

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ЦЕЛЬ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	6
2. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	7
2.1 Преобразование Лапласа. Обратное преобразование Лапласа.....	7
2.2 Преобразование Фурье.....	8
3. ПОЛУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	9
4. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	11
5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ.....	14
6. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И НА ЕЕ ВХОДЕ	17
7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ.....	26
8. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ХАРАКТЕРИСТИК ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА	30
9. РАЗРАБОТКА КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ.....	34
9.1 Анализ информации о состоянии космического аппарата и построение инвариантного контура управления	34
9.2 Определение скоростных параметров космического аппарата методом скользящего численного дифференцирования	37

9.3 Анализ алгоритмов оценивания параметров поступательного движения космического аппарата по результатам внешнетраекторных измерений	40
9.4 Алгоритмы оценивания начальных условий орбитального движения космического аппарата на основе метода наименьших квадратов	41
9.5 Особенности реализации алгоритма метода наименьших квадратов.....	43
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	45
ПРИЛОЖЕНИЕ А	46
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	48

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном пособии приведены теоретические сведения о методах и способах определения показателей качества систем автоматического управления, письменные задания и тесты. Пособие является дополнением к тем методическим трудам, которые указаны в списке литературы.

В учебном пособии рассмотрен конкретный пример управления космическим аппаратом (КА), представленный схемами инвариантного контура управления сложным динамическим объектом. На основе анализа алгоритмов оценивания параметров поступательного движения летательного аппарата (ЛА) по результатам внешнетраекторных измерений сформулирована итерационная процедура Гаусса-Ньютона, реализующая подход непосредственного отыскания экстремальной точки поверхности отклика, описанной многомерной функцией применительно к задаче оценивания начальных условий движения ЛА.

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриата направлений подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

После завершения освоения дисциплины «Теория автоматического управления» студент должен:

знать

- основные положения теории управления;
- принципы и методы построения и преобразования моделей систем управления;
- методы расчёта и оптимизации систем управления;
- основные методы и принципы построения (формализации) и исследования математических моделей систем управления, их формы представления и преобразования для целей управления;

уметь

- применять принципы и методы построения моделей, методы анализа, синтеза и оптимизации при создании и исследовании средств и систем управления;
- использовать принципы и методы математического моделирования при разработке и исследовании систем управления;
- решать исследовательские и проектные задачи с использованием компьютеров;

владеть

- принципами и методами моделирования, анализа, синтеза и оптимизации систем и средств автоматизации, контроля и управления;
- навыками работы с современными аппаратными и программными средствами исследования и проектирования систем управления.

1. ЦЕЛЬ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основной и исчерпывающей моделью любой системы управления или её элемента является дифференциальное уравнение. На практике все системы и большинство их элементов описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что связано с нелинейными характеристиками элементов. Для облегчения исследования систем используют линеаризацию характеристик элементов. Однако это возможно только в определённых пределах.

Целью исследования систем автоматического управления является определение их характеристик. Любая САУ характеризуется, прежде всего, устойчивостью. *Устойчивость* – это свойство САУ возвращаться в исходный или близкий к нему режим всякий раз после выхода из него.

Существуют два способа определения динамических характеристик системы или их элементов: прямой, который предполагает решение дифференциального уравнения и нахождение всех характеристик, и косвенный, в котором решение дифференциального уравнения заменяется различными математическими и логическими процедурами, позволяющими судить о динамических свойствах системы. Вся теория автоматического управления направлена на разработку таких приёмов.

Современные средства вычислительной техники и их математическое программное обеспечение позволяют решать задачу устойчивости и качества регулирования прямыми методами. Поэтому обычно исследования выполняются прямым методом, что облегчает проведение исследования и экономит значительное время исследователя.

Примеры систем управления с обратной связью:

- взаимоотношения учителя и ученика (учитель управляет учеником, корректируя своё поведение в зависимости от реакции ученика, результатов тестов и т.п.);
- управление дорожным движением в крупных городах (режим работы светофоров определяет характер дорожного движения, при этом наличие заторов может повлиять на режим работы светофоров);
- система управления температурой в холодильнике (для экономии электроэнергии процесс охлаждения идёт более интенсивно при высокой температуре и замедляется при приближении температуры к намеченной).

Исследование системы автоматического регулирования может быть проведено экспериментально на материальном объекте. Для этого на вход системы подают стандартное входное воздействие, как правило, в виде ступенчатого единичного сигнала, и наблюдают изменение выходного сигнала. В системе, до этого находившейся в установившемся состоянии, начнётся переходный процесс. По поведению выходного сигнала можно оценить динамические свойства системы, а также отметить несколько характерных переходных процессов, среди которых наиболее часто встречаются аperiodический и колебательный процессы. Переходный процесс может иметь

три разновидности: сходящийся (затухающий) в устойчивых САУ, расходящийся в неустойчивых САУ и незатухающий в САУ, находящейся на границе устойчивости.

К косвенным методам исследования систем относятся методы построения амплитудно-фазовых характеристик и других характеристик с использованием передаточных функций системы и её элементов.

2. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1 Преобразование Лапласа. Обратное преобразование Лапласа

В теории автоматического управления для упрощения решения дифференциальных уравнений используется преобразование Лапласа.

$$L\{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y\} = L\{b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_m x\}. \quad (2.1)$$

Здесь L – символ преобразования (оператор) Лапласа. При нулевых начальных условиях $L\{y^{(i)}(t)\} = s^i Y(s)$, где $Y(s) = L\{y(t)\}$.

Используя это свойство и свойство линейности преобразования Лапласа $L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}$, получаем дифференциальное уравнение САУ или звена в изображениях по Лапласу

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) X(s). \quad (2.2)$$

Передаточной функцией системы в изображениях по Лапласу $W(s)$ называется отношение изображений по Лапласу выходной величины к изображению входной при нулевых начальных условиях. Здесь s – комплексная переменная в преобразовании Лапласа.

По определению, из (2.2) для передаточной функции в изображениях по Лапласу получаем

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.3)$$

Чаще используют передаточную функцию в стандартном (нормированном) виде, когда свободный член знаменателя равен 1. Для этого и числитель, и знаменатель делят на коэффициент a_n . Тогда

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_n} s^m + \frac{b_1}{a_n} s^{m-1} + \dots + \frac{b_m}{a_n}}{\frac{a_0}{a_n} s^n + \frac{a_1}{a_n} s^{n-1} + \dots + 1}.$$

Если ввести обозначения $k_1 = \frac{b_0}{a_n}$; $k_2 = \frac{b_1}{a_n}$; ...; $k_{m+1} = \frac{b_m}{a_n}$ и $T_1^n = \frac{a_0}{a_n}$; $T_2^{n-1} = \frac{a_1}{a_n}$... , то стандартная форма записи передаточной функции может быть представлена в виде выражения

$$W(s) = \frac{k_1 s^m + k_2 s^{m-1} + \dots + k_m}{T_1^n s^n + T_2^{n-1} s^{n-1} + \dots + 1}.$$

Дифференциальное уравнение в изображениях по Лапласу (при нулевых начальных условиях) звена или САУ (2.1) приобретает вид $Y(s) = W(s)X(s)$.

Соотношение $X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ называют прямым преобразованием

Лапласа. Комплексная переменная $s = \beta_0 + j\omega$ называется оператором Лапласа, где ω – угловая частота, β_0 – некоторое положительное постоянное число. Функция комплексной переменной $X(s)$ называется изображением сигнала $x(t)$ по Лапласу. Операция определения изображения по оригиналу сокращенно записывается – $X(s) = L\{x(t)\}$, где L – символ прямого преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа обратимо, т.е., зная изображение по Лапласу, можно определить оригинал, используя соотношение обратного преобразования

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta_0 - j\omega}^{\beta_0 + j\omega} X(s)e^{st} ds, \quad (2.4)$$

или $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$, где L^{-1} – символ обратного преобразования Лапласа.

2.2 Преобразование Фурье

Одна из важнейших характеристик канала связи, по которому передаётся информация управления в САУ, является полоса передаваемых частот. При рассмотрении конкретных электрических сигналов чаще пользуются описанием изменения закона тока, напряжения и мощности во времени. Существуют два языка описания характеристик сигнала: частотный, при котором задаётся закон распределения напряжений и мощности сигнала по частотам $S(\omega)$, и временной, при котором задаётся закон изменения сигнала во времени $u(t)$. Важно располагать методом перевода описания с одного языка на другой. Эти два языка равноценны и связаны между собой преобразованием Фурье.

Соотношение

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.5)$$

называют прямым преобразованием Фурье. Функция угловой частоты $\omega - X(j\omega)$ называется Фурье-изображением или частотным спектром функции $x(t)$. Спектр характеризует соотношение амплитуд и фаз бесконечного множества бесконечно малых синусоидальных компонент, составляющих в сумме непериодический сигнал $x(t)$.

Операция преобразования Фурье математически записывается

$$X(j\omega) = F\{x(t)\}, \quad (2.6)$$

где F – символ прямого преобразования Фурье.

Спектры в теории автоматического управления представляют графически, изображая отдельно их действительную и мнимую части:

$$X(j\omega) = \text{Re}[X(j\omega)] + j\text{Im}[X(j\omega)].$$

На рисунке 2.1 представлено типичное изображение спектра непериодического сигнала в ТАУ.

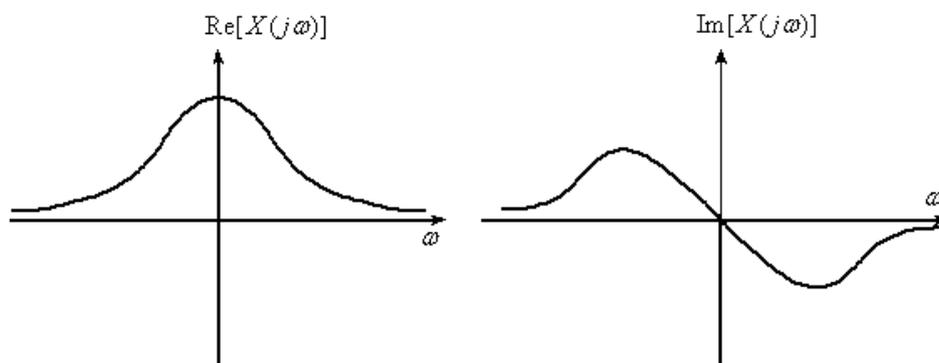


Рисунок 2.1. – Пример спектра непериодического сигнала в ТАУ

Все спектры в теории автоматического управления представляют графически.

3. ПОЛУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В теории управления три задачи управления.

Задача анализа возникает тогда, когда известен *вектор управляющих воздействий* U и известна *структура и описание объекта* W . Необходимо проанализировать поведение выходных величин Y . Анализируется устойчивость и качество системы управления.

В задаче синтеза известны *структура и описание объекта управления* W и *вектор управляемых величин* Y . Необходимо найти *управляющие воздействия* U , которые обеспечивали бы желаемые характеристики объекта управления (оптимальное управление и коррекция системы управления).

Идентификация объектов управления – это по известным входным U и выходным Y величинам построить адекватную математическую модель исследуемых объектов W .

При решении задач анализа, синтеза и идентификации систем автоматического управления используют характеристики не только автоматической системы, но и её звеньев.

Различают два основных вида характеристик систем автоматического управления. Это временные и частотные характеристики.

Временные характеристики системы управления и её элементов можно получить посредством:

- 1) решения дифференциального уравнения, являющегося математической моделью системы или её элемента;
- 2) обратного преобразования Лапласа, используя аппарат передаточных функций;
- 3) математического моделирования процессов управления в системе управления или её элементе.

Если в передаточной функции $W(S)$ осуществить формальную замену переменной $s = j \cdot \omega$, получим частотные характеристики автоматической системы или её звена. При такой замене передаточная функция $W(S)$ принимает вид

$$W(s) \Big|_{s=j \cdot \omega} = W(j \cdot \omega) = P(\omega) + j \cdot Q(\omega), \quad (3.1)$$

где $P(\omega)$ – действительная часть комплексного числа $W(j\omega)$, $Q(\omega)$ – мнимая часть комплексного числа $W(j\omega)$.

Комплекснозначная функция $W(j\omega)$ называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой системы.

Функции

$$P(\omega) = \operatorname{Re} W(j \cdot \omega) \text{ и } Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j \cdot \omega) \quad (3.2)$$

называются соответственно действительной и мнимой частотными характеристиками.

Функция

$$A(\omega) = |W(j \cdot \omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (3.3)$$

называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ).

Функция

$$\varphi(\omega) = \arg W(j \cdot \omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (3.4)$$

называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ).

Логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ) системы называется график функции $L(\omega)$ вида

$$L(\omega) = 20 \cdot \log A(\omega) = 20 \cdot \log |W(j \cdot \omega)|. \quad (3.5)$$

Размерность функции $L(\omega)$ – децибел.

Частотные характеристики можно получить аналитически либо экспериментально. При аналитическом способе получения частотных характеристик нужно в передаточной функции системы $W(s)$ осуществить формальную замену переменной $s = j \cdot \omega$. Далее в комплексном числе $W(j \cdot \omega)$ выделить действительную $P(\omega)$ и мнимую $Q(\omega)$ части комплексного числа $W(j \cdot \omega)$ и воспользоваться формулами (3.3) – (3.5).

Аналитически частотные характеристики можно получить, если найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения динамики автоматической системы, когда на её вход подаётся гармонический сигнал $g(t) = a \cdot \sin \omega t$ амплитуды a и частоты ω .

При экспериментальном построении графиков частотных характеристик систем на её вход подаётся гармонический сигнал $g(t) = a \cdot \sin \omega t$ постоянной амплитуды a . Изменяя частоту ω в заданных пределах, измеряют значения амплитуды и фазы выходного сигнала. По полученным значениям строят амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики системы.

Компьютерное моделирование позволяет выполнить анализ временных и частотных характеристик, предварительную и заключительную коррекцию САР, оценку её качества.

4. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Переходной функцией $h(t)$ системы автоматического управления называют функцию, описывающую изменение выходной величины системы, когда на её вход подаётся единичное ступенчатое воздействие $g(t) = 1(t)$ при нулевых начальных условиях.

Пусть структурная схема автоматической системы приведена к расчётному виду (рис. 4.1).

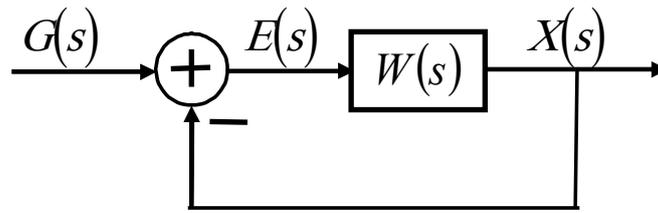


Рисунок 4.1. – Приведение к расчётному виду структурной схемы

На рисунке 4.1 обозначено: $G(S)$ – изображение по Лапласу входного сигнала, $X(S)$ – изображение по Лапласу выходного сигнала, $E(S)$ – изображение по Лапласу сигнала ошибки системы, $W(S)$ – передаточная функция разомкнутой системы.

Выходная переменная $X(S)$ замкнутой системы связана с входным сигналом $G(S)$ уравнением

$$X(s) = \Phi(s) \cdot G(s),$$

где $\Phi(S)$ – передаточная функция замкнутой системы.

Так как $G(s) = L\{g(t)\} = L\{1(t)\} = \frac{1}{s}$, то из последнего равенства следует, что изображение по Лапласу переходной функции равно

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot \Phi(s). \quad (4.1)$$

Тогда, переходная функция $h(t)$ определяется как обратное преобразование Лапласа от выражения (4.1), т.е.

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \Phi(s) \right\}. \quad (4.2)$$

Существует связь между передаточной функцией разомкнутой системы $\Phi(s)$ и передаточной функцией разомкнутой системы $W(s)$, которая задаётся с помощью формулы

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}. \quad (4.3)$$

Подставив (4.2) в равенство (4.3) получаем

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{W(s)}{1+W(s)} \right\}. \quad (4.4)$$

Сформулируем алгоритм нахождения переходной функции системы автоматического управления, если её математическая модель задана в виде

передаточных функций. Для того чтобы найти переходную функцию $h(t)$ автоматической системы, нужно выполнить следующее.

1. Выполнив необходимые преобразования заданной структурной схемы системы автоматического управления, получить передаточную функцию $W(s)$ разомкнутой системы.

2. По передаточной функции разомкнутой системы $W(s)$ по формуле $\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$ получить передаточную функцию замкнутой системы.

3. По формулам (4.2) или (4.4) найти переходную функцию $h(t)$.

Весовой функцией (импульсной переходной функцией) систем автоматического управления и регулирования называют функцию, описывающую изменение во времени выходного сигнала автоматической системы, когда на её вход подается δ -функция при нулевых начальных условиях. Иными словами, весовая функция (импульсная переходная функция) – это реакция системы при нулевых начальных условиях, когда на её вход подаётся δ -функция. Весовую функцию (импульсную переходную функцию) будем обозначать как $k(t)$.

Дельта функция (функция Дирака) $\delta(t)$ называется функция, которая определяется с помощью равенств

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0 \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (4.5)$$

Так как $G(s) = L\{g(t)\} = L\{\delta(t)\} = 1$, то изображение по Лапласу весовой функции (импульсной переходной функции) $K(s)$ равно

$$K(s) = \Phi(s). \quad (4.6)$$

Это означает, что изображение по Лапласу весовой функции совпадает с передаточной функцией замкнутой автоматической системы.

Если теперь в равенство (4.3) подставить (4.1), то получим

$$K(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}. \quad (4.7)$$

Таким образом, если в качестве математической модели автоматической системы используется передаточная функция, то $k(t)$ определяется как обратное преобразование Лапласа от передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$, т.е.

$$k(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\}, \quad (4.8)$$

или

$$k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{1+W(s)} \right\}. \quad (4.9)$$

Сформулируем алгоритм нахождения импульсной переходной функции системы автоматического управления, если её математическая модель задана в виде передаточных функций. Для того чтобы найти импульсную переходную функцию (весовую функцию) $k(t)$ автоматической системы, нужно выполнить следующее.

1. Выполнив необходимые преобразования заданной структурной схемы системы автоматического управления, получить передаточную функцию $W(s)$ разомкнутой системы.

2. По передаточной функции разомкнутой системы $W(s)$ по формуле $\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$ получить передаточную функцию замкнутой системы.

3. По формулам (4.7) или (4.8) найти импульсную переходную функцию (весовую функцию) $k(t)$.

Установим связь между переходной функцией $h(t)$ и импульсной переходной функцией. Поскольку

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot \Phi(s),$$

то

$$s \cdot H(s) = \Phi(s). \quad (4.10)$$

По свойству преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях умножению изображению на s соответствует операция дифференцирования по времени t его оригинала. Таким образом, из (4.3) следует

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (4.11)$$

Это означает, что для того чтобы найти импульсную переходную функцию системы $k(t)$ по известной переходной функции $h(t)$, нужно $h(t)$ продифференцировать по времени t .

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ

На рисунках 5.1 и 5.2 представлены графики изменения во времени переходной и импульсной переходной функций соответственно для колебательного звена. На рисунке 5.1 красным цветом показан график функции $g(t) = 1(t)$.

На рисунке 5.3 представлен процесс снятия переходной характеристики для апериодического звена, красным цветом показан график функции $g(t)=1(t)$.

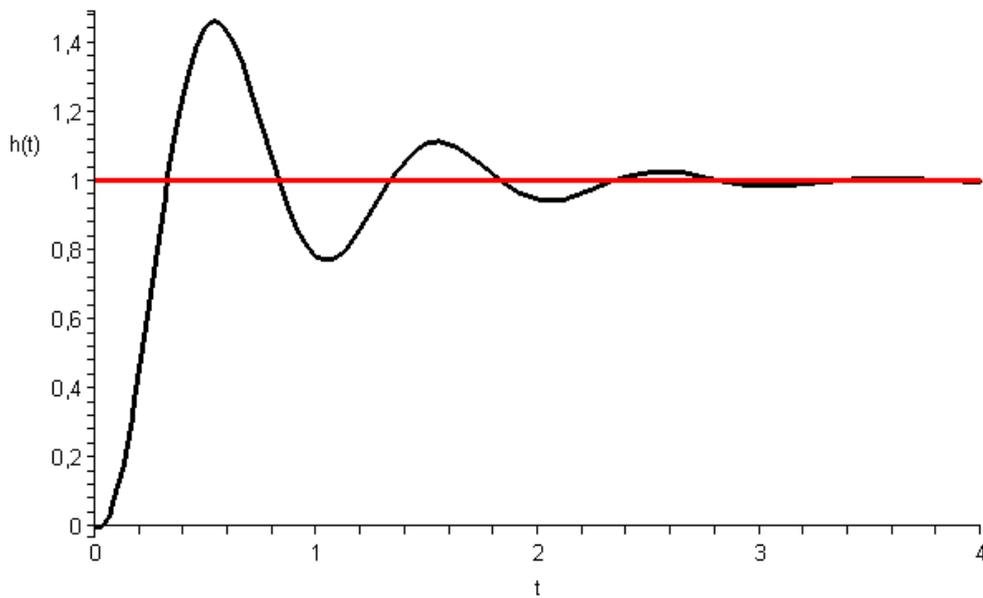


Рисунок 5.1. – Переходная характеристика системы управления

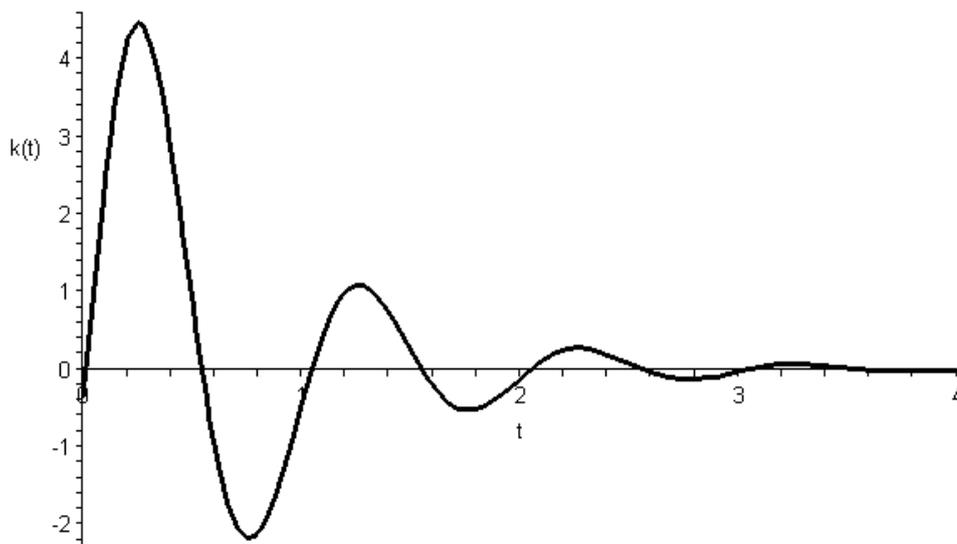


Рисунок 5.2. – Импульсная переходная характеристика системы управления

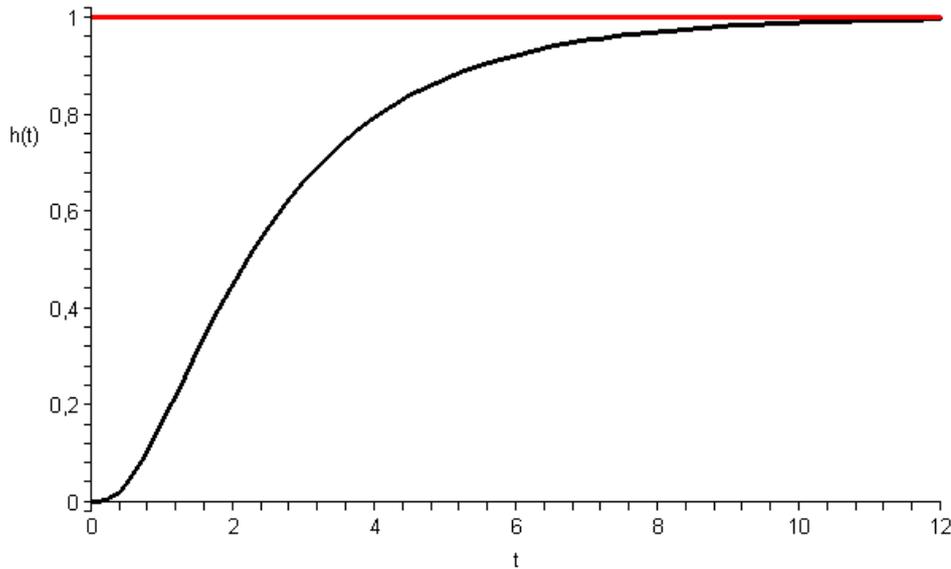


Рисунок 5.3. – Снятие сигнала с генератора единичного ступенчатого воздействия и переходной характеристики

По графику переходной функции $h(t)$ определяются основные показатели качества автоматической системы, к которым относятся (рис. 5.4).

1. Время управления T_y (время переходного процесса) – минимальное время, по истечении которого выходной сигнал системы будет оставаться близким к установившемуся значению с заданной степенью точности

$$|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta, \text{ для любого } t > T_y.$$

2. Перерегулирование σ . Величина σ определяется в процентах по формуле

$$\sigma = \frac{h_{\max 1} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\%$$

При синтезе алгоритмов управления динамическими объектами стремятся чтобы $\sigma = (10 - 30)\%$.

3. Статическое отклонение $\varepsilon(t) = 1(t) - h_{уст}$.

4. Частота колебаний переходного процесса $h(t)$, которая вычисляется по формуле $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

5. Декремент затухания

$$\chi = \frac{|h_{\max 1} - h_{уст}|}{|h_{\max 2} - h_{уст}|}$$

6. Число колебаний M – число максимумов функции $h(t)$ за время переходного процесса.

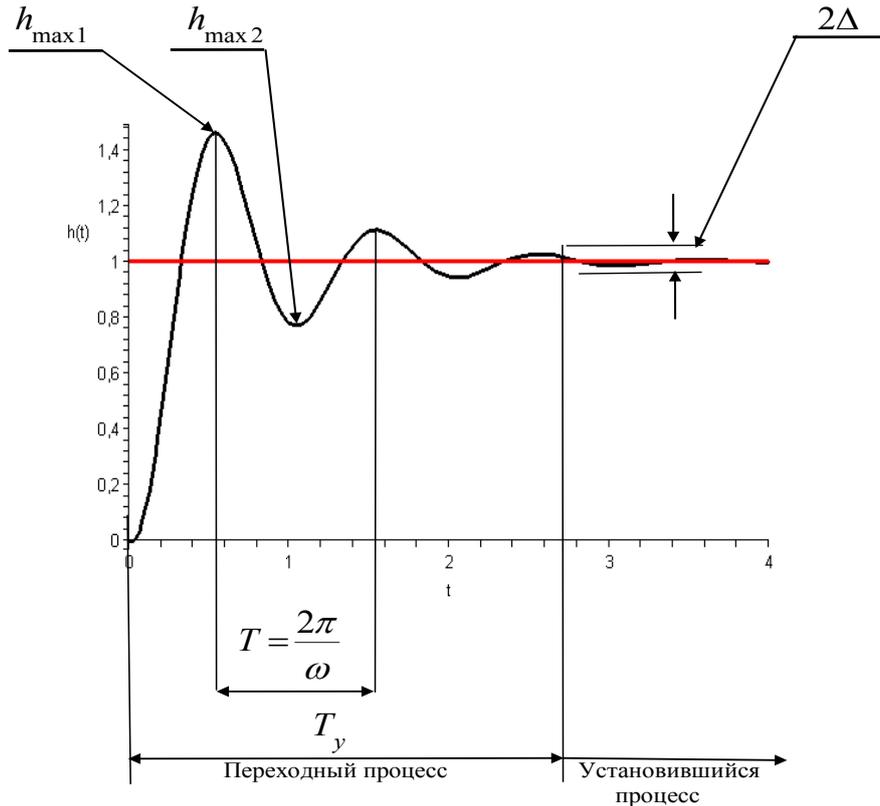


Рисунок 5.4. – Показатели качества системы управления

Зависимости рисунков 5.1 – 5.4 построены в среде Mathcad.

6. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И НА ЕЕ ВХОДЕ

Рассмотрим линейную систему автоматического управления, динамика которой описывается следующим дифференциальным уравнением n -ого порядка

$$\begin{aligned}
 a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n \cdot x(t) = \\
 = b_0 \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dg(t)}{dt} + b_m \cdot g(t), \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

где $g(t)$ – управляющее входное воздействие, приложенное к системе, $x(t)$ – выходной, регулируемый сигнал. Пусть $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Тогда дифференциальное уравнение (6.1) принимает вид

$$(a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n) \cdot x(t) =$$

$$= (b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot p + b_m) \cdot g(t). \quad (6.2)$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned} (a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n) &= D(p), \\ (b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot p + b_m) &= M(p), \end{aligned} \quad (6.3)$$

уравнение (6.2) перепишем в сокращенном виде

$$D(p) \cdot x(t) = M(p) \cdot g(t). \quad (6.4)$$

Из последнего уравнения передаточная функция автоматической системы в операторной форме записи по отношению к управляющему воздействию $g(t)$ есть

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{D(p)}. \quad (6.5)$$

Пусть воздействие $g(t) = A_1 \cdot \sin \omega_1 t$ и требуется определить изменение $x(t)$ в установившемся процессе, т.е. найти частное решение уравнения (6.1) или, что то же самое, уравнения (6.2).

Для определения характера изменения $x(t)$ в установившемся процессе преобразуем обе части уравнения (6.1) по Фурье, при этом имеем в виду, что

$$F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} \cdot dt, \quad F\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} \cdot dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} [a_0 \cdot (j \cdot \omega)^n + a_1 \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot (j \cdot \omega) + a_n] \cdot F\{x(t)\} &= \\ = [b_0 \cdot (j \cdot \omega)^m + b_1 \cdot (j \cdot \omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot (j \cdot \omega) + b_m] \cdot F\{g(t)\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Введём обозначение

$$\Phi(j \cdot \omega) = \frac{F\{x(t)\}}{F\{g(t)\}} = \frac{b_0 \cdot (j \cdot \omega)^m + b_1 \cdot (j \cdot \omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot (j \cdot \omega) + b_m}{a_0 \cdot (j \cdot \omega)^n + a_1 \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot (j \cdot \omega) + a_n}, \quad (6.7)$$

а также воспользуемся равенством

$$F\{g(t)\} = F\{A_1 \cdot \sin \omega_1 t\} = \frac{A_1 \cdot \pi}{j} \cdot [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)].$$

Тогда спектральная характеристика вынужденных колебаний регулируемой величины определяется из выражения (6.7) в виде

$$F\{x(t)\} = \Phi(j \cdot \omega) \cdot \frac{A_1 \cdot \pi}{j} \cdot [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (6.8)$$

Из этого выражения видно, что спектральная характеристика сигнала на выходе системы в общем случае не совпадает со спектральной характеристикой сигнала на её входе. Функциональный множитель $\Phi(j \cdot \omega)$ учитывает изменение спектральной характеристики при прохождении воздействия $g(t)$ через линейную систему.

Представим комплексную функцию $\Phi(j \cdot \omega)$ в показательной форме

$$\Phi(j \cdot \omega) = |\Phi(j \cdot \omega)| \cdot e^{j \cdot \arg \Phi(j \cdot \omega)} \quad (6.9)$$

и найдем $x(t)$ по формуле обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F\{x(t)\} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j \cdot \omega) \cdot \frac{A_1 \cdot \pi}{j} \cdot [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)] \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, будем иметь с учётом равенства (6.9)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_1}{2j} \cdot \left[|\Phi(j \cdot \omega_1)| \cdot e^{j \cdot \arg \Phi(j \cdot \omega_1)} \cdot e^{j \cdot \omega_1 \cdot t} - \right. \\ &\quad \left. - |\Phi(-j \cdot \omega_1)| \cdot e^{j \cdot \arg \Phi(-j \cdot \omega_1)} \cdot e^{-j \cdot \omega_1 \cdot t} \right]. \end{aligned}$$

Так как справедливы равенства

$$|\Phi(-j \cdot \omega_1)| = |\Phi(j \cdot \omega_1)|, \quad \arg \Phi(-j \cdot \omega_1) = -\arg \Phi(j \cdot \omega_1),$$

то получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_1 \cdot \pi}{j} \cdot |\Phi(j \cdot \omega_1)| \cdot \left\{ e^{j \cdot [\omega_1 \cdot t + \arg \Phi(j \cdot \omega_1)]} - e^{-j \cdot [\omega_1 \cdot t + \arg \Phi(j \cdot \omega_1)]} \right\} = \\ &= A_1 \cdot |\Phi(j \cdot \omega_1)| \cdot \sin[\omega_1 \cdot t + \arg \Phi(j \cdot \omega_1)]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Отсюда следует, что в установившемся режиме реакция $x(t)$ линейной автоматической системы на синусоидальное воздействие является также синусоидальной. Угловые частоты входного и выходного сигналов совпадают. Амплитуда синусоиды на выходе системы равна $A_1 \cdot |\Phi(j \cdot \omega_1)|$, а её начальная фаза равна $\arg \Phi(j \cdot \omega_1)$.

В полученных выражениях функция $\Phi(j \cdot \omega)$ характеризует динамические свойства самой системы и не зависит от характера приложенных к системе воздействий. Она может быть получена из передаточной функции системы (6.5). Для этого следует в передаточной функции заменить p на $j \cdot \omega$.

Функция $\Phi(j \cdot \omega)$ от непрерывного аргумента ω называется амплитудно-фазовой характеристикой системы по отношению к управляющему воздействию $g(t)$, приложенному к системе. Исходя из формулы (6.7), амплитудно-фазовая характеристика может быть так же, как отношение спектральной характеристики сигнала на выходе системы к спектральной характеристике сигнала на её входе. Модуль амплитудно-фазовой характеристики $|\Phi(j \cdot \omega)|$ характеризует изменение амплитуды гармонического сигнала при прохождении последнего через систему, а её аргумент – фазовый сдвиг сигнала. Функция $|\Phi(j \cdot \omega)|$ получила название амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), а функция $\arg \Phi(j \cdot \omega)$ – фазовой частотной характеристики (ФЧХ) системы.

Пример 6.1. Определить амплитудно-частотную и амплитудно-фазовую характеристики линейной автоматической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$0.01 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 0.14 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = g(t) . \quad (6.11)$$

Решение. Пусть $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования. Тогда дифференциальное уравнение (6.11) принимает вид

$$(0.01 \cdot p^2 + 0.14 \cdot p + 1) \cdot x(t) = g(t) .$$

Используя обозначения

$$(0.01 \cdot p^2 + 0.14 \cdot p + 1) = D(p) , \quad 1 = M(p) , \quad (6.12)$$

уравнение (6.11) перепишем в сокращенном виде

$$D(p) \cdot x(t) = M(p) \cdot g(t).$$

Из последнего уравнения передаточная функция автоматической системы в операторной форме записи по отношению к управляющему воздействию $g(t)$ есть

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{D(p)},$$

или, с учётом (6.12),

$$\Phi(p) = \frac{1}{0.01 \cdot p^2 + 0.14 \cdot p + 1}. \quad (6.13)$$

Пусть воздействие $g(t) = \sin t$. Определим изменение сигнала $x(t)$ на выходе автоматической системы в установившемся режиме. Для этого преобразуем обе части уравнения (6.11) по Фурье, при этом имеем в виду, что

$$F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} \cdot dt, \quad F\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} \cdot dt$$

и $n=2$, $a_0=0.01$, $a_1=0.14$, $a_2=1$, $b_0=0$, $b_1=0$, $b_2=1$, с учётом этого равенство (6.7) принимает вид

$$\Phi(j \cdot \omega) = \frac{F\{x(t)\}}{F\{g(t)\}} = \frac{1}{0.01 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 0.14 \cdot (j \cdot \omega) + 1}, \quad (6.14)$$

Вспользуемся равенством

$$F\{g(t)\} = F\{\sin t\} = \frac{\pi}{j} \cdot [\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)].$$

Тогда спектральная характеристика вынужденных колебаний регулируемой величины определяется из выражения (6.8) в виде

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= \Phi(j \cdot \omega) \cdot \frac{A_1 \cdot \pi}{j} \cdot [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)] = \\ &= \frac{1}{0.01 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 0.14 \cdot (j \cdot \omega) + 1} \cdot \frac{\pi}{j} \cdot [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]. \end{aligned}$$

Представим комплексную функцию $\Phi(j \cdot \omega)$ в показательной форме

$$\Phi(j \cdot \omega) = |\Phi(j \cdot \omega)| \cdot e^{j \cdot \arg \Phi(j \cdot \omega)}$$

и найдем $x(t)$ по формуле обратного преобразования Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F\{x(t)\} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega.$$

В соответствии с формулой (6.10) получим

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cdot |\Phi(j \cdot \omega_1)| \cdot \sin[\omega_1 \cdot t + \arg \Phi(j \cdot \omega_1)] = \\ &= \left| \frac{1}{0.01 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 0.14 \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right| \cdot \sin \left[t + \arg \left(\frac{1}{0.01 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 0.14 \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Найдём аналитическое выражение для амплитудно-частотной характеристики. Для этого преобразуем следующее выражение

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{0.01 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 0.14 \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right| &= \left| \frac{1}{-0.01 \cdot \omega^2 + 0.14 \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) + j \cdot 0.14 \cdot \omega} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) + j \cdot 0.14 \cdot \omega} \cdot \frac{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) - j \cdot 0.14 \cdot \omega}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) - j \cdot 0.14 \cdot \omega} \right| = \\ &= \left| \frac{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) - j \cdot 0.14 \cdot \omega}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + (0.14 \cdot \omega)^2} \right| = \\ &= \left| \frac{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + (0.14 \cdot \omega)^2} - j \cdot \frac{0.14 \cdot \omega}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + (0.14 \cdot \omega)^2} \right| = \\ &= \sqrt{\left(\frac{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + (0.14 \cdot \omega)^2} \right)^2 + \left(\frac{0.14 \cdot \omega}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + (0.14 \cdot \omega)^2} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + (0.14 \cdot \omega)^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, амплитудно-частотная характеристика автоматической системы (7.11) имеет вид

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + (0.14 \cdot \omega)^2}}, \quad (6.15)$$

а её график представлен на рисунке 6.1.

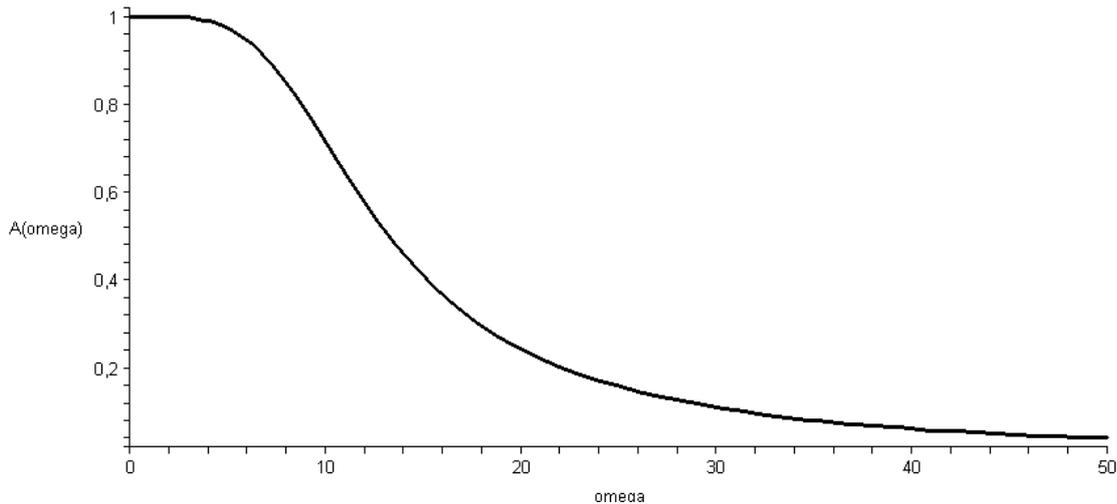


Рисунок 6.1. – График амплитудно-частотной характеристики автоматической системы

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики заданной автоматической системы имеет вид

$$\Phi(j \cdot \omega) = \frac{F\{x(t)\}}{F\{g(t)\}} = \frac{1}{0.01 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 0.14 \cdot (j \cdot \omega) + 1}$$

В последнем равенстве выделим действительную и мнимую части

$$\begin{aligned} \Phi(j \cdot \omega) &= \frac{1}{0.01 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 0.14 \cdot (j \cdot \omega) + 1} = \frac{1}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) + j \cdot 0.14 \cdot \omega} = \\ &= \frac{1}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) + j \cdot 0.14 \cdot \omega} \cdot \frac{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) - j \cdot 0.14 \cdot \omega}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) - j \cdot 0.14 \cdot \omega} = \\ &= \frac{(1 - 0.01 \cdot \omega^2) - j \cdot 0.14 \cdot \omega}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + j \cdot (0.14 \cdot \omega)^2} = \\ &= \frac{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + j \cdot (0.14 \cdot \omega)^2} - j \cdot \frac{0.14 \cdot \omega}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + j \cdot (0.14 \cdot \omega)^2} . \\ \Phi(j \cdot \omega) &= \frac{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)}{(1 - 0.01 \cdot \omega^2)^2 + j \cdot (0.14 \cdot \omega)^2} - \end{aligned}$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru