ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Авторы надеются, что данное пособие поможет студентам в овладении методами теории кратных интегралов, в их самостоятельной работе над предметом. Они также выражают надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

Определение двойного интеграла

К понятию двойного интеграла мы приходим, решая конкретную задачу вычисления объ ема цилиндрического тела.

Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное плоскостью $z \doteq 0$, некоторой поверхностью $z = f(x; y), (x; y) \in G$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которой служит контур ℓ области G (рис. 1.1). Область G изменения переменных x и y называется ***основанием*** цилиндрического тела.

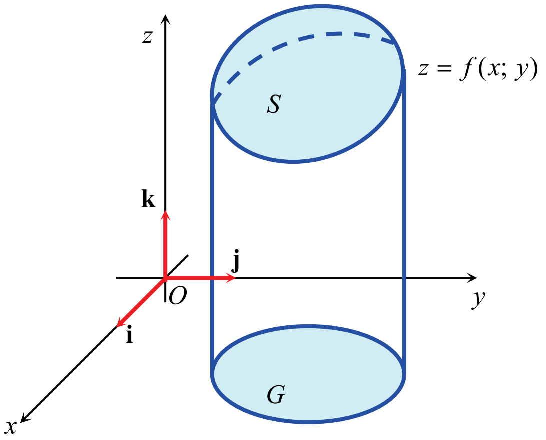


Рис. 1.1

При определении объема будем исходить из двух принципов:

1) если разбить тело на части, то его объем равен сумме объемов всех частей (свойство ***аддитивности***);

2) объем прямого цилиндра, ограниченного плоскостью $z = const$ параллельной плоскости Oxy, равен площади основания, умноженной на высоту.

В дальнейшем мы будем предполагать, что область G является

- ***связной*** (состоит из одного куска),
- ***квадрируемой*** (т.е. имеет площадь)
- и ***ограниченной*** (т.е. расположенной внутри некоторого круга с центром в начале координат).

Пусть $z = f(x; y) -$ непрерывная функция точки $M(x; y)$ в области G и $f(x; y) \geq 0$ всюду в области G, т.е. что рассматриваемая цилиндрическая поверхность целиком лежит над плоскостью Oxy. Обозначим объем цилиндрического тела через V.

Разобьем область G основание цилиндрического тела – на некоторое число n непересекающихся квадрируемых областей произвольной формы; будем называть их ***частичными областями***. Пронумеровав частичные области в каком-нибудь порядке, обозначим их через $G_1, G_2, \cdots, G_n$, а их площади –через $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$ соответственно. Обозначим диаметр частичной области G_n через d_n, а наибольший из этих *диаметров* - через λ_n.

Очевидно, если $n \to \infty$, то $\lambda_n \to 0$.

Проведем через границу каждой частичной области цилиндрическую поверхность с образующими параллельными оси Oz. В результате цилиндрическое тело окажется разбитым на n частичных цилиндрических тел.

Заменим k-ое частичное тело прямым цилиндром с тем же основанием и высотой, равной аппликате какой-нибудь точки заменяемой поверхности (рис. 1.2).

Объем такого цилиндра равен $\Delta V_k = f(M_k)\Delta S_k$, где точка $M_k(x_k, y_k) \in G_k$, а $\Delta S_k -$ площадь области G_k. Проделав описанные построения для каждого частичного цилиндрического тела, получим n-ступенчатое тело, объем которого

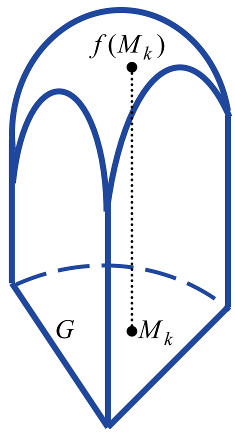


Рис. 1.2

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)S_k. \qquad (1.1)$$

Интуитивно ясно, что V_n тем точнее выражает объем V, чем меньше размеры частичных областей G_k. Принимаем объем V цилиндрического тела равным пределу, к которому стремится объем (1.1) n-ступенчатого тела при $n \to \infty$ и стремлении к нулю наибольшего диаметра λ_n частичных областей G_k. Естественно, предел не должен зависеть от вида разбиения области G на частичные области G_k и от выбора точек M_k в частичных областях.

