ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

В разделе – «Основные теоретические сведения» – приводятся основные теоретические сведения с достаточной полнотой и доказательно (заголовок раздела опускается). Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий.

В разделе – «Опорный конспект» – вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Даются иллюстрирующие примеры, вопросы для самопроверки, решаются типовые задачи. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их физическая и геометрическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

Опорный конспект целесообразен для первичного, быстрого ознакомления с курсом математики, а далее нужно продолжить изучение теорию по разделу «Основные теоретически сведения», где все изложено с достаточной полнотой и доказательно. Опорный конспект полезен и для закрепления изученного материала, для восстановления в памяти нужных понятий при изучении последующих разделов курса и других дисциплин, опирающихся на математику.

В разделе «Вопросы для самопроверки» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого раздела преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В разделе «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение раздела «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Авторы надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами теории кратных интегралов, в их самостоятельной работе над предметом. Они также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Опорный конспект

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

1.1. Некоторые вспомогательные понятия

Приведем определения, которые будут необходимы в дальнейшем. Рассмотрим непустое множество $\mathbf{G}$ точек некоторой плоскости.

Открытый круг радиуса ε с центром в точке M (т.е. совокупность всех точек плоскости, расстояния которых до точки M меньше ε) называется ***ε − окрестностью*** или просто ***окрестностью*** точки M.

Точка M называется ***предельной*** для множества $\mathbf{G}$, если любая окрестность содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathbf{G}$. Предельная точка множества $\mathbf{G}$ может или принадлежать, или не принадлежать этому множеству. Множество $\mathbf{G}$ называется ***связным***, если при любом его разбиении на два непустых множества $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$, по крайней мере одно из них содержит предельную точку другого.

Множество $\mathbf{G}$ называется ***открытым***, если для каждой его точки существует окрестность, все точки которой принадлежат множеству $\mathbf{G}$.

Открытое и связное множество называется ***областью***.

Примеры областей: множество всех точек, лежащих внутри некоторого круга (точки ограничивающей его окружности исключаются!), вся плоскость.

Например, совокупность точек, координаты которых удовлетворяют условию $x^2 + y^2 < 1$, есть область (рис.1.1.1).

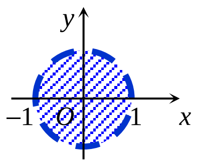

Рис. 1.1.1

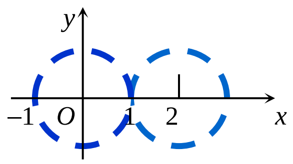

Рис. 1.1.2

Множество, состоящее из двух открытых кругов $x^2 + y^2 < 1$ и $(x-2)^2 + y^2 < 1$, не является областью: оно открыто, но не связано (рис. 1.1.2).

Открытое множество является ***областью*** тогда и только тогда, когда любые две точки его можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей данному множеству.

Точка M называется ***граничной*** для множества $\mathbf{G}$, если ее любая окрестность содержит точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству $\mathbf{G}$. Сама ***граничная точка*** может или принадлежать, или не принадлежать множеству $\mathbf{G}$. В частности, ***открытое множество*** не содержит ни одной своей ***граничной точки***. Совокупность всех ***граничных точек*** множества называется его ***границей***. Множество, содержащее все свои ***граничные точки***, называется ***замкнутым***. Присоединив к некоторой области $\mathbf{G}$ все ее ***граничные точки***, получим множество, называемое ***замкнутой областью*** $\mathbf{G}$.

Множество называется ***ограниченным***, если его можно поместить внутрь некоторого круга достаточно большого радиуса. Ограниченная область $\mathbf{G}$ называется ***односвязной*** или ***многосвязной*** в зависимости от того, является ли ее граница связным или несвязным множеством.

