реализовывать алгоритмы управления коптером (полет по заданным координатам, автоматическое выполнение тех или иных маневров и т. д.).

Настоящая методика имеет три цели: а) познакомить читателя с возможностями SimInTech, б) рассказать об одном из подходов к моделированию беспилотного летательного аппарата коптерного типа и к проектированию его системы управления и в) на примере модели октокоптера познакомить читателя и научить основным возможностям SimInTech по реализации математической модели в схеме общего вида (схеме автоматики), когда исходные и не самые простые уравнения динамики имеются в наличии у разработчика. Таким образом, здесь приведены теоретические сведения о моделировании коптеров, подход к реализации такой модели на базе среды SimInTech и пошаговое выполнение действий, необходимых для реализации модели. Для краткости изложения будет рассмотрена только модель октокоптера (две другие при необходимости можно получить и вывести самостоятельно как частные случаи октокоптера).

Основные положения модели

2

В литературе и сети приведено довольно много моделей квадрокоптеров, есть некоторые модели гекса- и октокоптеров. Однако изложенного в системном и методичном виде со всеми подробностями практически ничего нет (по крайней мере, в русскоязычном сегменте, из тех материалов, что удалось найти). Наиболее методично теоретический подход к моделированию мультироторного БПЛА изложен в работах [1] и [2].

Опуская некоторые выкладки, изложенные в этих работах (они легко гуглятся), можно выделить следующие допущения и упрощения, принятые в модели.

1. Двигатель моделируется как инерционное (апериодическое) звено первого порядка, на вход которому подается заданное значение угловой скорости, а на выходе получаем текущее (измеренное) значение угловой скорости вращения. Интегрируя скорость вращения, можно получить текущий угол поворота вала двигателя. Силу тяги ВМГ развивает пропорционально квадрату угловой скорости (равно как и реактивный момент каждого двигателя, но в нашем случае он будет 0), а именно:

$$\begin{aligned} F_M(t) &= C_T \cdot \omega^2(t), \\ M_M(t) &= C_Q \cdot \omega^2(t), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

где для выбранной винтомоторной группы (согласно ее характеристике) принимаем $C_T = 2.0227 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{с}^2$, а $M_M \approx 0 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $\omega(t)$ – текущая угловая скорость, рад/с.

2. Мультироторный аппарат моделируется как твердое тело и представляет собой жесткую (недеформируемую) раму постоянной массы, симметричную по трем главным осям, с прикрепленными к ней ВМГ в одной плоскости, в которой находится и центр масс аппарата. При этом ВМГ расположены на восьми лучах (4 из них одной длины l_1 , а другие 4 могут быть другой длины l_2) и жестко закреплены относительно рамы. Таким образом, можно говорить о том, что радиус-векторы центров ВМГ и орты силы тяги каждой ВМГ суть геометрические константы в системе координат, связанной с коптером. Другими словами, величина $F_M(t)$ [Н],

вычисленная в модели ВМГ, является модулем вектора силы, приложенного всегда в определенном направлении и в определенной точке рамы коптера. В процессе полета это направление будет меняться, конечно, относительно Земли, но относительно рамы коптера (и связанной с ней системы координат) оно остается неизменным.

3. На протяжении всей методики и модели используется две системы координат: а) неподвижная инерциальная, связанная с Землей, и б) подвижная, связанная с коптером. Системы координат обозначим буквами **I** и **B** (от английских слов *inertial* – инерциальный и *body* – тело). При этом оси систем направлены: x_i – вправо, y_i – на наблюдателя, z_i – вниз, x_B – вправо вдоль луча первой ВМГ, y_B – на наблюдателя вдоль луча третьей ВМГ, z_B – сверху вниз, при нормальной горизонтальной ориентации октокоптера (см. рис. 2.1.1):

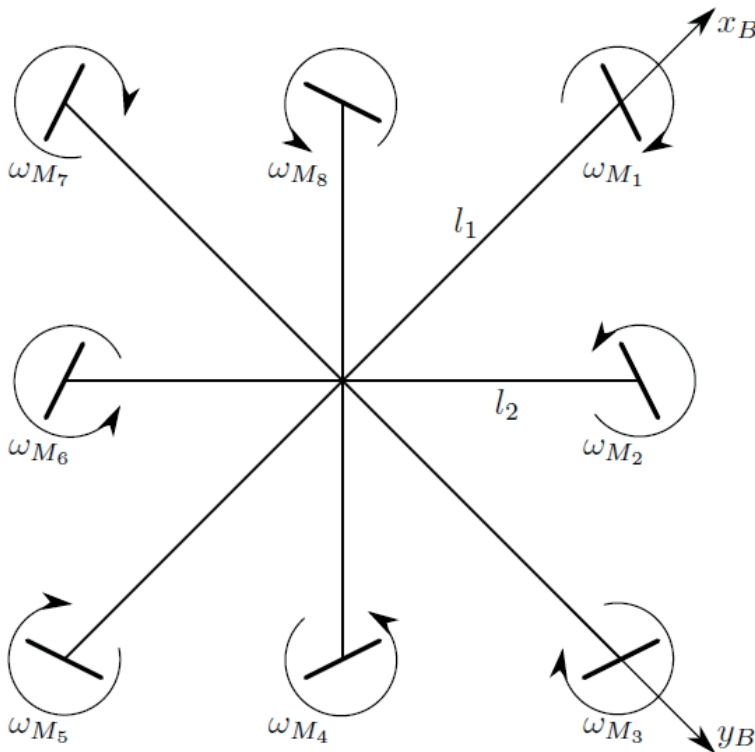


Рис. 2.1.1

Тогда в системе координат **B** (связанной с коптером) векторы центров ВМГ можно записать следующим образом (буква **T** обозначает транспонирование, т. е. векторы координат записываются векторами-столбцами):

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{M1} &= (l_1, 0, 0)^T, \vec{r}_{M2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_2, l_2, 0)^T, \\
 \vec{r}_{M3} &= (0, l_1, 0)^T, \vec{r}_{M4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-l_2, l_2, 0)^T, \\
 \vec{r}_{M5} &= (-l_1, 0, 0)^T, \vec{r}_{M6} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-l_2, -l_2, 0)^T, \\
 \vec{r}_{M7} &= (0, -l_1, 0)^T, \vec{r}_{M8} = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_2, -l_2, 0)^T,
 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

где l_1 – длина луча у 1, 3, 5 и 7-й ВМГ, а l_2 – длина луча у 2, 4, 6 и 8-й ВМГ.

Для того чтобы октокоптер управлялся (хотя бы немного) по курсу, в нашем случае отсутствия реактивного момента двигателей векторы сил тяги каждой ВМГ должны быть немного отклонены от вертикального направления (например, повернуты вокруг каждого луча на небольшой угол порядка $1...5^\circ$, причем в разные стороны – четные в одну, а нечетные в другую). Если обозначить этот угол как γ орты можно получить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_{M1} &= (0, -\sin(\gamma), -\cos(\gamma))^T, \vec{e}_{M2} = \left(-\frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}}, -\cos(\gamma) \right)^T, \\
 \vec{e}_{M3} &= (\sin(\gamma), 0, -\cos(\gamma))^T, \vec{e}_{M4} = \left(-\frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}}, -\cos(\gamma) \right)^T, \\
 \vec{e}_{M5} &= (0, \sin(\gamma), -\cos(\gamma))^T, \vec{e}_{M6} = \left(\frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}}, -\cos(\gamma) \right)^T, \\
 \vec{e}_{M7} &= (-\sin(\gamma), 0, -\cos(\gamma))^T, \vec{e}_{M8} = \left(\frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}}, -\cos(\gamma) \right)^T.
 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

На основе этих геометрических констант (напомним, они являются константами только в системе координат **B**, связанной с коптером) строится весь дальнейший каркас модели, поэтому они важны. В общем случае винтомоторных групп может быть другое количество, направлены они могут быть в других направлениях и располагаться у коптера в других местах. О применяемых системах координат подробно изложено в [1].

