ВВЕДЕНИЕ

Геометрия всегда занимала большое место в образовании. В Средние века она была включена в число «семи свободных искусств», владение которыми отличало образованного человека.

Развитие начертательной геометрии позволило «перекинуть мост» между планиметрией и стереометрией, сформулировать единые принципы построения чертежа, визуализировать многие физические процессы, получить простые наглядные способы решения прикладных задач. В связи с бурным развитием ЭВМ предполагалось, что роль начертательной геометрии уменьшится, однако методы этой дисциплины используются и в условиях тотальной компьютеризации — для разработки прогрессивных алгоритмов решения систем уравнений, обработки массивов чисел, визуализации и анимации.

С появлением IP-технологий, позволяющих сопровождать изделие на протяжении его жизненного цикла (маркетинг; разработка технического задания, технического проекта, рабочего проекта; инженерный анализ и техническая подготовка производства; производство; эксплуатация; модернизация; утилизация), акценты в преподавании начертательной геометрии сместились. На первый план выходят такие разделы, как преобразование чертежа, поверхности, развертки, конструктивные задачи.

«Инженерный интеллект» формируется уже в первом семестре обучения в техническом вузе, особенно при изучении графических дисциплин и, в частности, начертательной геометрии, где успешно сочетаются устоявшиеся традиции и новации. Можно утверждать, что подготовка к инновационному инженерному труду начинается с обучения подходам к решению конструктивных задач начертательной геометрии.

Опыт показывает, что успехи в начертательной геометрии служат своеобразным индикатором способностей к творческой конструкторской деятельности. Решение метрических, позиционных, конструктивных задач способствует и раскрытию исследовательских данных.

Настоящий сборник содержит теоретические и прикладные задачи различной сложности. На наш взгляд, он может стать составной частью современного гибкого учебно-методического комплекса, позволяющего работать со студентами разного уровня базовой подготовки.

Кроме нестандартных задач, основная функция которых — формирование навыков научного подхода к решению, в сборник включены и так называемые олимпиадные задачи, разработкой которых авторы занимаются более тридцати лет.

Установить авторство задачи в начертательной геометрии (впрочем, как и в любом разделе математики) весьма сложно, поэтому мы приводим список источников, в которых можно найти подобные и другие интересные задачи.

Звездочкой помечены задачи, которые представлялись на городских олимпиадах командами санкт-петербургских вузов — Государственного университета информационных технологий, механики и оптики, Политехнического университета, Университета кино и телевидения, Архитектурно-строительного университета. Двумя звездочками отмечены задачи Балтийского государственного технического университета «Военмех», в разработке которых принимали участие авторы сборника.

Первый раздел посвящен методологии решения задач прикладного характера. Второй и третий содержат задачи разного уровня сложности, начиная с наиболее простых. В четвертый раздел включены задачи на применение методов начертательной геометрии при формировании чертежной документации. В пятом разделе представлены редко встречающиеся в учебном процессе задачи на композицию. Читателю предлагается самому придумать и решить прикладную задачу, опираясь на заданные геометрические образы. Работа над такими задачами развивает фантазию — качество, необходимое инженеру-творцу.

В заключительном разделе разбираются решения нескольких характерных задач.

1

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРА

Процесс решения задач прикладного характера не всегда бывает простым. Выдающийся математик и педагог Джордж Пойа* отмечал, что успеху способствует понимание особенностей и технологии процесса решения, однако никакое описание или теория не могут охватить все многообразие его сторон. Любое описание будет неполным, схематическим, упрощенным.

Тем не менее большинство учебных позиционных и метрических задач в проекционном моделировании основано на стандартных алгоритмах, что позволяет построить некую методику решения таких задач и наметить принципы подхода к решению конструктивных задач, в том числе позиционных и метрических, содержащих элементы творчества.

Учитывая, что исчерпывающего описания творческого процесса не существует, попытаемся составить приближенный план (алгоритм) решения прикладной конструктивной задачи.

Решение задачи следует начинать с приведения ее условия к удобному виду, преобразования задачи о реальных объектах в математическую с помощью упрощений и абстракции. В нашем случае, анализируя исходные данные, мы осуществляем перевод условия задачи из прикладного (физического) русла в математическое. Используя термин, принятый в психологии, назовем этот процесс трансляцией.

---

* Пойа Дж. Математическое открытие. М. : Наука, 1976.

Первый этап — трансляция постановки задачи. При этом часто приходится решать, какими физическими условиями можно пренебречь, затем выбрать пространственную модель решения задачи. На этой стадии хорошо помогает анализ решения в двухмерной постановке, а также анализ особенностей перехода к трехмерной задаче.

Вновь обратимся к идеям Пойа. Существует две категории мыслей: те, которые мы порождаем активно, посредством акта мышления, обдумывания, и те, которые вспыхивают в нашем сознании самопроизвольно. К последним надо относиться как можно более внимательно, изучать, заслуживают ли они внимания. Такой анализ позволяет приобрести новые знания.

Когда у вас появилась пространственная идея решения задачи, проанализируйте: возможны ли другие? Если таковые имеются, то критерием выбора будет простота реализации решения на чертеже. Как советует Пойа, не делайте при помощи большего то, что можно сделать при помощи меньшего.

Следующий этап — анализ способов построения на чертеже необходимых геометрических образов. На этом этапе вспоминаем необходимые сведения из теории, выбираем наиболее рациональные (удобные) способы — обеспечиваем соответствующие логические условия.

Теперь можно приступать к реализации решения на ортогональном чертеже. Не следует думать, что данный этап чисто технический. Вам придется снова обеспечивать необходимые логические условия, выявлять и разрешать противоречия. Как отмечал Пойа, никогда не идите наперекор своим ощущениям, но старайтесь также трезво взвесить все аргументы за и против ваших геометрических планов.

Задача. В точках A и B расположены радиолокаторы (см. рис. 1.1). В направлении l по прямолинейной траектории движется самолет. Требуется зафиксировать ту точку траектории полета, в которой интенсивность сигналов, принимаемых радиолокаторами A и B, будет одинаковой. Физическими условиями, связанными с влиянием геометрических особенностей движения на частоты отраженных сигналов, пренебречь.

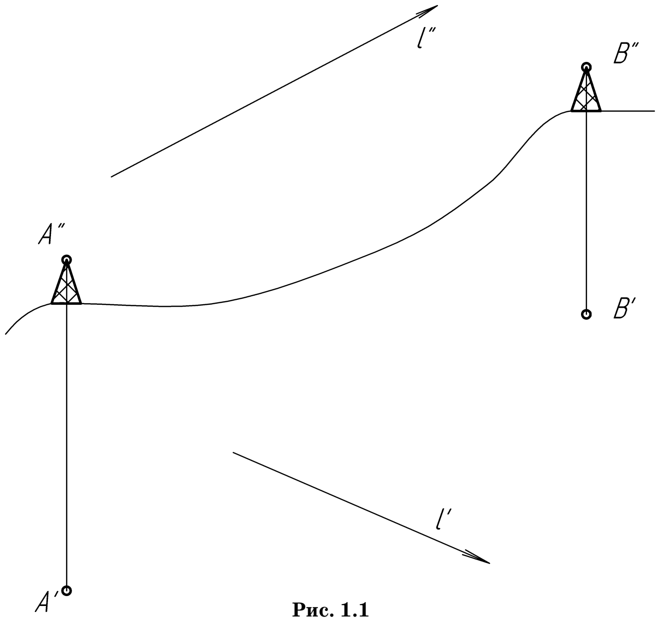


Рис. 1.1

Разберем задачу по предложенной схеме, задавая сопутствующие вопросы и делая некоторые выводы.

1. Трансляция исходных данных — перевод из прикладного (физического) русла в математическое.

Что значит «интенсивность сигнала одинакова»? От чего она может зависеть? От плотности среды распространения волн и от расстояния до объекта. Значит, если плотность среды неизменна, то математическая постановка задачи такова: на прямой l найти точку, равноудаленную от точек A и B.

2. Формирование пространственной модели решения задачи.

Проанализируем, как бы мы решали задачу в двухмерной (плоскостной) постановке.

Мы провели бы перпендикуляр через середину отрезка AB до пересечения с прямой l.

Что меняется с переходом к трехмерному варианту?

Вместо одного перпендикуляра к плоскости можно провести множество перпендикуляров. Такое множество представляет собой плоскость.

Как выбрать единственный перпендикуляр, который пересекается с прямой l, а не скрещивается с ней?

Найти точку пересечения прямой l с этой плоскостью.

Наши рассуждения дают возможность построить пространственную модель решения задачи: надо через середину AB провести плоскость, перпендикулярную AB, и найти точку пересечения прямой l с заданной плоскостью.

Проанализируем, есть ли другие пространственные модели решения. Если таковые имеются, то критерием выбора будет простота реализации решения на чертеже.

3. Анализ способов построения (задания) на чертеже необходимых геометрических образов.

Логические условия:

а) середина отрезка AB находится легко, так как (вспомним инвариантные свойства ортогонального проецирования) отрезки на проекциях делятся пропорционально;

б) плоскость, перпендикулярную AB, следует задать горизонталью и фронталью (согласно теореме о частном случае проецирования прямого угла, условие перпендикулярности прямой и плоскости).

4. Реализация решения на ортогональном чертеже.

Нахождение точки пересечения прямой линии и плоскости: необходимо заключить прямую во вспомогательную плоскость, найти общую точку прямой и линии пересечения заданной плоскости и вспомогательной.

Не видите ли вы противоречия в этом алгоритме? Для того чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, надо найти линию пересечения плоскостей, которая, в свою очередь, обычно определяется двумя точками пересечения прямых, лежащих в одной плоскости, с другой.

Разрешимо ли данное противоречие?

Да, если мы владеем искусством выбора посредника (вспомогательной плоскости).

Логические условия:

Как выбрать посредника? Так, чтобы легко строилась линия пересечения, чтобы одна из ее проекций получалась сразу. Как этого достичь? Вспомним о замечательном собирательном свойстве проецирующей плоскости и убедимся, что именно такая плоскость нам подходит.

Решение задачи, подтверждающее итог наших рассуждений, представлено на рис. 1.2.

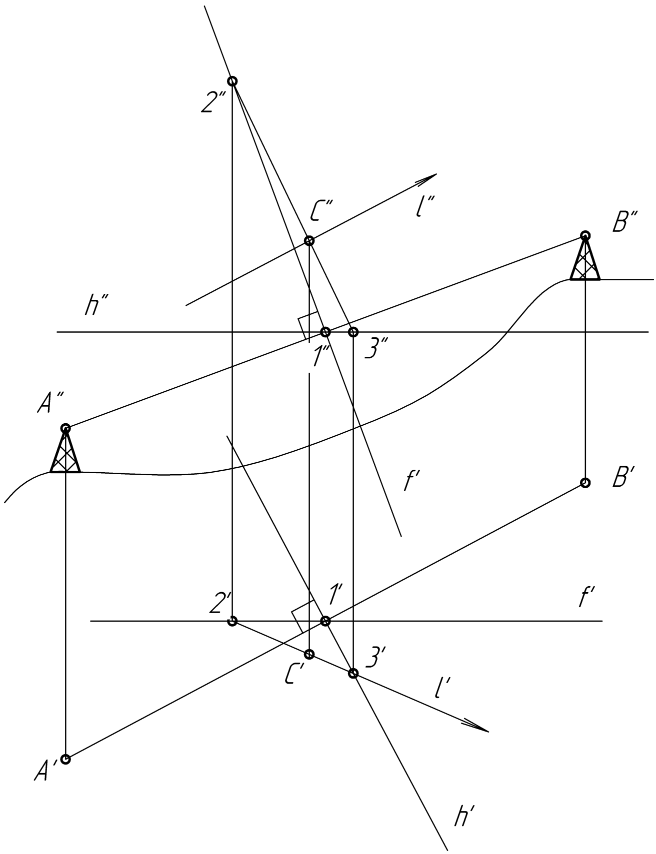


Рис. 1.2

2

ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ

ТОЧКА, ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ

2.1. Дан элемент пространственной формы, представляющий собой равносторонний треугольник ABC. Вершина A принадлежит прямой a, которая перпендикулярна прямой b. На прямой b расположено основание BC. Построить проекции треугольника (рис. 2.1).

2.2.** Над горной дорогой l вертолет был засечен радиолокатором, находящимся в точке C. Определить положение вертолета в момент обнаружения, если известно, что расстояние от него до радиолокатора было равно L, а угол луча с горизонтом составляет 30° (рис. 2.2).

2.3.* Через точку B, симметричную точке A относительно прямой l, провести прямую m, перпендикулярную фронтальной плоскости проекции π_2 (рис. 2.3).

2.4.* Через точку K, симметричную точке A относительно горизонтальной плоскости проекций, провести прямую m, пересекающую плоскость $\gamma(D, b)$ в точке M, расположенной ниже плоскости $\beta(f_{o\beta})$ на 10 мм и дальше плоскости $\alpha(h_{0\alpha})$ на 15 мм (рис. 2.4).

2.5.** Построить прямую, проходящую через точку A (заданную двумя проекциями), если известно, что угол наклона ее к плоскости π_3 равен 45°, а к плоскости π_2 — 30°.

2.6.* Построить фронтальную проекцию плоской фигуры $ABCD$ при условии, что BC составляет с горизонтальной плоскостью проекций угол α, точка B выше точки C и $AB = BC$ (рис. 2.5).

2.7.* Через точку A провести прямую l, параллельную двум заданным плоскостям: α, заданной пересекающимися прямыми a и b, и β, заданной пересекающимися прямыми m и n (рис. 2.6).

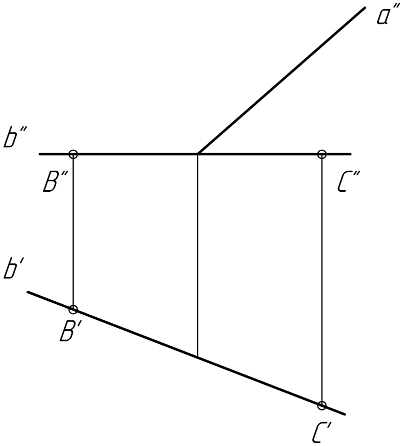


Рис. 2.1

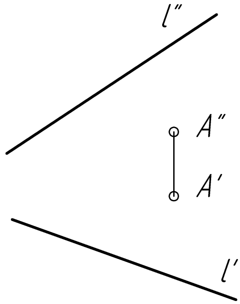


Рис. 2.3

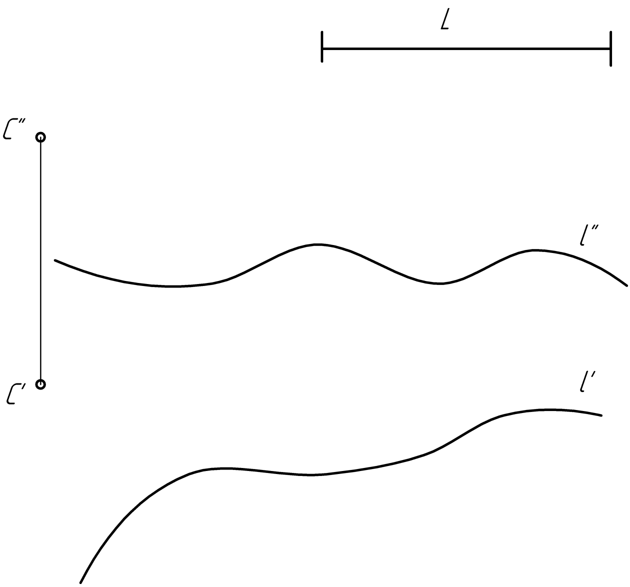


Рис. 2.2

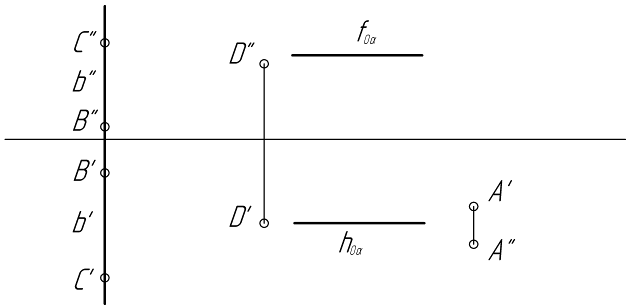


Рис. 2.4

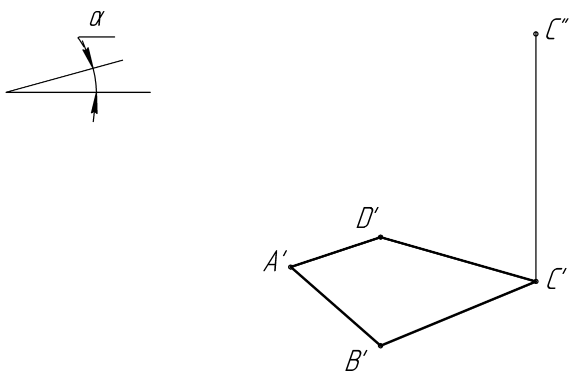


Рис. 2.5

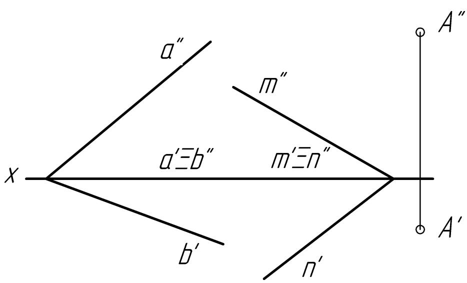


Рис. 2.6

2.8.* Определить величину угла α между прямыми a и b (рис. 2.7).

2.9.* Определить точку C пересечения прямой, заданной отрезком AB, с плоскостью, заданной прямой h и отрезком MN (рис. 2.8).

2.10.* Построить фронтальную и профильную проекции отрезка AB, расположенного в плоскости $f_{0\alpha}$, которая перпендикулярна фронтальной плоскости проекций π_2 и касается окружности l в точке C. Известно, что точка C делит отрезок AB пополам, длина отрезка AB равна 2/3 диаметра окружности l, точка B расположена за плоскостью окружности и ниже точки A. Угол наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций составляет 30° (рис. 2.9).

2.11. Построить равнобедренный треугольник ABC, если известно, что основание BC принадлежит плоскости π_1, истинная величина BC равна 20 мм, а плоскость треугольника ABC наклонена к π_1 на угол $\varphi_1 = 60°$, а к π_2 — на угол 45° (рис. 2.10). Допускается привести лишь один вариант решения.

2.12. Построить проекции двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через точку A и перпендикулярных заданной прямой l, без преобразования чертежа (рис. 2.11). Задача имеет множество решений; достаточно привести одно из них.

2.13.* Построить отрезок AB, наклоненный к фронтальной плоскости проекций π_2 на 30°, а к горизонтальной плоскости проекций π_1 — на 45°. Точка A расположена выше и дальше от плоскости π_2, чем точка B (рис. 2.12).

2.14.** Определить точку K пересечения прямой с плоскостью. Показать видимость прямой, считая плоскость непрозрачной (рис. 2.13).

2.15. Построить множество точек, равноудаленных от плоскостей проекций π_1, π_2 и горизонтально проецирующей плоскости α на 30 мм (рис. 2.14).

2.16. В точке C установить плоскость зеркала таким образом, чтобы по направлению AC было видно изображение точки B (рис. 2.15).

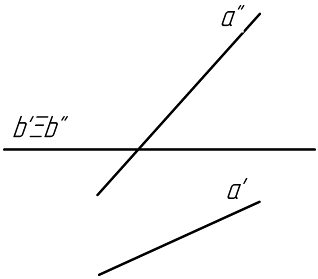


Рис. 2.7

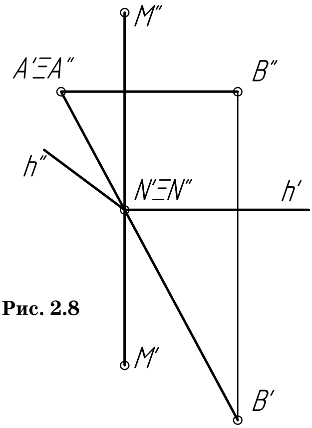


Рис. 2.8

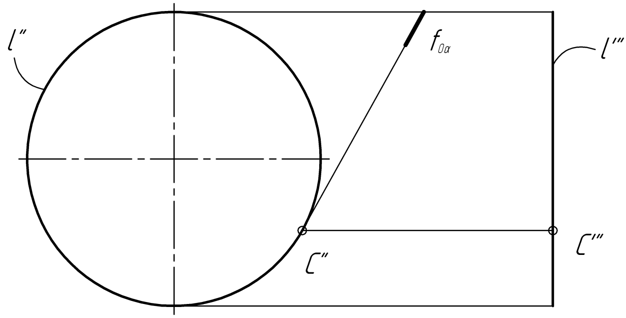
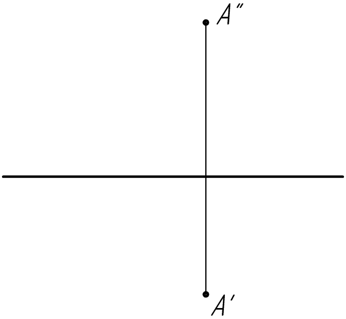


Рис. 2.9



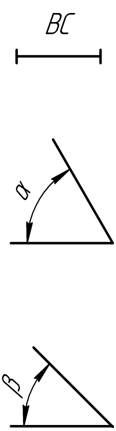


Рис. 2.10

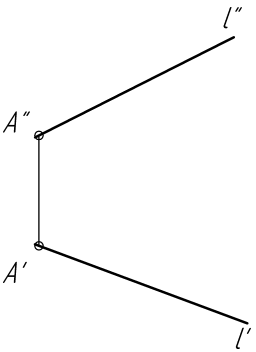


Рис. 2.11

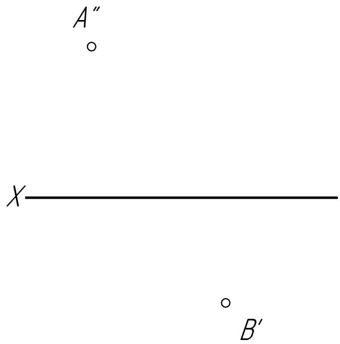


Рис. 2.12

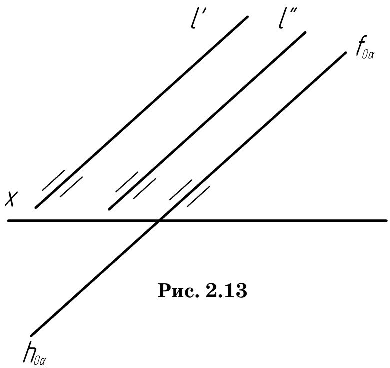


Рис. 2.13

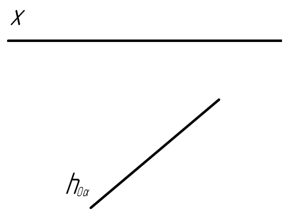


Рис. 2.14

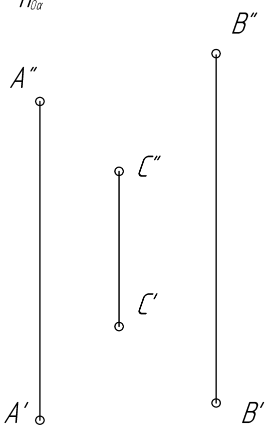


Рис. 2.15

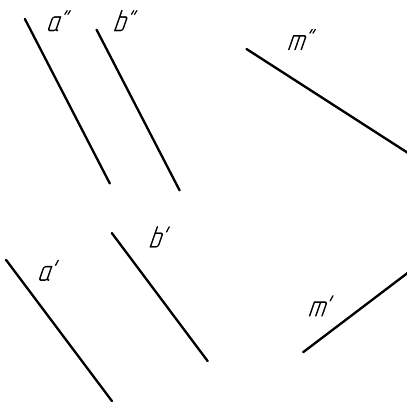


Рис. 2.16