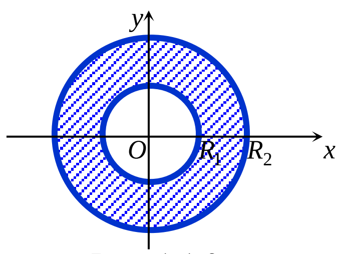

Рис. 1.1.3

Множество точек, лежащих внутри круга радиуса R, является простейшим примером односвязной области. Множество точек, лежащих между двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 − круговое кольцо (точки окружностей исключены!), − пример многосвязной

области. Эта область называется ***двусвязной***. Граница этой области состоит из двух окружностей
радиусов R_1 и R_2. (рис. 1.1.3).
Если внутри некоторой области $\mathbf{G}$ выделить $n-1$ $(n>1)$ замкнутых областей $\mathbf{G_1}, \mathbf{G_2}, \cdots, \mathbf{G_n}$, попарно не имеющих общих точек, то множество всех точек исходной области $\mathbf{G}$, не принадлежащих ни одной из указанных областей, представляет собой ***n-связную область***. Её граница состоит из n линий: линии ℓ, ограничивающей область $\mathbf{G}$, и линий ℓ_k, ограничивающих сти $\mathbf{G}_k$ $(1 \le k \le n-1)$. На рис. 1.1.4 и 1.1.5 изображены четырехсвязные области.

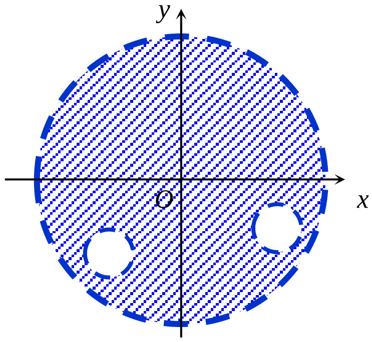

Рис. 1.1.4

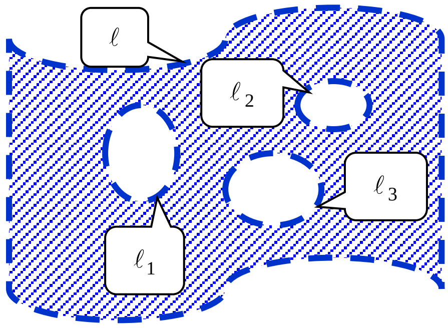

Рис. 1.1.5

Пусть $\mathbf{G}$ — ограниченное множество. Расстояние между двумя его произвольными точками M_1 и M_2 обозначим через $\rho(M_1; M_2)$.

Представим, что точки M_1 и M_2, независимо друг от друга, пробегают все множества $\mathbf{G}$. Очевидно, множество всевозможных расстояний $\rho(M_1; M_2)$ ограниченно сверху (расстояние не может быть больше диаметра круга, в котором помещается множество $\mathbf{G}$).

Точная верхняя грань чисел $\rho(M_1; M_2)$ называется ***диаметром*** $\lambda(\mathbf{G})$ множества $\mathbf{G}$ (см. рис. 1.1.6; диаметром здесь является наибольшая хорда данного множества).

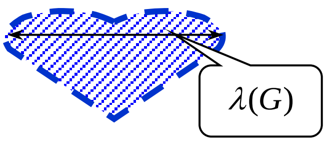

Рис.1.1.6

Плоской фигурой называется некоторое ***ограниченное*** множество точек плоскости.
Аналогично определяется понятие ***области*** и ***фигуры в пространстве***. (В этом случае ***ε-окрестностью*** точки M называют открытый шар радиуса ε с центром в точке M)

1.2. Определение двойного интеграла

Пусть ограниченная функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой замкнутой области G, ограниченной замкнутой линией ℓ, плоскости Oxy. Произведем следующие действия.