4. Рассмотрим силы, которые будут учтены в модели. На коптер действуют:
 - 4.1) сила тяжести. Направлена всегда вниз вдоль оси z_I инерциальной системы координат **I**. Сила тяжести – это постоянная по модулю величина, зависит только от массы коптера. Масса коптера принимается постоянной и не меняется (хотя в процессе моделирования ее можно будет менять, имитируя, например, дополнительный полезный груз, навешенный на коптер). По направлению сила тяжести – переменна, если рассматривать ее в связанной системе координат **B**;

4.2) силы тяги ВМГ. Их всего 8, направлены вдоль своих направлений, модуль каждой силы вычисляется в зависимости от угловой скорости вращения соответствующей ВМГ:

$$F_{M_i}(t) = C_T \cdot \omega_i^2(t), i = 1 \dots 8. \quad (2.1.4)$$

Направления сил тяги определены и неизменны в относительной системе координат **B**;

4.3) сила сопротивления воздуха (возможно, с учетом ветра) – моделируется как состоящая из двух компонент. Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна плотности воздуха, квадрату линейной скорости объекта относительно воздуха и характерной площади сечения в выбранном направлении (коэффициент формы). Сила ветра – внешняя возмущающая сила, задается произвольным образом или при помощи дополнительной «модели ветра» (в настоящей методике подробно не рассматривается);

4.4) внешняя сила или возмущение – произвольное внешнее воздействие. В модели такая возможность заложена как простой способ в дальнейшем проверять на устойчивость регуляторы по каждому из направлений.

5. Рассмотрим моменты сил, учитываемые в модели:

5.1) реактивный момент двигателей ВМГ. В нашей модели он равен нулю из-за парности двигателей и винтов в каждой ВМГ, в общем случае его следует учитывать. В некоторых аппаратах этот момент используется для управления по курсу;

5.2) явление прецессии. В рассматриваемой модели он нулевой, так как винтомоторные группы, вращающиеся в разных направлениях на одной оси, будут давать противоположные моменты прецессии, равные по абсолютной величине. В общем случае его тоже нужно считать;

5.3) момент сопротивления воздуха – аналогично силе сопротивления воздуха прямо пропорционален плотности воздуха, квадрату угловой скорости коптера и коэффициенту формы;

5.4) опрокидывающий момент от ветровой нагрузки (подробно не рассматривается);

5.5) внешний возмущающий момент произвольного направления и величины – используется для отладки регуляторов;

5.6) моменты от сил тяги ВМГ. Поскольку винты расположены не в центре масс коптера, каждый из них будет создавать свой поворотный момент. Это, пожалуй, основной фактор, который используется для управления ориентацией коптера в пространстве.

Как принято в теории управления, архитектуру модели объекта можно условно разделить на две части: а) модель динамики объекта, т. е. самого октокоптера, – модель его движения в пространстве под действием сил и моментов безотносительно управления; б) модель системы управления – определенная логика и алгоритмы управления, регуляторы, поддерживающие в заданном значении измеряемые величины.

В создаваемой модели октокоптера можно выделить как эти две составные части – основу модели, так и еще некоторые, а именно: в) базу сигналов, в ко-

торой будут храниться постоянные и переменные именованные величины, которые могут быть использованы (считано текущее значение) в любой части модели и определены в каком-то одном (и только одном) месте модели; г) макет пульта управления со своими сущностями – кнопками, отображающими элементами и т. п.; д) техническую анимацию, отображающую в динамике основные элементы и текущие параметры модели октокоптера.

Итого в дальнейшем будем последовательно рассматривать и создавать пять элементов: модель объекта, модель системы управления, базу сигналов, макет пульта, техническую анимацию. База сигналов будет пополняться сигналами по мере необходимости, поэтому ее создание разнесено по всей второй части методики. Макет пульта и анимация сделаны в рамках одной главы, так как этот вид работы больше связан с анимацией и графическими примитивами, чем с набором расчетных схем.