Пусть $f(x;y)$ – произвольная функция, заданная в области G. Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)S_k \qquad (1.1)$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x;y)$ по области G, соответствующей данному разбиению этой области на n частичных областей и данному выбору точек $M_k(x_k, y_k)$ на частичных областях G_k.

Определение. Если при $\lambda_n \to 0$ существует предел интегральных сумм, $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k$, не зависящий ни от **способа разбиения** области G на частичные области, ни от **выбора точек** M_k в частичных областях, то он называется ***двойным интегралом от функции*** $f(M)$ (или $f(x;y)$) ***по области*** G и **обозначается** символом

$\iint_G f(M)dS$, или $\iint_G f(x;y)dxdy$. Итак,

$$\iint_G f(M)dS = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k. \qquad (1.2)$$

Сама функция $f(x;y)$ при этом называется ***интегрируемой в области*** G. Здесь $f(M)$ – ***подынтегральная функция***, $f(M)$ – ***подынтегральное выражение***, dS – ***дифференциал*** (или ***элемент***), область G – ***область интегрирования***. Точка $M(x;y)$ – ***переменная точка интегрирования***.

Возвращаясь к цилиндрическому телу, заключаем: объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостью Oxy $(z = 0)$, поверхностью z= $(x;y)$ $(f(x;y) \geq 0)$, $(x;y) \in G$, и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, равен двойному интегралу от функции $f(x;y)$ по области G, являющейся основанием цилиндрического тела

$$V = \iint_G f(M)dS, \text{ или } \iint_G f(x;y)dxdy.$$

Здесь $dxdy$ – элемент площади в декартовых координатах. Таков ***геометрический смысл*** двойного интеграла от неотрицательной функции.

Если $f(M) \leq 0$ в G, то объем $V = -\iint_G f(M)dS$. Если в области G функция $f(M)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то интеграл $\iint_G f(M)dS$, представляет алгебраическую сумму объемов тех частей тела, которые расположены над плоскостью Oxy (берутся со знаком «+»), и тех частей тела, которые расположены под плоскостью Oxy (берутся со знаком «–»).

К составлению сумм вида (1.1) для функции двух независимых переменных и к последующему предельному переходу приводят самые разнообразные задачи, а не только задача об объеме цилиндрического тела.

Сформулируем достаточные условия интегрируемости.

Теорема 1.1. *Всякая функция $f(x;y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области G, интегрируема в этой области.*

Требованием непрерывности подынтегральной функции часто оказывается слишком стеснительным. Для приложений важна следующая теорема, гарантирующая существование двойного интеграла для некоторого класса разрывных функций.

Будем говорить, что некоторое множество точек плоскости, имеет ***площадь нуль***, если его можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади.

Теорема 1.2. *Если функция $f(x;y)$ ограничена в замкнутой ограниченной области E и непрерывна всюду в области G, кроме некоторого множества точек площади нуль, то эта функция интегрируема в области G.*

2. Основные свойства двойного интеграла

Двойные интегралы обладают рядом свойств, аналогичных свойствам определенного интеграла для функций одной независимой переменной.

2.1. Линейное свойство

1. Если $c -$ произвольное число и функция $f(M)$ интегрируема в области G, то функция $cf(M)$ тоже интегрируема в области G и $\iint_G cf(M)dS = c\iint_G f(M)dS$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

▲ Действительно $\iint_G cf(M)dS = \lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=1}^n cf(M_k)\Delta S_k = c\sum_{k=1}^n f(M_k)\Delta S_k = c\iint_G f(M)dS$.▼

2. Если функции $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы в области G, то интегрируемы в ней их сумма и разность, причем $\iint_G\big(f(M)\pm g(M)\big)dS = \iint_G f(M)dS \pm \iint_G g(M)dS$.

▲ Действительно, это равенство получается в результате предельного перехода при $\lambda_n \to 0$ в соотношении $\sum_{k=1}^n\big(f(M_k)\pm g(M_k)\big)\Delta S_k = \sum_{k=1}^n f(M_k)\Delta S_k \pm \sum_{k=1}^n g(M_k)\Delta S_k$.▼

3. Если функции $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы в области G, а α и β любые вещественные числа, то функция $\alpha f(M_k) \pm \beta g(M_k)$ также интегрируема в области G, причем

$$\iint_E\big(\alpha f(M)\pm\beta g(M)\big)dS = \alpha\iint\limits_E f(M)dS \pm \beta\iint\limits_E g(M)dS. \qquad 2.1)$$

2.2. Интегрирование неравенств

Если функции $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы в области G и всюду в этой области $f(M) \le g(M)$, то

$$\iint_G f(M)dS \le \iint_G g(M)dS, \qquad (2.2)$$

т.е. неравенства можно интегрировать.

В частности, интегрируя очевидные неравенства $-|f(M)| \le f(M) \le |f(M)|$, получим

$$-\iint_G|f(M)|dS \le \iint_G f(M)dS \le \iint_G|f(M)|dS, \text{ или, что тоже,}$$

$$\left|\iint\limits_G f(M)dS\right| \le \iint\limits_G |f(M)|dS.$$

2.3. Площадь плоской области

Площадь плоской области G равна двойному интегралу по этой области от функции, тождественно равной единице $S = \iint_G dS$. (2.3)

▲ Действительно, интегральная сумма для функции $f(M) \equiv 1$ в области G имеет вид

$$\sum_{k=1}^n 1\cdot\Delta S_k$$

и при любом разбиении области G на частичные области G_k равна ее площади S. Но тогда и предел этой суммы, т.е. двойной интеграл, равен площади S области G. ▼

2.4. Оценка интеграла

Пусть функция $f(N)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G, пусть M и m — наибольшее и наименьшее значения $f(N)$ в области G и S — ее площадь. Тогда

$$mS \le \iint_G f(N)dS \le MS. \tag{2.4}$$

2.5. Аддитивность

Если функция $f(M)$ интегрируема в области G и область G разбита на две области G_1 и G_2 без общих внутренних точек, то $f(M)$ интегрируема на каждой из областей G_1 и G_2, причем

$$\iint_G f(M)dS = \iint_{G_1} f(M)dS + \iint_{G_2} f(M)dS \tag{2.5}$$

2.6. Теорема о среднем значении

Теорема 2.1 (о среднем значении). *Если функция $f(N)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области G, то найдется, по крайней мере, одна точка C области G такая, что будет справедлива формула*

$$\iint_G f(N)dS = f(C)S, \tag{2.6}$$

где S — площадь области G.

▲ В самом деле, так как функция $f(N)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области G, то она принимает в G свое наибольшее значение M и свое наименьшее значение m. По свойству 2.4 об оценке интеграла имеем $mS \le \iint_G f(N)dS \le MS$ откуда $m \le \frac{1}{S}\iint_G f(N)dS \le M$.

Таким образом, число $\frac{1}{S}\iint_G f(N)dS$ заключено между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(N)$ в области G. В силу непрерывности функции $f(N)$ в области G она принимает в некоторой точке $C \in G$ значение, равное этому числу,

$$f(C) = \frac{1}{S}\iint_G f(N)dS, \tag{2.7}$$

откуда $\iint_G f(N)dS = f(C)S$. ▼ Значение $f(C)$, определяемое по формуле (2.7), называется ***средним значением функции $f(N)$ в области*** .

Геометрический смысл теоремы о среднем

Если в области G функция $f(N) \ge 0$, то формула (2.6) означает, что существует прямой цилиндр с основанием G (площадь которого равна S) и высотой $H = f(C)$, объем которого равен объему цилиндрического тела (рис. 2.1).

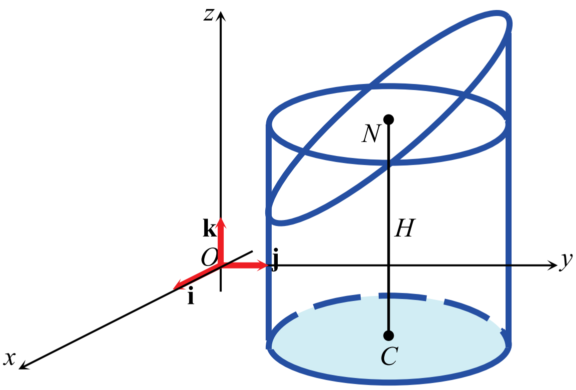


Рис. 2.1

3. Сведение двойного интеграла к повторному интегралу

Одним из эффективных способов вычисления двойного интеграла является сведение его к повторному интегралу.

3.1. Случай прямоугольника

Пусть область G − замкнутый прямоугольник D со сторонами, параллельными осям координат $D = \{a \le x \le b; c \le y \le d\}$. Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна в прямоугольнике D и принимает в нем неотрицательные значения.

Тогда двойной интеграл $\iint_D f(x;y)dxdy$ равен (алгебраическому) объему цилиндрического тела с основанием D, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y)$, с боков – ми $x = a, x = b, y = c, y = d$.

С другой стороны, рассматривая соответствующее цилиндрическое тело, проведем плоскость $y = y_0, c \le y_0 \le d$ перпендикулярную оси Oy (рис. 3.1).

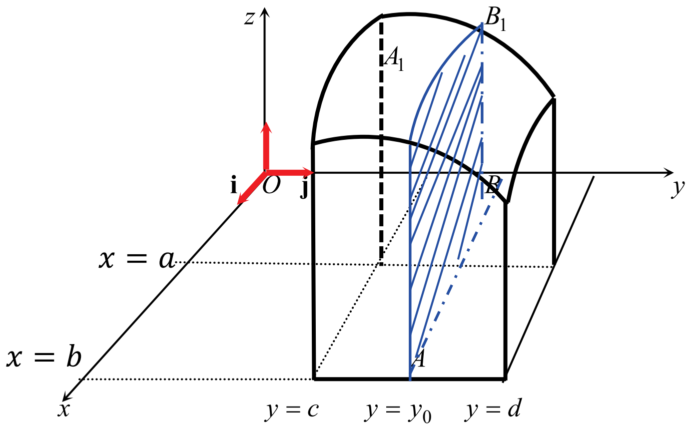


Рис. 3.1

Эта плоскость рассечет цилиндрическое тело по криволинейной трапеции AA_1B_1B, ограниченной сверху плоской линией z, описываемой уравнениями $\begin{cases} y = y_0, \\ z = f(x;y_0) \end{cases}$ площадь ции AA_1B_1B выражается интегралом

$$\int_a^b f(x;y_0)dx. \tag{3.1}$$

где интегрирование производится по переменной x, а y_0 − второй аргумент подынтегральной функции – рассматривается при этом как постоянный $(c \le y_0 \le d)$. Величина интеграла (3.1) зависит от выбора значения y_0. Положим

$$S(y) = \int_a^b f(x;y)dx. \tag{3.2}$$

Выражение (3.2) дает площадь поперечного сечения цилиндрического тела как функции от переменной y. Поэтому объем цилиндрического тела можно вычислить по формуле

$$V = \int_c^d S(y)dy.$$

С другой стороны, этот объем выражается двойным интегралом от функции $f(x;y)$ по прямоугольнику D. Значит, $\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d S(y)dy$.

Заменяя $S(y)$ его выражением (3.2), получим

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x;y)dx \right) dy.$$

Итак, вычисление двойного интеграла свелось к вычислению двух определенных интегралов; при вычислении «внутреннего интеграла» (записанного в скобках) y считается постоянным. Последнее соотношение обычно записывается так

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx. \tag{3.3}$$

Объем цилиндрического тела можно отыскать также по площадям сечений плоскостями $x = x_0$. Это приводит к формуле

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy. \tag{3.4}$$

Каждое из выражений, стоящих в правых частях формул (3.3) и (3.4), содержит две последовательные операции обыкновенного интегрирования функции $f(x;y)$. Они называются ***повторными интегралами от функции*** $f(x;y)$ ***по области*** D.

Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике D, то переход к повторным интегралам всегда возможен и

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx, \qquad (3.5)$$

т.е. значения повторных интегралов от непрерывной функции $f(x;y)$ не зависят от порядка интегрирования.

Пример 3.1. Вычислить $\iint_D xydxdy$, где $D = \{(x;y): 1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2\}$.

▲ Имеем $\iint_D xydxdy = \int_1^2 dy \int_1^2 xydx = \int_1^2 \left(y\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 dy = \int_1^2 \left(2y - \frac{1}{2}y\right) dy = \frac{3}{4}y^2\Big|_1^2 = \frac{9}{4}$. ▲

3.2. Случай криволинейной области

Предположим теперь, что областью интегрирования является произвольная ограниченная квадрируемая замкнутая область G на плоскости Oxy. Чтобы рассмотреть общий случай, введем понятие ***правильной*** (***стандартной***) области.

Определение. Область называется ***правильной*** (***стандартной***) относительно оси Ox (или Oy), если любая горизонтальная (вертикальная) прямая пересекает границу области не более чем в двух точках.
Если область правильная относительно осей Ox и Oy, то она просто называется ***правильной*** областью.

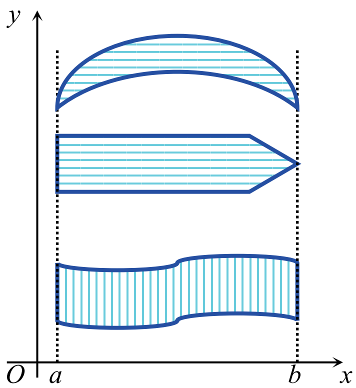


Рис. 3.2

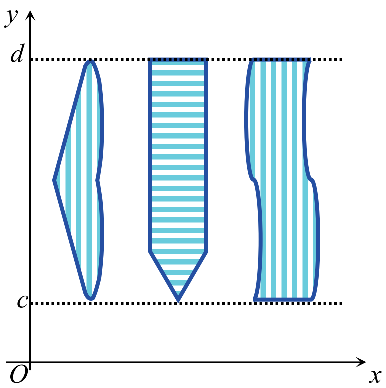


Рис. 3.3

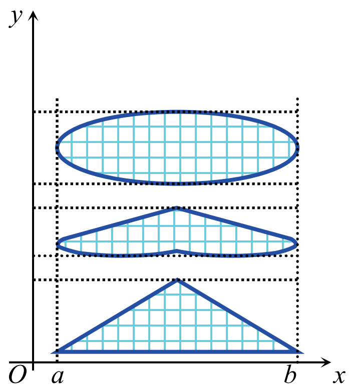


Рис. 3.4

Области на рис. 3.2 – правильные относительно оси Oy, на рис. 3.3 – относительно оси Ox, на рис. 3.4 – правильные. Условимся дальше области, правильные относительно оси Oy. (Ox) штриховать линиями, параллельными оси Oy (Ox).

Область G, правильная относительно оси Oy, может быть записана с помощью неравенств вида

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ f_1(x) \le y \le f_2(x), \end{cases} \qquad (3.6)$$

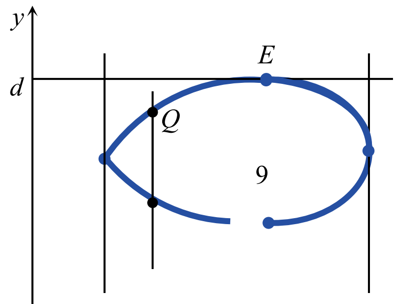
где $f_1(x), f_2(x)$ – соответственно нижняя и верхняя границы области.

Область, правильная относительно оси Ox, записывается с помощью неравенств

$$\begin{cases} \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), \\ c \le y \le d, \end{cases} \qquad (3.7)$$

где $x = \varphi_1(y), x = \varphi_2(y)$ – левая и правая границы области.

Заключим область G внутрь прямоугольника $D = \{a \le x \le b. c \le y \le d\}$ так, как показано на рис.3.5.



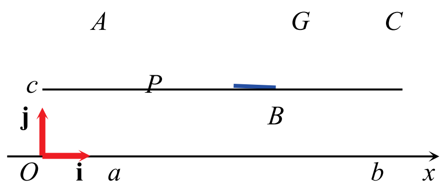


Рис. 3.5

Отрезок $[a;b]$ является ортогональной проекцией области G на ось Ox, а отрезок $[c;d]$ − ортогональной проекцией области G на ось Oy. Точками A и C граница области G разбивается на две кривые ABC и AEC. Каждая из этих кривых пересекается с произвольной прямой, параллельной оси Oy, не более чем в одной точке. Поэтому их уравнения можно записать в форме, разрешенной относительно y:

$$\begin{matrix}(ABC): y = f_1(x), \\ (AEC): y = f_2(x),\end{matrix} \quad a \le x \le b. \tag{3.8}$$

Итак, ограниченная область G является правильной в направлении оси Oy и ограничена сверху графиком функции $y = f_2(x)$, снизу – графиком функции $y = f_1(x)$.
Пусть в области G определена и непрерывна функция $z = f(x;y)$. Введем новую функцию:

$$\varphi(x;y) = \left[\begin{matrix} f(x;y), \text{если } (x;y) \in G, \\ 0, \text{если } (x;y) \in D - G. \end{matrix}\right.$$

Эта функция интегрируема в области G, так как совпадает в ней с функцией $f(x;y)$, и интегрируема в остальной части $D - G$ прямоугольника D, где она равна нулю. Тогда в соответствии со свойством аддитивности двойного интеграла, она интегрируема и по всему прямоугольнику D. При этом

$$\iint_G \varphi(x;y)dxdy = \iint_G f(x;y)dxdy \text{ и} \iint_{D=G} \varphi(x;y)dxdy = 0, \text{ откуда}$$

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_D \varphi(x;y)dxdy. \tag{3.9}$$

На основании формулы (3.4) получаем $\iint_D \varphi(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d \varphi(x;y)dy$.
Поскольку отрезок $[f_1(x); f_2(x)]$ целиком принадлежит области G, значит, $\varphi(x;y) = f(x;y)$ при $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, $\varphi(x;y) = 0$, если y лежит вне этого отрезка, то при фиксированном значении x

$$\int_c^d \varphi(x;y)dy = \int_c^{f_1(x)} \varphi(x;y)dy + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \varphi(x;y)dy + \int_{f_2(x)}^d \varphi(x;y)dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x;y)dy.$$

Следовательно,

$$\iint_D \varphi(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x;y)dy. \tag{3.10}$$

Из формул (3.9) и (3.10) получаем

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x;y)dy. \tag{3.11}$$

Если область G является правильной в направлении оси Ox и определяется ми $\left\{\begin{matrix}\varphi_1(x) \le x \le \varphi_2(x), \\ c \le y \le d,\end{matrix}\right.$ аналогично можно доказать, что

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_c^d dx \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x;y)dx. \tag{3.12}$$

Замечание. Для области G, правильной в направлении осей Ox и Oy, будут выполнены равенства (3.11) и (3.12), поэтому

$$\int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x;y)dy = \int_c^d dx \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x;y)dx. \tag{3.13}$$

По формуле (3.13) осуществляется изменение порядка интегрирования при вычислении соответствующего двойного интеграла.

Сформулируем правила приведения двойного интеграла к повторному интегралу.

Чтобы вычислить двойной интеграл, нужно заменить его повторным интегралом вида (3.11) или (3.12):