1. Разобьем область G ***произвольно*** на конечное число m элементарных (частичных) областей (ячеек) $G_1, G_2, \cdots, G_m$, не имеющих общих внутренних точек, и обозначим площади этих ячеек
$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_m$, а диаметры ячеек (максимальное расстояние между двумя точками на границе ячейки) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. Пусть λ_n — наибольший из диаметров ячеек.
2. Выберем в каждой из этих ячеек G_k ***произвольную*** точку $M_k(x_k; y_k)$ и вычислим значение функции $f(x_k; y_k)$ в этой точке.
3. Значение функции в выбранной точке $f(x_k; y_k)$ $(1 \le k \le m)$ умножим на площадь Δs_k соответствующей элементарной области и все произведения сложим. Полученная сумма вида

$$I_n = \sum_{k=1}^{m} f(x_k; y_k) \Delta s_k, \qquad (1.2.1)$$

называется ***n-й интегральной суммой для функции*** $f(x;y)$ ***по области*** G.

Очевидно, интегральная сумма зависит как от способа разбиения области G на m частичных областей, так и от выбора в них точек M_k.

Вследствие ***произвольного разбиения*** области G на элементарные области G_k и ***случайного выбора в них*** точек M_k можно составить бесчисленное множество указанных сумм.

Однако, согласно теореме существования и единственности, если функция $z = f(x;y)$, например, непрерывна в области G и линия $\ell -$ кусочно-гладкая, то предел всех этих сумм, найденных при условии $\lambda_n \to 0$, всегда существует и единственен.

Если при $\lambda_n \to 0$ существует предел интегральных сумм I_n (1.2.1), не зависящий ни от способа разбиения области G на частичные области, ни от выбора точек M_k в частичных областях, то он называется ***двойным интегралом от функции*** $f(x;y)$ по области G.

Обозначение: $\iint_G f(x;y)ds$ или $\iint_G f(x;y)dxdy$

Замечание. Так как предел $n - n$-й интегральной суммы I_n не зависит от способа разбиения области G на частичные области G_k теорема существования и единственности), то в декартовой системе координат область G удобно разбивать на частичные области прямыми, параллельными осям координат. Полученные при таком разбиении элементарные области G_k, принадлежащие области G, являются прямоугольниками. Следовательно,

$$ds = dxdy \text{ и } \iint\limits_G f(x;y)ds = \iint\limits_G f(x;y)dxdy.$$

Таким образом, по определению

$$\iint_G f(x;y)ds = \iint_G f(x;y)dxdy = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{m} f(x_K;y_K)\Delta s_k, \qquad (1.2.2)$$

где $G -$ область интегрирования.

Геометрический смысл двойного интеграла

Если $f(x;y) \geq 0$ в области G, то двойной интеграл (1.2.2) численно равен объему цилиндрического тела с основанием G и образующей, параллельной оси Oz. Это тело ограниченно сверху поверхностью $z = f(x;y)$. В частном случае, когда $f(x;y) \equiv 1$, двойной интеграл (1.2.2) равен площади S_G области G, т.е.

$$S_G = \iint_G dxdy. \qquad (1.2.3)$$

Физический смысл двойного интеграла

Если область $G -$ плоская пластинка, лежащая в плоскости Oxy, с поверхностной плотностью $\rho(x;y)$,

то массу пластинки находят по формуле $m = \iint\limits_G \rho(x;y)dxdy$,

статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy находят по формулам:

$$S_x = \iint\limits_G y\rho(x;y)dxdy;\ S_y = \iint\limits_G x\rho(x;y)dxdy, \qquad (1.2.4)$$

координаты центра масс пластинки $x_c = \frac{S_y}{m}; y_c = \frac{S_x}{m}$, (1.2.5)

моменты инерции пластинки G относительно осей координат и начала координат:

$$I_x = \iint\limits_G y^2\rho(x;y)dxdy;\ I_y = \iint\limits_G x^2\rho(x;y)dxdy; I_o = I_x + I_y. \qquad (1.2.6)$$

Основные свойства двойного интеграла.

Линейное свойство

1. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак двойного интеграла: $\iint_G Cf(x;y)ds = C\iint_G f(x;y)ds.$
2. Если функции $f(x;y)$ $(1 \leq i \leq k)$ непрерывны в области G, то верна формула

$$\iint\limits_G \left(\sum_1^k f_i(x;y)\right)ds = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_G f_i(x;y)ds.$$

Аддитивность

3. Если область G разбить на конечное число областей$G_1, G_2, \cdots, G_k$, не имеющих общих внутренних точек, то интеграл по области G равен сумме интегралов по областям G_i:

$$\iint\limits_G f(x;y)ds = \iint\limits_{G_1} f(x;y)ds + \iint\limits_{G_2} f(x;y)ds + \cdots + \iint\limits_{G_л} f(x;y)ds.$$

Теорема о среднем значении

4. Для непрерывной функции $f(x;y)$ в области G, площадь которой S_G, всегда найдется хотя

бы одна точка $M(\xi;\eta)$, такая, что $\iint_G f(x;y)ds = f(\xi;\eta)\, S_G$.

Число $f(\xi;\eta)$ называется ***средним значением функции*** $f(x;y)$ ***в области*** G.

Интегрирование неравенств

5. Если в области G для непрерывных функций $f(x;y), f_1(x;y), f_2(x;y)$ выполнены неравенства $f_1(x;y) \le f(x;y) \le f_2(x;y)$, то $\iint_G f_1(x;y)ds < \iint_G f(x;y)ds < \iint_G f_2(x;y)ds$.

Оценка интеграла

6. Если функция $f(x;y) \ne const$ и непрерывна в области G,

$$M = \max_{(x;y)\in G} f(x;y)\,, m = \min_{(x;y)\in G} f(x;y), \text{то } m\,S_G < \iint\limits_G f(x;y)ds < MS_G.$$

1.3. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах

Приведение двойного интеграла к повторному интегралу в случае прямоугольной области

Пусть область G является замкнутым прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат. **Обозначим** его так: $D = \{a \le x \le b; c \le y \le d\}$.

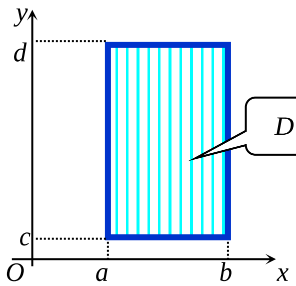

Рис. 3.1.1

Если для функции $f(x;y)$, непрерывной в прямоугольнике D и принимающей в нем неотрицательные значения, существует двойной интеграл

$$I = \iint\limits_D f(x;y)ds, \tag{3.1.1}$$

а при каждом фиксированном значении x из промежутка $[a;b]$ − простой интеграл

$$I(x) = \int_a^b f(x;y)dy \; (a \le x \le b), \tag{3.1.2}$$

то существует также ***повторный*** (***двукратный***) ***интеграл***

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x;y)dy\right) dx, \tag{3.1.3}$$

причем выполняется равенство

$$\iint_D f(x;y)ds = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy. \tag{3.1.4}$$

В формуле (3.1.4) интеграл (3.1.2) называется внутренним. Он вычисляется в предположении, что переменная x сохраняет на отрезке $[c;d]$ зафиксированное постоянное значение. При таком предположении подынтегральная функция $f(x;y)$ является функцией только одной переменной y. В результате вычисления этого интеграла получится функция переменной x.

После того, как эта функция определена, надо выполнить внешнее интегрирование – проинтегрировать полученную функцию по переменной x. В результате этого вторичного интегрирования получится уже не функция, а число.

Таким образом, при вычислении двойного интеграла по формуле (3.1.4) первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной y при постоянном значении x, а второе интегрирование – по переменной x.

Если существует двойной интеграл (3.1.1), а при каждом постоянном значении y из отрезка $[c;d]$ − простой интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x;y)dx \; (c \le y \le d),, \tag{3.1.5}$$

то существует также повторный интеграл

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x;y)dx\right) dy, \tag{3.1.6}$$

причем

$$\iint_D f(x;y)ds = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx. \qquad (3.1.7)$$

Если для вычисления двойного интеграла применяется формула (3.1.7), то порядок интегрирования меняется: первое (внутреннее), интегрирование ведется по переменной x в предположении, что переменная y на отрезке $[a;b]$ сохраняет постоянное зафиксированное значение, а повторное (внешнее) интегрирование – по переменной y. В результате вычисления внутреннего интеграла (3.1.5) получится функция переменной y, а повторное интегрирование даст число.

Если вместе с двойным интегралом (3.1.1) существуют оба простых интеграла (3.1.2) и (3.1.5), то выполняются одновременно равенства (3.1.4) и (3.1.7), откуда

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx.$$

1.3.2. Приведение двойного интеграла к повторному интегралу в случае криволинейной области

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Различают два основных вида области интегрирования:

1. Область называется ***правильной*** (***стандартной***) относительно оси Oy, если любая вертикальная прямая пересекает границу области не более чем в двух точках, т.е. область
2. $A_1A_2B_2B_1$ ограниченная слева и справа прямыми $x = a, x = b$ $(a < b)$ соответственно, снизу – кривой $y = y_1(x)$, сверху – кривой $y = y_2(x)$ $\big(y_2(x) \geq y_1(x)\big)$. Каждая из кривых пе

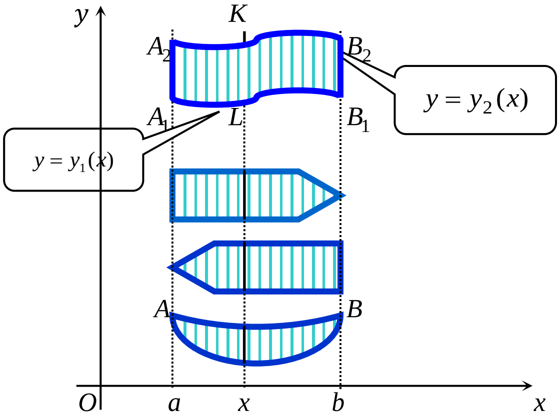

Рис. 3.2.1

3. Область называется ***правильной*** (***стандартной***) ***относительно оси*** $\boldsymbol{Ox}$, если любая горизонтальная прямая пересекает границу области не более чем в двух точках, т.е. область
4. $C_1D_1D_2C_2$, ограниченная снизу и сверху прямыми $y = c, y = d$ соответственно, слева – кривой $x = x_1(y)$, справа – кривой $x = x_2(y)$ $\big(x_2(y) \geq y = x_1(y)\big)$. Каждая из кривых пересекается

с горизонталью $y = h$ $(c \leq h \leq d)$ только в одной точке (рис. 3.2.2).

Замечание. В некоторых случаях точки A_1 и A_2, B_1 и B_1, C_1 и C_2, D_1 и D_2 могут сливаться в одну.

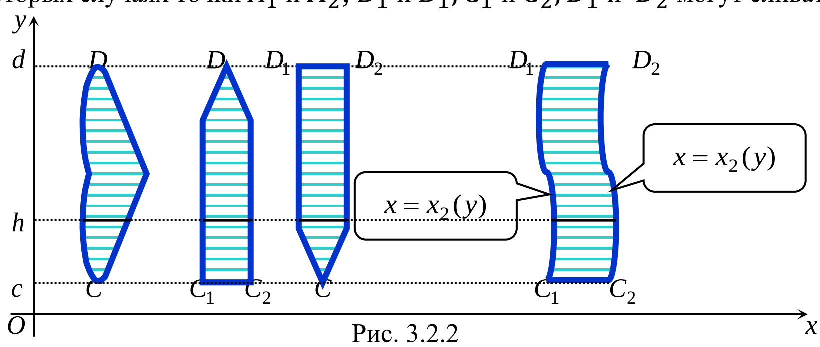

Рис. 3.2.2

Если область G, правильная относительно оси Oy, проектируется на ось Ox в отрезок $[a;b]$, то ее граница ℓ разбивается на две линии: A_1B_1 (верхняя граница области), задаваемую уравнением $y = y_1(x)$, A_2B_2 (нижняя граница), задаваемую уравнением $y = y_2(x)$ (рис. 3.2.1). Тогда область G определяется системой неравенств:

$$G: \begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases} \text{(I)}$$

и двойной интеграл вычисляется по правилу (внутренне интегрирование ведется по ной y, а внешнее – по переменной x)

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy \right) dx. \qquad (3.2.1)$$

Условимся дальше области, правильные относительно оси Oy, штриховать линиями, параллельными оси Oy.

Вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла, в котором переменную x надо принять при интегрировании за постоянную величину. Результат интегрирования будет некоторой функцией от переменной x, которая интегрируется затем по отрезку $[a;b]$. В результате получается некоторое постоянное число.

Если область G, правильная относительно оси Ox, проектируется на ось Oy в отрезок $[c;d]$, то ее граница ℓ разбивается на две линии: C_1D_1 (левая граница области), задаваемую уравнением $x = x_1(y)$, и C_2D_2 (нижняя граница), задаваемую уравнением $x = x_2(y)$ (рис. 3.2.2). В этом случае область G определяется системой неравенств:

$$G: \begin{cases} x_1(y) \le x \le x_2(y), \\ c \le y \le d, \end{cases} \text{(II)}$$

и двойной интеграл вычисляется по правилу (внутреннее интегрирование ведется по переменной x, а внешнее – по переменной y)

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx \right) dy. \qquad (3.2.2)$$

Условимся дальше области, правильные относительно оси Ox, штриховать линиями, параллельными оси Ox.

Выражения, стоящие в правых частях равенств (3.2.1), (3.2.2), называются ***повторными*** (или ***двукратными***) ***интегралами***.

Из равенств (3.2.1) и (3.2.2) следует, что

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx. \qquad (3.2.3)$$

Переход от левой части равенства (3.2.3) к правой его части и обратно называется ***изменением порядка интегрирования в повторном интеграле***.

Как правило, пределы при первом (внутреннем) интегрировании являются переменными, зависят от той переменной, которая при этом рассматривается как постоянная.
Пределы при втором (внешнем) интегрировании <u>всегда постоянны</u>.
Вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла.

Заметим, что, если область G не является правильной (стандартной) ни относительно оси Oy, ни относительно оси Ox, ее разбивают на конечное число областей $G_1, G_2, \cdots, G_k$ (правильных относительно оси $Oy(Ox)$) и при вычислении двойного интеграла по области G используют свойство аддитивности.

РАССТАНОВКА ПРЕДЕЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пределы интегрирования в повторном интеграле в правой части формулы (3.2.1) находятся так.

1. Область G проектируется на ось Ox. Этим определится отрезок, $[a;b]$ на котором в области G
2. изменяется переменная x: $a \le x \le b$. Числа a и b $(a < b)$ будут соответственно нижним и

верхним пределами во внешнем интеграле. Тем самым пределы интегрирования по переменной x определены.

Чтобы найти пределы интегрирования по переменной y во внутреннем интеграле, пометим на контуре ℓ (рис. 3.2.3), ограничивающем область G, точки A и B с абсциссами a и b. Эти две точки разделят контур ℓ на нижнюю и верхнюю части, уравнения которых следует разрешить относительно переменной y.

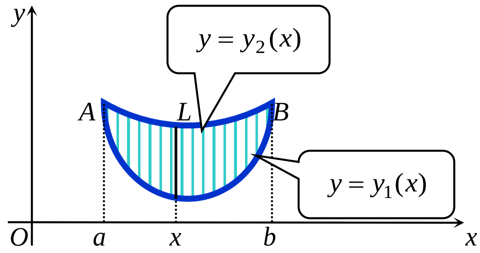

Рис. 3.2.3

Пусть эти части определяются соответственно уравнениями $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, причем, предполагается, что функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение. Зафиксируем на отрезке $[a; b]$ оси Ox любую точку x, проведем через нее прямую, параллельную оси Oy, и рассмотрим ее отрезок KL, содержащийся в области G.

Теперь очевидно, что переменная y изменяется в области G от ее значения $y_1(x)$ на нижней части контура ℓ до ее значения $y_2(x)$ на его верхней части: $y_1(x) \leq y \leq \ y_2(x)$.

Таким образом, нижний и верхний пределы при интегрировании по переменной y во внутреннем интеграле соответственно равны $y_1(x)$ и $y_2(x)$. После вычисления внутреннего интеграла получится функция переменной x.

2. Если область G ограничена кривой, которую любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает не более чем в двух точках (рис. 3.2.4), то двойной интеграл, распространенный на эту область, может быть вычислен по формуле (3.2.3). Здесь также пределы во внутреннем интеграле – не числа, а функции переменной y.

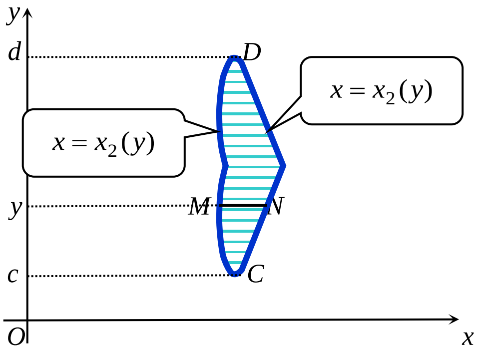

Рис. 3.2.4

Чтобы найти пределы во внешнем интеграле, область G проектируется на ось Oy. Так определяется отрезок $[c; d]$, на котором в области G изменяется переменная y: $c \leq y \leq d$. ла c и d будут соответственно нижним и верхним пределами во внешнем интеграле. Внутренний интеграл вычисляется по переменной x.

В подынтегральной функции $f(x; y)$ надо y рассматривать как величину постоянную. Чтобы определить пределы изменения переменной x в области G, пометим на контуре ℓ точки C и D с ординатами c и d. Эти две точки разделят контур ℓ на левую и правую части, *уравнения которых следует разрешить относительно переменной* x.

Пусть этими уравнениями будут соответственно $x_1(y)$ и $x_2(y)$, причем предполагается, что функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ на отрезке $[c; d]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение. Зафиксируем на отрезке $[c; d]$ оси Oy любую точку y, проведем через нее прямую, параллельную оси Ox, и рассмотрим ее отрезок MN, содержащийся в области G.

В области G переменная x будет изменяться от значения $x_1(y)$ (на левой части контура ℓ)

до значения $x_2(y)$ (на его правой части): $x_1(y) \le x \le x_2(y)$.

Таким образом, верхний и нижний пределы во внутреннем интеграле соответственнио равны $x_1(y)$ и $x_2(y)$.

Подчеркнем, что здесь во внутреннем интеграле при интегрировании по переменной x пределы интегрирования в общем случае есть функция переменной y, т.е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и которая при вычислении внутреннего интеграла остается постоянной. После вычисления внутреннего интеграла получится функция ной y. Следует обратить внимание на то, что во внешнем интеграле в обоих случаях пределы интегрирования – величины постоянные и в результате вычисления двойного интеграла должна получиться постоянная величина.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Замена переменной $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ при переходе к полярной системе координат сопровождается искажением площади, коэффициент искажения равен модулю якобиана.

Якобиан для полярной системы координат: $\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} r.$

Вычисление объемов тел

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x;y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz. Направляюще цилиндрической поверхности служит контур ℓ, ограничивающий область интегрирования G, лежащую в плоскости Oxy.

Цилиндрическим телом называется множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

$$a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x), 0 \le z \le f(x;y).$$

Объем такого тела определяется формулой: $V = \iint_G f(x;y)ds$, где

$$G: a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x) -$$ проекция тела на плоскость Oxy.

Если вычисление ведется в полярных координатах, то эта формула имеет вид

$$V = \iint_G f(r\cos\varphi\,; r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

При вычислении объемов тел **желательно** строить тело, объем которого определяется. Построение проводится методом сечений, для этого находятся сечения тела координатными плоскостями и плоскостями, параллельными им.

Для вычисления указанного выше двойного интеграла нужно **обязательно** построить чертеж области G с тем, чтобы выбрать порядок интегрирования в повторном интеграле и расставить пределы.

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

2.1. Определение тройного интеграла

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M некоторой замкнутой пространственной области Ω и, если разбить эту область произвольным способом на n частичных областей с объемами $\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$ и диаметрами $d_1, d_2, \cdots, d_n$, выбрать в каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \cdots, M_n$ вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\Delta v_1 + f(M_2)\Delta v_2 + \cdots + f(M_n)\Delta v_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta v_k,$$

то она называется ***интегральной суммой*** функции $f(M)$ по области Ω.

При составлении интегральной суммы можно ***различными способами*** разбивать ласть Ω на n частичных областей и в каждой из них можно ***произвольно*** выбирать одну ку M_k Поэтому для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной области Ω можно составить сколько угодно различных интегральных сумм.

Тройным интегралом от функции $f(M)$ по области Ω называется конечный предел интегральной суммы (он не зависит от способа разбиения области Ω на элементарные области и от выбора точек M_k) при условии, что $\max d_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Обозначение: $\iiint_\Omega f(M)dv$.

Таким образом, по определению $\iiint_\Omega f(M)dv = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta v_k$.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного и обыкновенного определенного интеграла: *область интегрирования можно разбивать на части; интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых; постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*.

В прямоугольных декартовых координатах тройной интеграл обычно записывается в виде

$$\iiint_\Omega f(x;y;z)dxdydz \text{ (так как } dv = dxdydz).$$

2.2. Вычисление тройного интеграла

Вычисление тройного интеграла в прямоугольных координатах

При вычислении тройных интегралов особую роль играет понятие ***правильной*** (***стандартной***) ***трехмерной области***, которое вводится по аналогии с правильной двумерной областью. Так, например, область Ω, ограниченная снизу и сверху однозначными и непрерывными поверхностями $z = z_1(x;y), z = z_2(x;y), -$ правильная относительно оси Oz. Она обладает следующими свойствами.

1. Всякая прямая, параллельная оси Oz и проведенная через внутреннюю точку области Ω (т.е. не лежащую на границе области), пересекает границу области ровно в двух точках.
2. Вся область Ω проецируется на плоскость Oxy в двумерную область Ω.

Тройной интеграл по области Ω вычисляется так:

$$\iiint\limits_\Omega f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Здесь внутренний интеграл $\int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$ берется по переменной z при фиксированных, но произвольных в области G значеях x и y. В результате получается некоторая ци $f(x;y)$, которая интегрируется затем по области G.

Если область G ограничена линиями $y = y_1(x), y = y_2(x), x = a, x = b,$ то, переходя от двойного интеграла $\iint_G f(x;y)dxdy$ к повторному интегралу, получаем формулу

$$\iiint\limits_\Omega f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Она сводит вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех определенных интегралов, т.е. к трехкратному интегралу.

Если область Ω не является правильной, то с помощью плоскостей, параллельных какой-либо из координатных плоскостей, разбиваю ее на конечное число правильных областей.

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен. Тройной интеграл можно вычислить шестью различными способами

в приведенной формуле первое интегрирование совершается по переменной z,
второе – по переменной y,
третье – по переменной x;
оставив первое интегрирование по переменной z, можно поменять местами второе и третье;
далее, можно совершить первым интегрирование по переменной x, а также по переменной y.

Заметим, что во всех этих формулах пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда величины постоянные.