Нелинейные уравнения динамики октокоптера

3

С учетом принятых допущений и того факта, что коптер моделируется как единое твердое тело, основа модели динамики коптера очень проста – это второй закон Ньютона, который в векторной форме выглядит следующим образом, всего два простых уравнения (3.1.1) и (3.1.2):

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(t), \quad (3.1.1)$$

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \vec{M}(t), \quad (3.1.2)$$

где $\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t)$ – импульс коптера, $\vec{L}(t) = I(t) \cdot \vec{\omega}(t)$ – момент импульса коптера, m – его масса, $I(t)$ – тензор инерции (линейный оператор момента инерции).

$\vec{F}(t)$ и $\vec{M}(t)$ суть суммы всех сил и всех моментов, действующих на коптер.

Легко видеть, что все было бы очень просто и очевидно, если бы правые части были небольшими, а тензор инерции не зависел бы от ориентации коптера (как если бы коптер был шаром). Но из-за вращения коптера, а также из-за обилия сил и моментов конечные уравнения, записанные в инерциальной системе координат, получатся очень громоздкими даже без учета прецессии и реактивных моментов ВМГ. Поэтому используется следующий математический прием – уравнения, записанные в инерциальной системе координат, переводятся в систему координат \mathbf{B} , связанную с коптером, в которой слагаемые правой части (их запись) получается гораздо более лаконичной и удобной. Подробнее этот прием описан в [1], приведем здесь лишь основные соотношения.

Подставив в приведенные уравнения второго закона Ньютона (3.1.1) и (3.1.2) значения для импульса и момента импульса коптера, для инерциальной системы координат получим более подробную их запись (3.1.3) и (3.1.4):

$$\frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}_i(t), \quad (3.1.3)$$

$$\frac{d\overline{\omega}_I(t)}{dt} = I_I^{-1} \left(\overline{M}_I(t) - \frac{dI_I}{dt} \cdot \overline{\omega}_I(t) \right). \quad (3.1.4)$$

В этих уравнениях математически очень сложны правые части, а аналогичные уравнения динамики в связанной системе координат **V** (где правые части более просты) не могут быть получены так легко, поскольку система координат, связанная с коптером, вращается.

В математике есть два основных подхода к преобразованию векторов из одной системы координат в другую и обратно – матрицы поворота и кватернионы. Последние более универсальны, первые – проще. В настоящей методике и модели используются матрицы поворота. Если ориентацию коптера представить тремя углами: крена φ (roll), тангажа θ (pitch) и рыскания/курса ψ (yaw), а матрицы преобразования из системы **I** в **V** и обратно обозначить как R_{IV} и $R_{VI} = R_{IV}^T$, то любой вектор, записанный для системы координат **I**, можно перевести в систему координат **V**, и наоборот, используя умножение соответствующей матрицы на вектор, например для вектора суммы сил: $\overline{F}_I(t) = R_{VI} \overline{F}_V(t)$, или $\overline{F}_V(t) = R_{IV} \overline{F}_I(t)$.

Чтобы лучше понимать написанное далее в методике, прокомментируем еще раз, как понимать матрицы поворота и вектора в пространстве: система координат **I** неподвижна, относительно нее летает и вращается коптер, а вместе с ним и связанная система координат **V**. Просуммировав все силы, которые

действуют на коптер, можно получить вектор $\overline{F}(t)$ (аналогично и с моментом сил), и в каждый момент времени он является вектором с вполне определенной длиной и направлением в пространстве. Но раскладывая его на проекции по осям – в разных системах координат мы получим разные величины проекций. Все, что делает матрица поворота, – переводит одни проекции вектора в другие, при этом сам вектор никуда не поворачивается и не изменяет своей длины в выбранный момент времени. Если проекции сравнить с тенями вектора, то матрицы поворота преобразуют одни тени в другие, все. Больше они ничего не делают и сложностей, кроме вычислительных, не представляют.

Нам они нужны только из-за того, что вычислять и суммировать силы и моменты сил, действующие на коптер, гораздо проще в связанной системе координат **V**. В ней же проще провести численное интегрирование уравнений, чтобы получить величины угловой и линейной скоростей коптера $\overline{\omega}_V(t)$ и $\overline{v}_V(t)$ (в связанной системе координат), а потом обратной матрицей поворота вычислить (алгебраически – матрицы поворота это простые уравнения) эти же скорости для инерциальной системы координат **I** и там уже, интегрируя дальше, вычислить линейные и угловые координаты коптера в инерциальном пространстве.

Приведем используемое выражение для матрицы поворота из системы **I** в **V**, записав для краткости функции косинуса и синуса как $\cos() = c()$ и $\sin() = s()$:

$$R_{IB} = \begin{pmatrix} c(\theta) \cdot c(\psi) & c(\theta) \cdot s(\psi) & -s(\theta) \\ s(\varphi) \cdot s(\theta) \cdot c(\psi) - c(\varphi) \cdot s(\psi) & s(\varphi) \cdot s(\theta) \cdot s(\psi) + c(\varphi) \cdot c(\psi) & s(\varphi) \cdot c(\theta) \\ c(\varphi) \cdot s(\theta) \cdot c(\psi) + s(\varphi) \cdot s(\psi) & s(\varphi) \cdot s(\theta) \cdot s(\psi) - s(\varphi) \cdot c(\psi) & c(\varphi) \cdot c(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

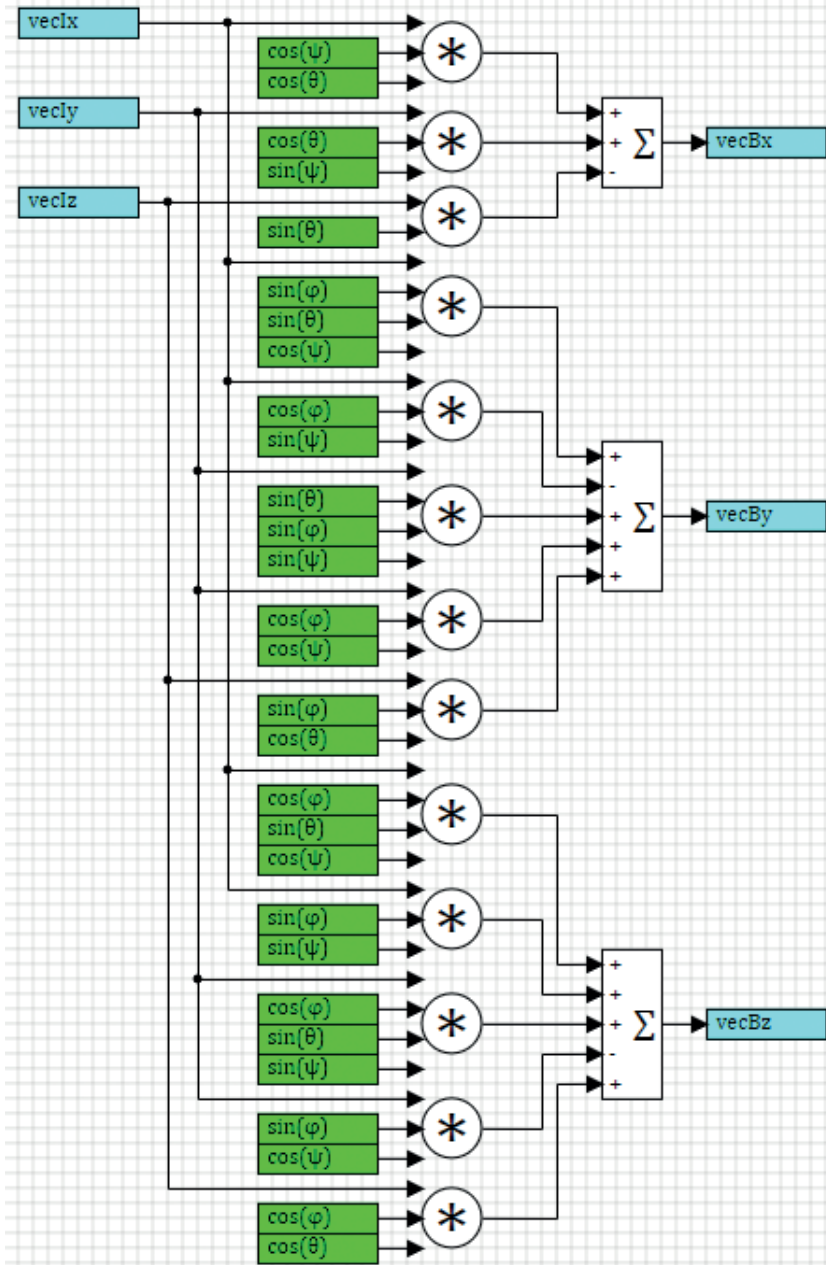


Рис. 3.1.1. Матрица поворота из системы I в систему координат B

Отметим еще раз, что в каждый момент времени эта матрица, очевидно, будет получаться разной, так как меняются углы ориентации коптера. Но это просто алгебраические вычисления, без дифференциальных уравнений. Сама матрица не константа, у нее есть производная по времени.

Реализованная методом структурного моделирования, матрица в среде SimInTech выглядит, как показано на рис. 3.1.1.

Тогда для вектора линейной скорости можно записать: $\overline{\mathbf{v}}_B(t) = \mathbf{R}_{IB} \overline{\mathbf{v}}_I(t)$,

а для момента импульса $\overline{\mathbf{L}}_B(t) = \mathbf{R}_{IB} \overline{\mathbf{L}}_I(t)$. Опуская промежуточные выкладки (в том числе производную матрицы поворота, которая получается равной в итоге векторному произведению угловой скорости объекта на саму матрицу поворота, взятому с обратным знаком), для первого из рассматриваемых уравнений динамики (3.1.3) получим следующее выражение (3.1.6) в связанной с коптером системе координат **B**:

$$\frac{d\overline{\mathbf{v}}_B(t)}{dt} = -\overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t) \times \overline{\mathbf{v}}_B(t) + \frac{1}{m} \overline{\mathbf{F}}_B(t), \quad (3.1.6)$$

а для второго уравнения (3.1.4), учитывая, что $\overline{\mathbf{L}}_B(t) = I_B \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t)$, и так как во вращающейся связанной системе координат тензор инерции константа и его

производная по времени равна нулю, а $\frac{d\overline{\mathbf{L}}_B(t)}{dt} = I_B \cdot \frac{d\overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t)}{dt}$, получим:

$$\frac{d\overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t)}{dt} = I_B^{-1} \left(\overline{\mathbf{M}}_B(t) - \overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t) \times (I_B \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t)) \right). \quad (3.1.7)$$

Итого запись II закона Ньютона для вращающейся системы **B**, по сравнению с исходными уравнениями (3.1.3 и 3.1.4), дополнилась двумя векторными произведениями.

Переменными состояния коптера в такой записи являются две векторных величины (или 6 скалярных), а именно: вектор линейной скорости и вектор угловой скорости. Алгебраически это будет 6 переменных – три проекции линейной скорости и три проекции угловой скорости. И мы имеем записанную в форме Коши систему из 6 нелинейных уравнений первого порядка, которую легко можно реализовать в среде SimInTech и успешно решить ее тем или иным методом интегрирования.

Получив значения скоростей коптера (сначала в системе **B**), их можно матрицей обратного поворота преобразовать к системе **I**, еще раз проинтегрировать и получить уже значения координат и, следовательно, положение объекта в пространстве, в инерциальной системе координат **I**.

Единственное, что мы еще не сделали по уравнениям, – не записали выражения для сил и моментов, действующих на коптер. Сделаем это ниже, в системе координат **B**. Согласно допущениям предыдущего раздела, учитываем и обозначим индексами: **M** – работу двигателей, только в части создаваемой

силы тяги и моментов от нее, \mathbf{D} – силу сопротивления воздуха (вместе с ветром), \mathbf{O} – внешнее возмущение, вообще говоря, нулевое и задаваемое произвольно оператором модели, силу тяжести (последняя поворотного момента сил не создает):

$$\overline{\mathbf{F}}_B(t) = \overline{\mathbf{F}}_M(t) + \overline{\mathbf{F}}_D(t) + \overline{\mathbf{F}}_O(t) + mg\mathbf{R}_{IB}\overline{\mathbf{e}}_{Iz}, \quad (3.1.8)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_B(t) = \overline{\mathbf{M}}_M(t) + \overline{\mathbf{M}}_D(t) + \overline{\mathbf{M}}_O(t). \quad (3.1.9)$$

Сила тяжести в связанной системе координат будет «поворачиваться» в зависимости от ориентации коптера.

Распишем подробнее, чему равны слагаемые.

Сила тяги:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}}_M(t) = & C_T \cdot \omega_{M1}^2(t) \cdot \overline{\mathbf{e}}_{M1} + C_T \cdot \omega_{M2}^2(t) \cdot \overline{\mathbf{e}}_{M2} + C_T \cdot \omega_{M3}^2(t) \cdot \overline{\mathbf{e}}_{M3} + \\ & C_T \cdot \omega_{M4}^2(t) \cdot \overline{\mathbf{e}}_{M4} + C_T \cdot \omega_{M5}^2(t) \cdot \overline{\mathbf{e}}_{M5} + C_T \cdot \omega_{M6}^2(t) \cdot \overline{\mathbf{e}}_{M6} + \\ & C_T \cdot \omega_{M7}^2(t) \cdot \overline{\mathbf{e}}_{M7} + C_T \cdot \omega_{M8}^2(t) \cdot \overline{\mathbf{e}}_{M8}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Здесь уже фигурируют угловые скорости вращения ВМГ, а не коптера. Напомним, что орты сил тяги у нас записаны для системы координат \mathbf{B} и там являются константами – очевидно, что их можно вычислить 1 раз, общий коэффициент вынести здесь за скобку и сильно упростить вычисления. Если бы мы записывали уравнения динамики в системе \mathbf{I} , то данное выражение обросло бы еще 8 умножениями на матрицу поворота каждого орта, и это пришлось бы считать на каждом шаге расчета.

Сила сопротивления воздуха (при отсутствии ветра):

$$\overline{\mathbf{F}}_D(t) = -0.5\rho \cdot C_D \cdot \begin{pmatrix} A_{yz} \cdot v_x \cdot |v_x| \\ A_{xz} \cdot v_y \cdot |v_y| \\ A_{xy} \cdot v_z \cdot |v_z| \end{pmatrix}. \quad (3.1.11)$$

Внешнее возмущение: нулевое. По желанию пользователя модели он может сам установить то или иное значение позже, до расчета, или в процессе моделирования.

Момент сил тяги двигателей запишем как:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}_M(t) = & \overline{r}_{M1} \times \overline{e}_{M1} \cdot C_T \cdot \omega_{M1}^2(t) + \overline{r}_{M2} \times \overline{e}_{M2} \cdot C_T \cdot \omega_{M2}^2(t) + \\ & \overline{r}_{M3} \times \overline{e}_{M3} \cdot C_T \cdot \omega_{M3}^2(t) + \overline{r}_{M4} \times \overline{e}_{M4} \cdot C_T \cdot \omega_{M4}^2(t) + \\ & \overline{r}_{M5} \times \overline{e}_{M5} \cdot C_T \cdot \omega_{M5}^2(t) + \overline{r}_{M6} \times \overline{e}_{M6} \cdot C_T \cdot \omega_{M6}^2(t) + \\ & \overline{r}_{M7} \times \overline{e}_{M7} \cdot C_T \cdot \omega_{M7}^2(t) + \overline{r}_{M8} \times \overline{e}_{M8} \cdot C_T \cdot \omega_{M8}^2(t). \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Момент сопротивления воздуха:

$$\overline{\mathbf{M}}_D(t) = -0.5\rho \cdot C_D \cdot \begin{pmatrix} A_{xy} \cdot \omega_x \cdot |\omega_x| \cdot l_x \\ A_{xy} \cdot \omega_y \cdot |\omega_y| \cdot l_y \\ 8A_{yz} \cdot \omega_z \cdot |\omega_z| \cdot l_z \end{pmatrix}. \quad (3.1.13)$$

Еще раз отметим, что расчет прецессии и реактивных моментов ВМГ в данной методике для краткости изложения опущен.

Чтобы не ошибиться при переходе от векторных уравнений к скалярным, записанным по осям, проще воспользоваться пакетом типа MathCAD или Maple, в котором большинство преобразований можно выполнить автоматизированно, в символьном виде и получить требуемые 6 уравнений динамики, записанные по осям подвижной системы координат **B**.

В наиболее компактной форме полученные и решаемые уравнения динамики выглядят так:

$$\frac{d\overline{\mathbf{v}}_B(t)}{dt} = \frac{1}{m}(\overline{\mathbf{F}}_M(t) + \overline{\mathbf{F}}_D(t) + \overline{\mathbf{F}}_O(t)) + g\mathbf{R}_{IB} \mathbf{e}_{Iz} - \overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t) \times \overline{\mathbf{v}}_B(t), \quad (3.1.14)$$

$$\frac{d\overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t)}{dt} = I_B^{-1}(\overline{\mathbf{M}}_M(t) + \overline{\mathbf{M}}_D(t) - \overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t) \times (I_B \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t))). \quad (3.1.15)$$

Интегрируя их и получив значения скоростей в системе **B**, можно посчитать скорость и углы ориентации в инерциальной системе координат **I**:

$$\overline{\mathbf{v}}_I(t) = \mathbf{R}_{BI} \overline{\mathbf{v}}_B(t), \quad (3.1.16)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{BI} \overline{\boldsymbol{\omega}}_B(t). \quad (3.1.17)$$

\mathbf{W}_{BI} – матрица преобразования из угловой скорости коптера в связанной системе координат, в скорости поворота по углам Эйлера (подробнее см. в [1]).

В следующем разделе показан один из вариантов реализации этой системы уравнений в среде SimInTech как готовое решение. Пошаговое выполнение будет приведено позже, в последних разделах методики.

Архитектура решения уравнений динамики в SimInTech

4

Переходим к самому интересному – к реализации полученных уравнений динамики средствами среды динамического моделирования SimInTech. Как известно, любую задачу можно всегда решить несколькими способами, и чем она сложнее и многомернее, тем больше количество способов. В настоящей методике предложен один из вариантов решения, он не единственный, и в некоторых местах не самый оптимальный. Выбор решения определялся простотой реализации, с одной стороны, и удобством для методичного рассказа – с другой.

Итак, что мы получили с точки зрения математики – в системе координат \mathbf{B} мы имеем 2 векторных дифференциальных уравнения (3.1.14) и (3.1.15), которые при переходе к проекциям (и скалярным уравнениям) дают 6 нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно 6 переменных: трех скоростей и трех угловых скоростей. Это так называемая 6DOF задача, т. е. задача с шестью степенями свободы. Сначала можно подумать, что раз у коптера имеется 6 степеней свободы, то должно быть и 6 переменных состояния (дифференциальных переменных). Но это так только на первый взгляд. Кроме скоростей, нам придется получить еще и координаты (три линейных и три угла положения в пространстве) – для чего еще раз проинтегрировать скорости. Таким образом, всего у коптера есть 12 степеней свободы. А если учесть еще то, что правые части дифференциальных уравнений есть не что иное, как ускорения коптера по осям, то получим как бы 18 степеней свободы. Это важно понимать, так как в дальнейшем для построения регулятора нам потребуются все 12 фазовых координат объекта плюс еще 6 измеренных (в нашем случае – вычисленных) ускорений коптера.

4.1. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СТРУКТУРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Напомним еще раз, что индексами M, D, O в уравнениях (3.1.14) и (3.1.15) обозначены силы и моменты: M – от двигателей и винтов ВМГ, D – от сопротивления воздуха, O – внешние возмущающие силы и моменты. Для реализации уравнений в SimInTech необходимо указанные векторные уравнения спроецировать на оси x_B, y_B, z_B связанной системы координат \mathbf{B} . Легко видеть, что при этом получится следующая система дифференциальных уравнений (4.1.1) для скалярных величин линейных и угловых скоростей по осям.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru