ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава 1. Экономика обмена 10
1.1. Допустимые и Парето-оптимальные распределения 10
1.2. Закон Вальраса и равновесие по Вальрасу 27
1.3. Существование и единственность равновесия 35
1.4. Теоремы благосостояния 50
1.5. Упражнения 68
1.6. Ответы к упражнениям 72
Приложения 106
1. Задача на поиск Парето-оптимума и дифференциальная характеристика Парето-оптимальных распределений 106
2. Базовые определения и утверждения из теории выбора потребителя в условиях определенности 112

Глава 2. Выбор и обмен в условиях неопределенности 120
2.1. Индивидуальный выбор в условиях неопределенности 120
2.1.1. Лотереи 121
2.1.2. Отношение к риску 124
2.1.3. Функция ожидаемой полезности 126
2.1.4. Функция ожидаемой полезности и отношение к риску 130
2.1.5. Денежный (гарантированный) эквивалент лотереи и премия за риск 135
2.1.6. Единственность функции ожидаемой полезности 140
2.1.7. Приложения теории ожидаемой полезности 142
2.1.8. Модель с контингентными благами 157
2.1.9. Сравнительная статика 170
2.2. Экономика обмена контингентными благами 191
2.2.1. Описание экономики 191
2.2.2. Парето-оптимальные распределения 193
2.2.3. Равновесие 203
2.2.4. Равновесие и оптимальность 206
2.3. Упражнения 217
2.4. Ответы к упражнениям 222

Глава 3. Экономика с производством 254
3.1. Экономика с одним потребителем 254
3.1.1. Парето-оптимальные распределения 254
3.1.2. Равновесие по Вальрасу и закон Вальраса. Существование равновесия 266
3.1.3. Равновесие и Парето-оптимальность 278

3.2. Экономика с двумя потребителями 287
3.3. Квазилинейная экономика 292
3.3.1. Парето-оптимальные распределения 293
3.3.2. Равновесие по Вальрасу 295
3.3.3. Равновесие и оптимальность 301
3.3.4. Совокупный спрос и предложение 302
3.3.5. Сравнительная статика 306
3.3.6. Рыночная власть 309
3.4. Упражнения 318
3.5. Ответы к упражнениям 329

Глава 4. Провалы рынка 417
4.1. Экономика с экстерналиями 417
4.1.1. Описание экономики с экстерналиями 418
4.1.2. Решение проблемы экстерналий 422
4.1.3. Экстерналии в квазилинейной экономике 428
4.1.4. Как исправить провалы рынка 433
4.2. Экономика с общественным благом 443
4.2.1. Допустимые и Парето-оптимальные распределения 443
4.2.2. Равновесие с добровольным финансированием 450
4.2.3. Равновесие по Линдалю. Стимулирование добровольных взносов 456
4.2.4. Общественное благо в квазилинейной экономике 460
4.3. Упражнения 473
4.4. Ответы к упражнениям 482

Литература 524

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебнике «Микроэкономика рыночного равновесия» изложен теоретический материал, сопровождаемый упражнениями с решениями. При определении тем, вошедших в учебник, мы руководствовались следующим: соответствующие разделы в других учебниках и пособиях по микроэкономике изложены таким образом, что для наглядной демонстрации развития экономической модели в единой стилистике их требуется существенно дополнить. Под дополнением не подразумевается техническое усложнение, речь идет о согласованном изложении теории в рамках единого подхода.

Здесь не излагаются начальные темы микроэкономического анализа (поведение потребителя и производителя в условиях определенности), поскольку существует ряд общепризнанных учебников, таких, например, как «Микроэкономика: промежуточный уровень. Современный подход» Хэла Вэриана, где содержащие эти темы разделы представлены последовательно и без перегрузки техническими деталями. Однако даже в таких высокопрофессиональных изданиях при переходе к темам, для которых эти базовые разделы должны были стать теоретическим фундаментом (например, к общему равновесию или провалам рынка), у неподготовленного читателя может сложиться впечатление, что пройденный ранее материал представлял собой замкнутую теорию, не имеющую развития, а теперь необходимо изучить совершенно новый раздел.

В учебнике рассматриваются следующие темы: экономика обмена, выбор потребителя в условиях неопределенности, экономика обмена контингентными благами, равновесие в экономике с производством (включая модель частичного равновесия) и провалы рынка (экстерналии и общественные блага).

Глава «Экономика обмена» включена во все учебники микроэкономики бакалаврского уровня. Однако, поскольку в дальнейшем идеи общего равновесия не развиваются, она воспринимается некой далекой от реальности абстракцией, тогда как по сути именно эта модель является базовой для модели общего равновесия, получившей прикладное развитие в направлении «Расчетные модели общего равновесия». В предлагаемом учебнике это первая глава, в которой задается общая структура изучения модели: что является допустимым состоянием экономики, какие состояния экономики оптимальны по Парето и что произойдет, если предоставить возможность каждому из агентов действовать самостоятельно. Именно этой структуре мы следуем на протяжении всего изложения, вводя все новые и новые предпосылки, «совершенствуя» модель. Несмотря на «абстрактность» модель экономики обмена дает возможность сформулировать важные утверждения микроэкономического анализа: первую и вторую теоремы благосостояния,

связывающие понятия равновесия по Вальрасу и Парето-оптимального распределения.

Во второй главе, «Выбор и обмен в условиях неопределенности», рассматривается моделирование поведения потребителя в ситуации, когда выбор может привести к различным исходам, и анализируются взаимодействия потребителей в таких условиях. В главе излагается подход к моделированию поведения потребителя, отличающийся, в виду новых предпосылок модели, от используемого в первой главе. Кроме этого, показан важный прием экономико-математического моделирования, а именно, каким образом совершенно новая задача может быть сведена к уже хорошо известной с тем, чтобы применить освоенный инструментарий для получения новых результатов: выбор потребителя в условиях неопределенности, не предполагающий выбора наборов благ, тем не менее может быть представлен аналогично выбору потребителя в условиях определенности. По сути, этой же идее посвящен и параграф «Экономика обмена контингентными благами»: переинтерпретация известной модели экономики обмена помогает получить ответы на новые вопросы.

Как следует из названия, в главе «Экономика с производством» в модель общего равновесия вводится технология. Максимально подробно, в соответствии со структурой, заданной в главе «Экономика обмена», здесь рассматривается самый простой случай, когда в экономике только один производитель и один потребитель — с тем, чтобы заложить базу для изучения следующих глав. В дальнейшем показывается, как обобщить модель для случая двух потребителей. Ни один учебник по микроэкономике не обошелся без рассмотрения перекрещивающихся кривых спроса и предложения, и этот не стал исключением. Однако в нашем изложении о модели частичного равновесия (а речь идет именно о ней) говорится в контексте развития модели общего равновесия с производством. И более того, в учебнике показано, как естественно из модели частичного равновесия вытекает модель монополии. На основании своего многолетнего опыта можем утверждать, что такое изложение, позволяющее видеть связь разделов, упрощает освоение курса.

Последнее верно и для четвертой главы, «Провалы рынка», включающей темы «Экстерналии» и «Общественные блага». В учебнике, помимо того, что глава, посвященная провалам рынка, рассматривается в контексте модели общего равновесия, для большей наглядности рассматривается опять же случай частичного равновесия — чтобы еще раз продемонстрировать, каким образом можно в уже известную модель вводить дополнительные предположения. Оторванное от предыдущего материала изложение способствует формированию у читателей неверного представления о том, что в микроэкономике для каждой новой проблемы нужна новая модель, с новыми предпосылками и новым подходом к решению.

Степень формализации изложения в предлагаемом учебнике выше степени формализации изложения в учебнике Х. Вэриана, однако ненамного, и касается это в основном записи определений. Математические знания, требующиеся для освоения материала, выходят за рамки средней школы только в том, что касается взятия частной производной. Метод множителей Лагранжа, часто используемый в курсах продвинутого уровня, применяется один раз и не в основном тексте, а в приложении, поэтому легко может быть опущен. Все понятия и утверждения в учебнике иллюстрируются большим количеством рисунков для упрощения восприятия материала.

Отметим, что этот подход был успешно протестирован на студентах НИУ ВШЭ, МФТИ (ГУ), МШЭ МГУ, которым мы благодарны за вопросы и даже за ошибки при выполнении заданий, поскольку это помогало нам лучше структурировать материал.

Мы всегда рады возможности публично сердечно поблагодарить ординарного профессора НИУ ВШЭ Бусыгина Владимира Петровича за помощь в профессиональном становлении, поддержку и критический подход. Мы благодарим ординарного профессора НИУ ВШЭ Левина Марка Иосифовича, возглавлявшего кафедру микроэкономического анализа НИУ ВШЭ, за возможность профессионального роста. И ни в коем случае мы не можем обойти благодарностью за удовольствие от совместной работы и продуктивное сотрудничество старшего преподавателя РАНХиГС, ведущего эксперта Проектной лаборатории развития интеллектуальных состязаний по экономике НИУ ВШЭ Балакину Татьяну Петровну.

Е.А. Левина, Е.В. Покатович

1
ГЛАВА

ЭКОНОМИКА ОБМЕНА

Рассмотрим наиболее простой вариант модели замкнутой экономики — экономику, в которой отсутствует производство и все сделки между экономическими агентами носят обменный характер. Такую экономику принято называть *экономикой обмена*. Предложение благ в ней формируется за счет экзогенно заданного первоначального запаса благ у потребителей. Будем также исходить из следующих предпосылок: 1) всем потребителям открыт доступ на все рынки, где блага торгуются по одинаковым для всех потребителей ценам, которые они принимают заданными (т.е. имеет место совершенная конкуренция); 2) отсутствуют прямые внешние воздействия (экстерналии) потребителей друг на друга; 3) отсутствует асимметрия информации между потребителями относительно цен и свойств благ.

1.1. ДОПУСТИМЫЕ И ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим экономику с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Объем потребления блага i, $i = 1, 2$, потребителем k, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, обозначим через x_i^k. Таким образом, объем потребления, скажем, первого блага потребителем B обозначается через x_1^{B}. Пусть предпочтения потребителей представимы непрерывными функциями полезности $u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right)$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right)$. Потребители владеют первоначальными запасами благ $\omega^{\mathrm{A}} = \left(\omega_1^{\mathrm{A}}, \omega_2^{\mathrm{A}}\right)$ и $\omega^{\mathrm{B}} = \left(\omega_1^{\mathrm{B}}, \omega_2^{\mathrm{B}}\right)$. Для удобства введем обозначения для суммарного запаса каждого блага в экономике, $\omega_1 = \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}$ и $\omega_2 = \omega_2^{\mathrm{A}} + \omega_2^{\mathrm{B}}$, а также для вектора первоначальных запасов, $\omega = \left(\omega^{\mathrm{A}}, \omega^{\mathrm{B}}\right)$. Будем считать, что отдельный потребитель может не иметь запаса одного из благ, но совокупный запас каждого блага в экономике положителен.

Определение 1.1. *Распределением* (состоянием экономики) в двухтоварной экономике с двумя потребителями будем называть набор, специфицирующий объем потребления каждого блага каждым потребителем: $x = \left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}, x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right)$. ■

Поскольку в экономике обмена отсутствует производство и объем каждого блага, доступный для потребления, определяется экзогенно заданным совокупным запасом, то распределения, в которых совокупное потребление хотя бы одного блага превышает имеющийся запас этого блага в экономике, не могут реализоваться или, как говорят, являются недопустимыми.

Определение 1.2. *Допустимым распределением* будем называть распределение $x = \left(x_1^{\mathrm{A}},\, x_2^{\mathrm{A}},\, x_1^{\mathrm{B}},\, x_2^{\mathrm{B}}\right)$, такое, что $x_1^{\mathrm{A}} + x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1$ и $x_2^{\mathrm{A}} + x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2$[1]. ■

Для иллюстрации понятий, изучаемых в двухтоварной экономике обмена с двумя потребителями, удобно использовать такой графический инструмент, как *ящик Эджворта*. Изобразим этот ящик по следующему алгоритму. Сначала нарисуем стандартные оси для потребителя A. Затем отметим по оси $0^{\mathrm{A}}x_1^{\mathrm{A}}$ значение ω_1, а по оси $0^{\mathrm{A}}x_2^{\mathrm{A}}$ — значение ω_2. Через эти метки проведем оси для системы координат потребителя B. При этом оси по каждому благу для потребителя B направлены в противоположные стороны по отношению к осям соответствующих благ для потребителя A, как показано на рис. **1.1**. Таким образом, по построению размеры ящика Эджворта определяются совокупными запасами благ, любое допустимое состояние экономики отмечается в ящике Эджворта одной точкой, а сам он представляет собой множество всех допустимых распределений благ в экономике.

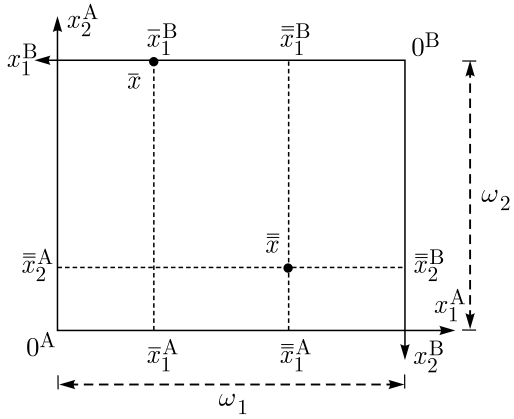

Рис. 1.1. Ящик Эджворта

На рис. **1.1** в ящике Эджворта отмечены два распределения, $\overline{x} = \left(\overline{x}_1^{\mathrm{A}}, \overline{x}_2^{\mathrm{A}}, \overline{x}_1^{\mathrm{B}}, \overline{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$ и $\overline{\overline{x}} = \left(\overline{\overline{x}}_1^{\mathrm{A}}, \overline{\overline{x}}_2^{\mathrm{A}}, \overline{\overline{x}}_1^{\mathrm{B}}, \overline{\overline{x}}_2^{\mathrm{B}}\right)$. В распределении $\overline{\overline{x}}$ каждый

[1] Вообще говоря, распределения, в которых совокупное потребление каждого блага меньше совокупного запаса этого блага, также возможны. Однако в дальнейшем для упрощения анализа мы будем считать, как отмечено в определении **1.2**, что условия допустимости выполняются как равенства.

потребитель обладает положительным количеством каждого блага — такие распределения будем называть *внутренними*. В распределении $\overline{x}$ в наборе потребителя B отсутствует второе благо (соответственно весь совокупный запас второго блага принадлежит потребителю A). Распределения, в которых хотя бы у одного потребителя в наборе отсутствует хотя бы одно благо, будем называть *граничными*. Для того чтобы проиллюстрировать процесс обмена в ящике Эджворта, рассмотрим переход из точки $\overline{x}$ в точку $\overline{\overline{x}}$. Для потребителя A это означает отказ от $\left(\omega_2 - \overline{\overline{x}}_2^{\mathrm{A}}\right)$ единиц второго блага в обмен на $\left(\overline{\overline{x}}_1^{\mathrm{A}} - \overline{x}_1^{\mathrm{A}}\right)$ единиц первого блага, а для потребителя B, наоборот, такое перераспределение благ приводит к уменьшению количества первого блага на $\left(\overline{x}_1^{\mathrm{B}} - \overline{\overline{x}}_1^{\mathrm{B}} = \omega_1 - \overline{x}_1^{\mathrm{A}} - \left(\omega_1 - \overline{\overline{x}}_1^{\mathrm{A}}\right) = \overline{\overline{x}}_1^{\mathrm{A}} - \overline{x}_1^{\mathrm{A}}\right)$ в обмен на увеличение количества второго блага на $\overline{\overline{x}}_2^{\mathrm{B}} = \omega_2 - \overline{\overline{x}}_2^{\mathrm{A}}$.

В отношении допустимых распределений возникает три основных вопроса: какие из них эффективны с точки зрения общества в целом? какие из них являются результатом рыночного взаимодействия экономических агентов, рационально заинтересованных только в максимизации собственного благосостояния? И, наконец, как соотносятся распределения, являющиеся ответом на первый и второй вопросы? Далее в гл. 1 будут последовательно рассмотрены все эти вопросы, а пока займемся первым из них.

Традиционно в микроэкономической литературе под эффективным, или оптимальным, распределением понимают такое допустимое распределение, что перераспределение благ между потребителями неизбежно ухудшит положение хотя бы одного потребителя, т.е. в эффективном распределении исчерпаны все возможности взаимовыгодного обмена между потребителями. Такой критерий оптимальности распределения ресурсов в экономике был предложен В. Парето и поэтому носит его имя.

Определение 1.3. Допустимое распределение $\overline{x} = \left(\overline{x}_1^{\mathrm{A}}, \overline{x}_2^{\mathrm{A}}, \overline{x}_1^{\mathrm{B}}, \overline{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$ называется *Парето-оптимальным*, если нельзя улучшить положение одного потребителя, не ухудшая положения другого[2], т.е. не найдется другого допустимого распределения $\widehat{x} = \left(\widehat{x}_1^{\mathrm{A}}, \widehat{x}_2^{\mathrm{A}}, \widehat{x}_1^{\mathrm{B}}, \widehat{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$, такого, что $u^{\mathrm{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathrm{A}}, \widehat{x}_2^{\mathrm{A}}\right) \geqslant u^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathrm{A}}, \overline{x}_2^{\mathrm{A}}\right)$ и $u^{\mathrm{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathrm{B}}, \widehat{x}_2^{\mathrm{B}}\right) \geqslant u^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}_1^{\mathrm{B}}, \overline{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$, причем хотя бы одно из неравенств выполнено как строгое. ■

Другими словами, допустимое распределение является Парето-оптимальным, если для него невозможно построить *Парето-улучшения*, т.е. нельзя допустимым образом перераспределить ресурсы между потребителями, чтобы положение одного потребителя улучшилось, а другого — не ухудшилось.

[2] Или других, если в экономике — более двух потребителей.

Следует заметить, что критерий Парето-оптимальности никак не характеризует распределение благ в обществе с точки зрения справедливости и равенства[3]. Действительно, рассмотрим, например, экономику обмена с двумя потребителями, имеющими строго монотонные предпочтения (т.е. такие, что увеличение (уменьшение) объема хотя бы одного блага в наборе потребителя приводит к улучшению (ухудшению) положения потребителя[4]). Будет ли распределение ресурсов, в котором у потребителя A имеется весь совокупный запас обоих благ, а в наборе потребителя B отсутствуют оба блага (точка начала координат потребителя B в ящике Эджворта), Парето-оптимальным? Попробуем построить Парето-улучшение. Потребитель A, имея весь запас обоих благ, в распределении $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1,\, x_2^{\mathrm{A}} = \omega_2,\, x_1^{\mathrm{B}} = 0,\, x_2^{\mathrm{B}} = 0\right)$ достигает максимально возможного уровня благосостояния на множестве всех допустимых распределений, следовательно, его положение улучшить уже не удастся. У потребителя B, наоборот, в этом распределении — минимально возможный уровень полезности, поэтому можно попробовать улучшить положение B, не ухудшая положения A. Но для того чтобы повысить благосостояние B, в силу строгой монотонности предпочтений нужно так перераспределить ресурсы, чтобы потребитель B получил положительное количество хотя бы одного блага, что неизбежно ухудшит положение потребителя A, поскольку в его наборе объем этого блага уменьшится. Таким образом, при строго монотонных предпочтениях потребителей построить Парето-улучшение для распределения $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1,\, x_2^{\mathrm{A}} = \omega_2,\, x_1^{\mathrm{B}} = 0,\, x_2^{\mathrm{B}} = 0\right)$ невозможно, а следовательно, данное распределение является Парето-оптимальным.

Пример 1.1. Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности вида $u^k\left(x^k\right) = \min\left\{x_1^k, x_2^k\right\}$, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$. Пусть совокупный запас обоих благ в экономике одинаков: $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega > 0$ (ящик Эджворта имеет форму квадрата). Найдем Парето-оптимальные распределения в этой экономике.

Начнем с графической иллюстрации, изобразив схематично в ящике Эджворта типичные кривые безразличия[5] потребителей — пунктирной линией для потребителя B и сплошной для потребителя A. Для обоих потребителей блага являются взаимодополняющими (комплементарными) в пропорции один к одному. Уравнение произвольной кривой безразличия

[3] Различные подходы к анализу справедливости распределения ресурсов, как правило, обсуждаются в рамках экономики общественного сектора, и, стараясь быть последовательными в изложении микроэкономического анализа рынков, мы оставим эти подходы за рамками текущего изложения.

[4] Формальное определение строгой монотонности предпочтений приведено в приложении 2 к этой главе.

[5] Определение кривых безразличия приведено в приложении 2 к этой главе.

потребителя k, $k = \text{A, B}$, имеет вид: $\min\left\{x_1^k, x_2^k\right\} = \overline{u}^k$, где $\overline{u}^k$ — неотрицательная константа. Наборы, удовлетворяющие этому уравнению, можно записать так: $x_1^k = \overline{u}^k$, $x_2^k \geqslant \overline{u}^k$ и $x_1^k \geqslant \overline{u}^k$, $x_2^k = \overline{u}^k$. Таким образом, кривые безразличия представляют собой «уголки», «вершины» которых лежат на луче $x_1^k = x_2^k$, $k = \text{A, B}$.

В силу того, что совокупные запасы обоих благ одинаковы, прямые $x_1^{\text{A}} = x_2^{\text{A}}$ и $x_1^{\text{B}} = x_2^{\text{B}}$ в ящике Эджворта совпадают и представляют собой его диагональ (рис. **1.2**).

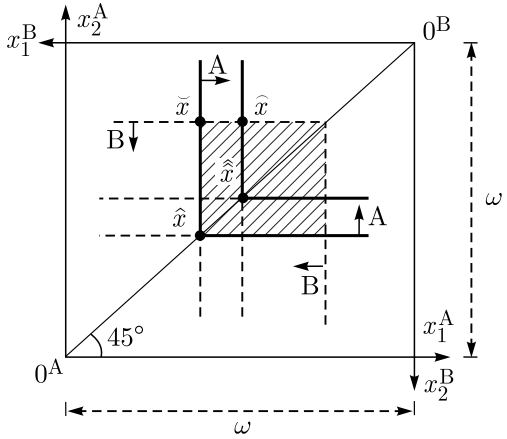

Рис. 1.2. Ящик Эджворта и типичные кривые безразличия потребителей в экономике из примера **1.1** (стрелками указано направление роста полезности)

Построение кривых безразличия в ящике Эджворта условно делит его на три области: распределения, лежащие на, выше и ниже диагонали.

Рассмотрим внутренние распределения на диагонали, подобные отмеченным на рис. **1.2** точкам $\widehat{x}$ и $\widehat{\widehat{x}}$. Как видно из рисунка, в этих точках, как и во всех точках на диагонали, кривые безразличия соприкасаются «вершинами» «уголков», соответственно множество наборов не хуже данного для одного потребителя не пересекается с множеством наборов лучше данного для другого потребителя, а это означает, что для любого такого распределения нельзя построить Парето-улучшение. Действительно, в распределениях, лежащих на диагонали, $x_1^k = x_2^k$, $k = \text{A, B}$, и $u^k\left(x_1^k = x_2^k\right) = \min\left\{x_1^k, x_2^k\right\} = x_1^k = x_2^k$. Тогда для того, чтобы улучшить положение потребителя, нужно предложить такое перераспределение благ, чтобы потребитель получил большее количество каждого блага (увеличение количества только одного блага в наборе потребителя не изменит уровня его полезности). Но увеличив количество каждого блага, например, в наборе потребителя A, на $\varepsilon_i > 0$, $i = 1,\ 2$, на эту же величину уменьшим количество каждого блага в наборе потребителя B, придя к распределению $\left(x_1^{\text{A}} + \varepsilon_1, x_2^{\text{A}} + \varepsilon_2, x_1^{\text{B}} - \varepsilon_1, x_2^{\text{B}} - \varepsilon_2\right)$. Тогда полезность потребителя B снизится: $u^k\left(x_1^{\text{B}} - \varepsilon_1, x_2^{\text{B}} - \varepsilon_2\right) = \min\{x_1^{\text{B}} - \varepsilon_1, x_2^{\text{B}} - \varepsilon_2\} < x_1^{\text{B}} = x_2^{\text{B}}$. При

некоторых $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0$ для точки $\widehat{x}$ на рис. **1.2** такое перераспределение означает переход в точку $\widehat{\widehat{x}}$. Следовательно, внутренние распределения на диагонали ящика Эджворта являются Парето-оптимальными. Граничные распределения, соответствующие точкам начала координат, также лежащие на диагонали, тоже являются Парето-оптимальными. Например, возьмем точку начала координат потребителя A: $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0, x_2^{\mathrm{A}} = 0, x_1^{\mathrm{B}} = \omega, x_2^{\mathrm{B}} = \omega\right)$. В этой точке полезность потребителя A равна 0 — минимально возможному уровню среди всех допустимых распределений, а полезность потребителя B равна ω — максимально возможному уровню среди всех допустимых распределений. Попытка улучшить положение потребителя A за счет увеличения в его наборе объема каждого блага неизбежно ухудшит положение потребителя B, а улучшить его положение в данной экономике невозможно. Аналогичные рассуждения можно провести о точке начала координат потребителя B. Таким образом, диагональ ящика Эджворта, включая граничные точки, представляет собой множество Парето-оптимальных распределений.

Проанализируем теперь множество распределений, лежащих выше диагонали, подобных точкам $\breve{x}$ и $\widehat{x}$ на рис. **1.2**. Рассмотрим, например, точку $\breve{x}$. Если провести через нее кривые безразличия потребителей A и B и отметить множество наборов не хуже данного для одного потребителя и лучше — для другого, то получим заштрихованный на рисунке прямоугольник. Распределения, принадлежащие этому прямоугольнику, представляют собой множество Парето-улучшений для распределения $\breve{x}$, а следовательно, распределение $\breve{x}$ не является Парето-оптимальным. Приведем пример построения Парето-улучшения для распределения $\breve{x}$. В точке $\breve{x}$, как и в любой точке, лежащей выше диагонали ящика Эджворта, выполнено: $\breve{x}_1^{\mathrm{A}} < \breve{x}_2^{\mathrm{A}}$ и $\breve{x}_1^{\mathrm{B}} > \breve{x}_2^{\mathrm{B}}$, соответственно $u^{\mathrm{A}}\left(\breve{x}^{\mathrm{A}}\right) = \breve{x}_1^{\mathrm{A}}$ и $u^{\mathrm{B}}\left(\breve{x}^{\mathrm{B}}\right) = \breve{x}_2^{\mathrm{B}}$. Рассмотрим распределение $\widehat{x} = \left(\widehat{x}_1^{\mathrm{A}} = \breve{x}_1^{\mathrm{A}} + \delta, \widehat{x}_2^{\mathrm{A}} = \breve{x}_2^{\mathrm{A}}, \widehat{x}_1^{\mathrm{B}} = \breve{x}_1^{\mathrm{B}} - \delta, \widehat{x}_2^{\mathrm{B}} = \breve{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$, где $\delta > 0$, $\widehat{x}_1^{\mathrm{A}} = \breve{x}_1^{\mathrm{A}} + \delta < \widehat{x}_2^{\mathrm{A}} = \breve{x}_2^{\mathrm{A}}$ и $\widehat{x}_1^{\mathrm{B}} = \breve{x}_1^{\mathrm{B}} - \delta > \widehat{x}_2^{\mathrm{B}} = \breve{x}_2^{\mathrm{B}}$. Заметим, что поскольку неравенства строгие, такое положительное число δ всегда найдется, и распределение $\widehat{x}$ допустимо в силу допустимости распределения $\breve{x}$. Тогда $u^{\mathrm{A}}\left(\widehat{x}^{\mathrm{A}}\right) = \widehat{x}_1^{\mathrm{A}} = \breve{x}_1^{\mathrm{A}} + \delta > \breve{x}_1^{\mathrm{A}} = u^{\mathrm{A}}\left(\breve{x}^{\mathrm{A}}\right)$, т.е. в распределении $\widehat{x}$ положение потребителя A лучше, чем в распределении $\breve{x}$, тогда как положение потребителя B осталось неизменным, поскольку $u^{\mathrm{B}}\left(\widehat{x}^{\mathrm{B}}\right) = \widehat{x}_2^{\mathrm{B}} = \breve{x}_2^{\mathrm{B}} = u^{\mathrm{B}}\left(\breve{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Аналогично можно построить Парето-улучшение для любого распределения, лежащего выше диагонали ящика Эджворта.

Действуя по той же схеме, можно построить Парето-улучшение для любого распределения, лежащего ниже диагонали ящика Эджворта. Таким образом, в данном случае множество Парето-оптимальных распределений совпадает с диагональю ящика Эджворта, т.е. его характеристика имеет вид: $x_2^{\mathrm{A}} = x_1^{\mathrm{A}}$, где $0 \leqslant x_1^{\mathrm{A}} \leqslant \omega$. ■

В примере **1.1** кривые безразличия потребителей имели простой вид, что позволило найти множество Парето-оптимальных распределений, действуя непосредственно по определению Парето-оптимума. В случае предпочтений с кривыми безразличия более сложной формы использование такого подхода может оказаться весьма затруднительным, поэтому возникает необходимость в простом критерии, характеризующем Парето-оптимальные распределения.

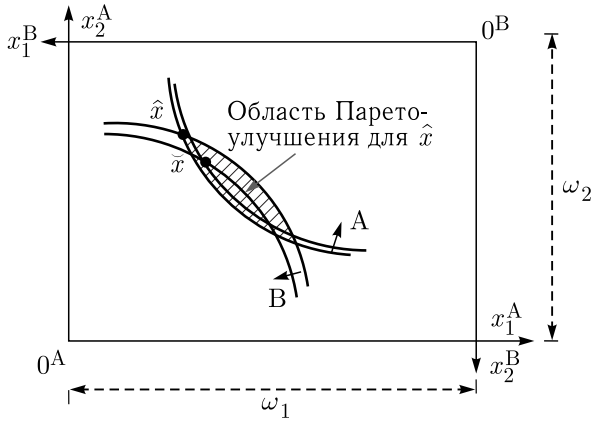

Рис. 1.3. Поиск внутренних Парето-оптимальных распределений в экономике с двумя потребителями, имеющими стандартные предпочтения. Заштрихована область Парето-улучшения для распределения $\widehat{x}$ (стрелками указано направление роста полезности)

Рассмотрим произвольное внутреннее распределение $\widehat{x}$ для случая, когда оба потребителя имеют стандартные предпочтения (строго монотонные и выпуклые предпочтения[6] с гладкими кривыми безразличия) на рис. **1.3**. Проведем через точку $\widehat{x}$ кривые безразличия потребителей и предположим, что они в рассматриваемой точке пересеклись. Будет ли она Парето-оптимальной? Перераспределив ресурсы, сместившись из точки $\widehat{x}$ в любую точку внутри заштрихованной области на рисунке, например, в точку $\breve{x}$, можно повысить благосостояние каждого из потребителей. А при перемещении в любую точку на границе указанной области, т.е. оставшись на одной из кривых безразличия, проходящих через точку $\widehat{x}$, можно улучшить положение одного потребителя, не меняя уровня благосостояния другого. Таким образом, заштрихованная область на рис. **1.3** представляет собой область Парето-улучшения для распределения $\widehat{x}$, а следовательно, распределение $\widehat{x}$ не является Парето-оптимальным[7].

[6] Определения строгой монотонности и строгой выпуклости предпочтений приведены в приложении 2 к этой главе.

[7] Обратите внимание, что распределение $\breve{x}$, хотя и является Парето-улучшением для распределения $\widehat{x}$, само не Парето-оптимально.

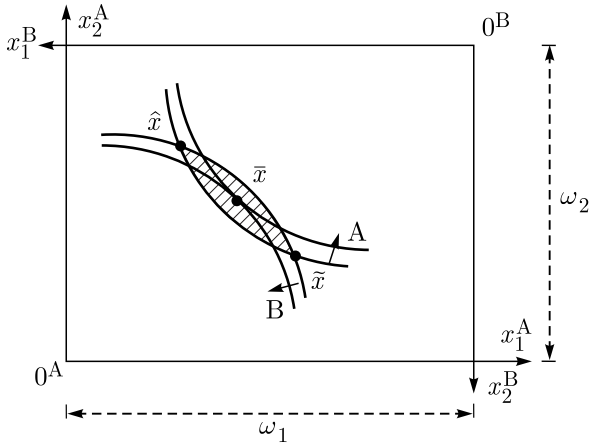

Рис. 1.4. $\overline{x}$ — внутреннее Парето-оптимальное распределение (стрелками указано направление роста полезности)

Тогда внутреннее допустимое распределение будет Парето-оптимальным, когда пропадет линзообразная область, полученная за счет пересечения кривых безразличия, т.е. если в этом распределении будет иметь место касание кривых безразличия (рис. **1.4**). Другими словами, при возрастающих дифференцируемых функциях полезности потребителей во внутренней Парето-оптимальной точке $\overline{x} > 0$ должно быть выполнено условие равенства предельных норм замещения[8] потребителей:

$$MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right). \tag{1.1}$$

Утверждение 1.1. Пусть функции полезности потребителей дифференцируемы, причем $\dfrac{\partial u^k\left(x^k\right)}{\partial x_i^k} > 0$[9] для любого потребителя $k = \mathrm{A}$, B и любого

[8] Предельная норма замещения второго блага первым, MRS_{12} (от *англ.* marginal rate of substitution), показывает, от какого максимального количества малых (дифференциально малых) единиц второго блага готов отказаться потребитель в обмен на одну малую единицу первого блага, т.е. представляет собой наклон (с обратным знаком) кривой безразличия потребителя в пространстве благ (x_1, x_2):

$$MRS_{12}(x) = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}}.$$

[9] Это условие гарантирует строгую монотонность предпочтений потребителей. Обратное утверждение (что из строгой монотонности следует, что значение предельной полезности по каждому благу положительно) не всегда верно, так как в некоторых точках предельная полезность может быть равна нулю. Однако далее в тексте для упрощения изложения мы будем предполагать, что если предпочтения строго монотонны, то значения указанных в утверждении частных производных всегда положительны.

блага $i = 1, 2$ при $x_i^k > 0$. Пусть $\overline{x} = \left(\overline{x}_1^{\mathrm{A}}, \overline{x}_2^{\mathrm{A}}, \overline{x}_1^{\mathrm{B}}, \overline{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$ — внутреннее Парето-оптимальное распределение, тогда $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$.

Доказательство. В первую очередь следует заметить, что поскольку в распределении $\overline{x}$ каждый потребитель имеет положительный объем каждого блага, то всегда существует возможность так перераспределить блага между потребителями, чтобы потребление блага отдельным потребителем как возросло, так и снизилось.

Докажем утверждение от противного: пусть существует внутреннее Парето-оптимальное распределение $\overline{x} = \left(\overline{x}_1^{\mathrm{A}}, \overline{x}_2^{\mathrm{A}}, \overline{x}_1^{\mathrm{B}}, \overline{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$, в котором $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) \neq MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Тогда возможны два случая: 1) $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) > MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ (как в точке $\widehat{x}$ на рис. **1.4**); 2) $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) < MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ (как в точке $\widetilde{x}$ на рис. **1.4**). Рассмотрим первый из них. Поскольку $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) > MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$, то потребитель А в этом распределении ценит первое благо выше, чем потребитель В, следовательно, есть возможность для взаимовыгодного обмена на множестве допустимых распределений. Действительно, потребитель А готов отказаться от $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right)$ малых единиц второго блага в обмен на одну малую единицу первого блага. Тогда, в силу строгой монотонности предпочтений, если потребитель А получит одну малую единицу первого блага, отказавшись от меньшего количества второго блага, скажем, от $\dfrac{MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) + MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)}{2} < MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right)$, то его положение улучшится. Но как скажется такое перераспределение ресурсов на потребителе В? Он готов отказаться от одной малой единицы первого блага в обмен на $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ малых единиц второго блага, а если вместо этого он получит $\dfrac{MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) + MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)}{2}$ малых единиц второго блага, то его благосостояние возрастет, поскольку $\dfrac{MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) + MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)}{2} > MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Таким образом, в результате предложенного допустимого перераспределения благ положение обоих потребителей улучшилось, следовательно, мы пришли к противоречию, и исходное распределение не является Парето-оптимальным.

Предположим теперь, что $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) < MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Находясь в точке $\overline{x}$, потребитель В по определению предельной нормы замещения готов отказаться от $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ малых единиц второго блага в обмен на получение одной малой единицы первого блага, чтобы остаться на той же кривой безразличия. В то же время потребитель А готов обменять одну малую единицу первого блага на $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right)$ малых единиц второго блага. Таким образом, если отказ от одной малой единицы первого блага для потребителя А будет компенсирован получением $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ малых единиц второго блага, то в силу строгой монотонности предпочтений его благосостояние возрастет, поскольку $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right) > MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right)$. Следовательно, в резуль-

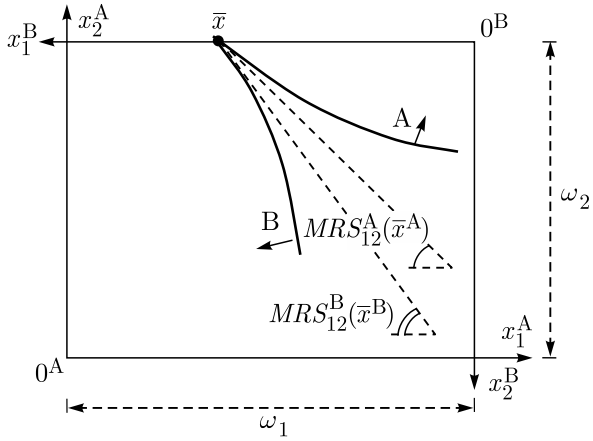

Рис. 1.5. $\overline{x}$ — граничное Парето-оптимальное распределение (стрелками указано направление роста полезности)

тате такого допустимого перераспределения ресурсов положение потребителя A улучшится, а положение потребителя B останется неизменным; это означает, что распределение $\overline{x}$ не является Парето-оптимальным. ■

Заметим, во-первых, что в утверждении **1.1** говорится о внутренних Парето-оптимальных распределениях. В граничных Парето-оптимальных точках оно может быть и неверным[10]. Так, на рис. **1.5** изображено граничное Парето-оптимальное распределение $\overline{x}$, в котором $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) < < MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Неравенство предельных норм замещения в граничных Парето-оптимальных точках также проиллюстрировано в примере **1.2**.

Пример 1.2. Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности вида $u^k\left(x^k\right) = = \alpha^k x_1^k + x_2^k$, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, где $\alpha^{\mathrm{A}} > \alpha^{\mathrm{B}} > 0$. Найдем множество Парето-оптимальных распределений в этой экономике при произвольных положительных совокупных запасах благ.

Согласно данным функциям полезности каждый потребитель всегда готов заменить α^k единиц второго блага на одну единицу первого блага. Другими словами, $MRS_{12}^k\left(x^k\right) = \alpha^k$ для любого $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, и кривые безразличия представляют собой прямые с наклоном $\left(-\alpha^k\right)$. Поскольку по условию $\alpha^{\mathrm{A}} > \alpha^{\mathrm{B}}$, то кривые безразличия потребителя A в ящике Эджворта всюду более крутые (т.е. вертикальнее), чем кривые безразличия потребителя B, соответственно ни в одной точке ящика Эджворта не может иметь место касание кривых безразличия. Тогда согласно утверждению **1.1** в данной экономике отсутствуют внутренние Парето-оптимальные распре-

[10] Подробнее о характеристике граничных Парето-оптимальных распределений см. в приложении 1 к этой главе.

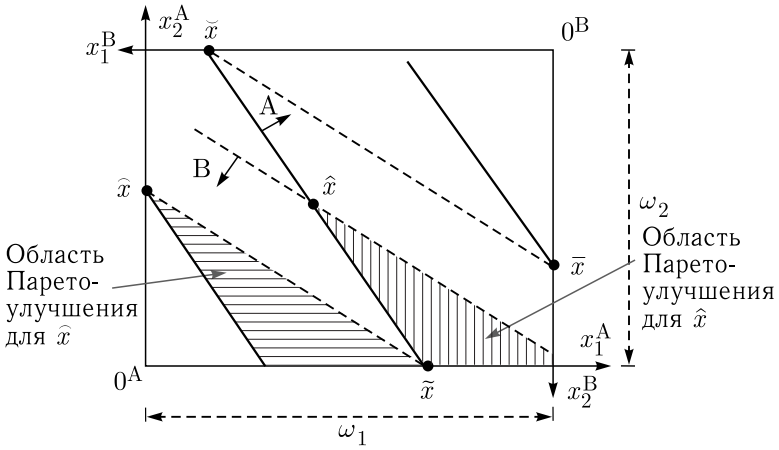

Рис. 1.6. **Поиск Парето-оптимальных распределений в экономике, описанной в примере 1.2 (стрелками указано направление роста полезности)**

деления. Найдем множество граничных Парето-оптимальных распределений с помощью графической иллюстрации, приведенной на рис. **1.6**, где кривые безразличия потребителя A — сплошные линии, а кривые безразличия потребителя B — пунктирные.

На рис. **1.6** вертикальной штриховкой отмечено множество Парето-улучшений для произвольного внутреннего распределения $\widehat{x}$. Хотя внутренняя точка ожидаемо оказалась не Парето-оптимальной, расположение соответствующей области Парето-улучшения наводит на мысль, что Парето-оптимальные распределения стоит искать на нижней и правой стенках ящика Эджворта. Действительно, в любой точке на нижней стенке ящика Эджворта, подобных точке $\widetilde{x}$, множество наборов не хуже $\widetilde{x}$ для одного потребителя не пересекается с множеством наборов лучше $\widetilde{x}$ для другого потребителя, а следовательно, данное распределение Парето-оптимально. Аналогичная картина наблюдается и для любого распределения на правой стенке ящика Эджворта (см., например, распределение $\overline{x}$ на рис. **1.6**). Если же возьмем точку на левой стенке ящика Эджворта, например $\widehat{x}$, то увидим, что для нее существует область Парето-улучшения, отмеченная на рисунке горизонтальной штриховкой. Аналогично можно показать, что точки на верхней стенке ящика Эджворта, подобные точке $\breve{x}$, не являются Парето-оптимальными.

Точки начала координат для обоих потребителей Парето-оптимальны по определению, поскольку предпочтения потребителей в данной экономике строго монотонны. Таким образом, Парето-оптимальные распределения лежат на нижней и правой стенках ящика Эджворта, где $0 \leqslant x_1^{\mathrm{A}} \leqslant \omega_1$ при $x_2^{\mathrm{A}} = 0$ и $0 \leqslant x_2^{\mathrm{A}} \leqslant \omega_2$ при $x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1$. Все Парето-оптимальные распределения являются граничными, и в любой Парето-оптимальной точке $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(x^{\mathrm{A}}\right) > MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(x^{\mathrm{B}}\right)$. ■

Во-вторых, согласно утверждению **1.1** равенство предельных норм замещения — необходимое условие внутреннего Парето-оптимума, но будет ли это условие также и достаточным? Другими словами, когда, найдя внутреннее допустимое распределение, в котором имеет место касание кривых безразличия, можно быть уверенным, что найден Парето-оптимум? На рис. **1.7** во внутреннем распределении $\widetilde{x}$ выполнено условие равенства предельных норм замещения, однако распределение $\widetilde{x}$ не является Парето-оптимальным: например, в допустимом распределении $\overline{\overline{x}}$ по сравнению с распределением $\widetilde{x}$ благосостояние потребителя B выше, тогда как положение потребителя A остается неизменным. Проблема в том, что предпочтения потребителя A на рис. **1.7** не являются выпуклыми, и общая касательная к кривым безразличия не позволяет отделить множество наборов не хуже данного для одного потребителя от множества наборов лучше данного для другого. Однако следует отметить, что в Парето-оптимальном распределении $\overline{x}$ по-прежнему имеет место касание кривых безразличия.

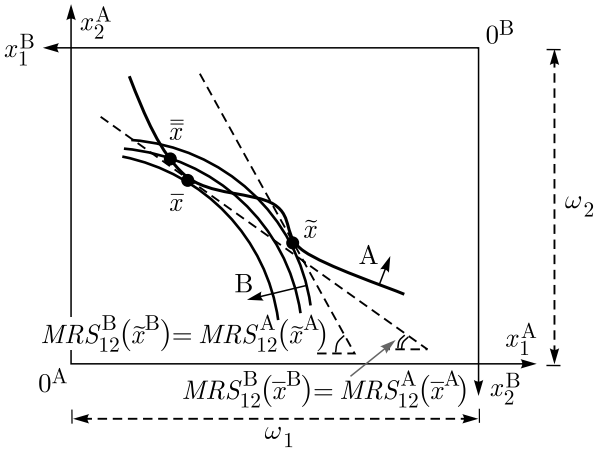

Рис. 1.7. Предпочтения потребителя A не являются выпуклыми. Распределение $\widetilde{x}$, в котором $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\widetilde{x}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\widetilde{x}^{\mathrm{B}}\right)$, не является оптимальным по Парето, а распределение $\overline{x}$, в котором $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ — Парето-оптимально (стрелками указано направление роста полезности)

Проблемы может создать и отсутствие строгой монотонности предпочтений, как показано на рис. **1.8**, где $\widetilde{x}$ — точка (глобального) насыщения для потребителя A. Как видно из рисунка, во внутреннем распределении $\overline{\overline{x}}$ кривая безразличия потребителя B касается кривой безразличия потребителя A, т.е. $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{\overline{x}}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{\overline{x}}^{\mathrm{B}}\right)$, однако это распределение не является Парето-оптимальным. В качестве примера Парето-улучшения можно привести распределение $\widetilde{x}$, где положение обоих потребителей лучше, чем в точке $\overline{\overline{x}}$. При этом в Парето-оптимальном распределении $\overline{x}$ на рис. **1.8** имеет место равенство предельных норм замещения.

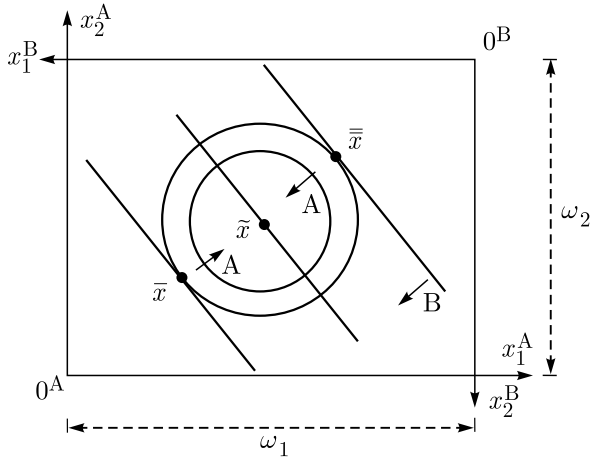

Рис. 1.8. Предпочтения потребителя A не являются монотонными. Во внутреннем допустимом распределении $\overline{\overline{x}}$ выполнено условие $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{\overline{x}}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{\overline{x}}^{\mathrm{B}}\right)$, но распределение $\overline{\overline{x}}$ не является Парето-оптимальным (стрелками указано направление роста полезности)

Утверждение 1.2. Пусть функции полезности потребителей дифференцируемы, предпочтения строго монотонны и выпуклы, тогда условие равенства предельных норм замещения является не только необходимым, но и достаточным условием внутреннего Парето-оптимума.

Без доказательства. ■

Согласно утверждению **1.2**, если предпочтения потребителей выпуклы и строго монотонны, то, вычислив внутреннее допустимое распределение, в котором достигается равенство предельных норм замещения, мы можем быть уверены, что нашли Парето-оптимальное распределение. Если же предпочтения хотя бы одного потребителя не удовлетворяют хотя бы одному из этих свойств, то внутреннее допустимое распределение, в котором имеет место касание кривых безразличия, может как быть Парето-оптимальным, так и не являться таковым.

Приведем пример поиска Парето-оптимальных распределений в экономике обмена в случае, когда предпочтения потребителей представимы функциями полезности Кобба–Дугласа.

Пример 1.3. Пусть предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right) = \left(x_1^{\mathrm{A}}\right)^{\alpha}\left(x_2^{\mathrm{A}}\right)^{1-\alpha}$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) = \left(x_1^{\mathrm{B}}\right)^{\beta}\left(x_2^{\mathrm{B}}\right)^{1-\beta}$, где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. Совокупный начальный запас блага i в экономике составляет $\omega_i > 0$, $i = 1, 2$. Охарактеризуем множество Парето-оптимальных распределений в этой экономике.

Начнем с анализа внутренних распределений.

Предпочтения, представимые функциями полезности Кобба–Дугласа, являются монотонными (на внутренних наборах — строго монотонными) и выпуклыми (на внутренних наборах — строго выпуклыми). А значит, условие равенства предельных норм замещения является не только необходимым, но и достаточным условием внутреннего Парето-оптимума. Поскольку $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(x^{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)\, x_1^{\mathrm{A}}}$ и $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(x^{\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\beta x_2^{\mathrm{B}}}{(1-\beta)\, x_1^{\mathrm{B}}}$, то во внутреннем Парето-оптимальном распределении выполнено:

$$\frac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)\, x_1^{\mathrm{A}}} = \frac{\beta x_2^{\mathrm{B}}}{(1-\beta)\, x_1^{\mathrm{B}}}.$$

Из ограничений допустимости получим, что $x_i^{\mathrm{B}} = \omega_i - x_i^{\mathrm{A}}$ для $i = 1,\ 2$. Таким образом, $\dfrac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)\, x_1^{\mathrm{A}}} = \dfrac{\beta\left(\omega_2 - x_2^{\mathrm{A}}\right)}{(1-\beta)\left(\omega_1 - x_1^{\mathrm{A}}\right)}$. Отсюда после преобразований получим $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\beta\,(1-\alpha)\,\omega_2 x_1^{\mathrm{A}}}{\alpha\omega_1\,(1-\beta) + x_1^{\mathrm{A}}\,(\beta-\alpha)}$, причем при $x_1^{\mathrm{A}} \to 0$ $x_2^{\mathrm{A}} \to 0$, а при $x_1^{\mathrm{A}} \to \omega_1$ $x_2^{\mathrm{A}} \to \omega_2$.

Для того чтобы корректно изобразить в ящике Эджворта множество внутренних Парето-оптимальных распределений, исследуем функцию $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$. Первая производная больше нуля, $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)' = \dfrac{\alpha\beta\,(1-\alpha)\,(1-\beta)\,\omega_1\omega_2}{\left(\alpha\omega_1\,(1-\beta) + x_1^{\mathrm{A}}\,(\beta-\alpha)\right)^2} > 0$, следовательно, функция $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$ возрастает. Продолжим анализ, чтобы уточнить вид графика функции, вычислив вторую производную: $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)'' = (-2)\,(\beta-\alpha)\,\dfrac{\alpha\beta\,(1-\alpha)\,(1-\beta)\,\omega_1\omega_2}{\left(\alpha\omega_1\,(1-\beta) + x_1^{\mathrm{A}}\,(\beta-\alpha)\right)^3}$.

Заметим, что множитель $\alpha\beta\,(1-\alpha)\,(1-\beta)\,\omega_1\omega_2$ всегда положителен.

Если $\beta = \alpha$, то $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)'' = 0$, это означает, что график функции $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$ — прямая. Если $\beta > \alpha$, то $(\beta-\alpha) > 0$ и $\Bigg(\underbrace{\alpha\omega_1\,(1-\beta)}_{>0} + \underbrace{x_1^{\mathrm{A}}\,(\beta-\alpha)}_{>0}\Bigg)^3 > 0$, тогда $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)'' < 0$, следовательно, функция $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$ строго вогнута, т.е. ее график лежит в ящике Эджворта выше диагонали.

Если $\beta < \alpha$, то знак знаменателя, а следовательно, и всего выражения, не так очевиден, как в предыдущем случае, поскольку $\alpha\omega_1\,(1-\beta) > 0$, но $x_1^{\mathrm{A}}\,(\beta-\alpha) < 0$. Максимальное значение, которое может принимать x_1^{A}, составляет ω_1, причем $x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1$ для граничного распределения. Если распределение внутреннее, то $x_1^{\mathrm{A}} < \omega_1$. Подставив в выражение в знаменателе

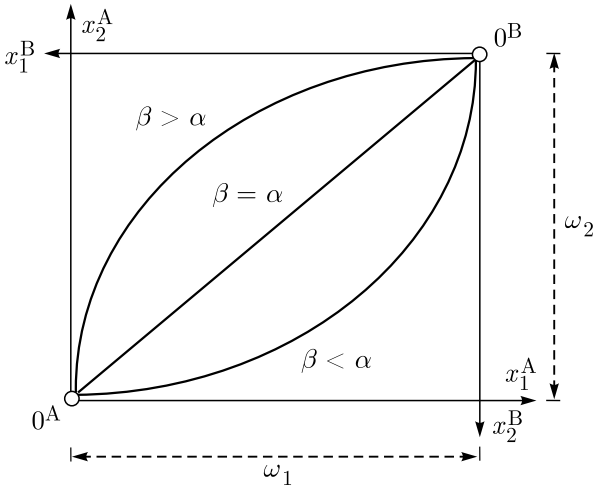

Рис. 1.9. **Множество внутренних Парето-оптимальных распределений в экономике обмена из примера 1.3**

вместо x_1^{A} значение ω_1, получим $\underbrace{\alpha\omega_1(1-\beta)}_{>0}+\underbrace{\omega_1(\beta-\alpha)}_{<0}=\beta\,(1-\alpha)\,\omega_1>0$. Если при максимальном значении x_1^{A} знаменатель больше нуля, то и при меньших значениях x_1^{A} знаменатель больше нуля. Следовательно, $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)''>0$, а значит, функция $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$ строго выпукла, т.е. ее график лежит в ящике Эджворта ниже диагонали. Графически множество внутренних Парето-оптимальных распределений изображено на рис. **1.9**.

Рассмотрим теперь граничные Парето-оптимальные распределения.

Начнем с распределения $\left(x_1^{\mathrm{A}}=x_2^{\mathrm{A}}=0,\ x_1^{\mathrm{B}}=\omega_1,\ x_2^{\mathrm{B}}=\omega_2\right)$. Это распределение допустимо. Не существует допустимого распределения, в котором благосостояние B было бы выше, поскольку у потребителя B в этом распределении — весь начальный запас благ. Чтобы увеличить благосостояние потребителя A, необходимо уменьшить потребление обоих благ потребителем B, что приведет к снижению его благосостояния. Таким образом, невозможно повысить благосостояние хотя бы одного из потребителей так, чтобы не снизилось благосостояние другого, что означает Парето-оптимальность данного распределения. Аналогичным образом можно показать, что распределение $\left(x_1^{\mathrm{A}}=\omega_1,\ x_2^{\mathrm{A}}=\omega_2,\ x_1^{\mathrm{B}}=x_2^{\mathrm{B}}=0\right)$ также является Парето-оптимальным.

Проанализируем существование других граничных Парето-оптимальных распределений. Например, рассмотрим граничное распределение $\left(x_1^{\mathrm{A}}=0,\ 0<x_2^{\mathrm{A}}<\omega_2,\ x_1^{\mathrm{B}}=\omega_1,\ x_2^{\mathrm{B}}=\omega_2-x_2^{\mathrm{A}}>0\right)$. В этом распределении потребители получают следующие уровни полезности: $u^{\mathrm{A}}\left(0,\ x_2^{\mathrm{A}}\right)=0$ и $u^{\mathrm{B}}\left(\omega_1,\ \omega_2-x_2^{\mathrm{A}}\right)=(\omega_1)^{\beta}\left(\omega_2-x_2^{\mathrm{A}}\right)^{1-\beta}$. Это распределение не является Парето-оптимальным, поскольку существует другое допустимое

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru