ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление…… 3
Предисловие …… 4
Математический анализ функций одной переменной…… 5
1. Вещественные (действительные) числа…… 6
1.1. Аксиоматика и некоторые общие свойства (6). 1.2. Важнейшие классы вещественных чисел (11). 1.3. Основные леммы, связанные с полнотой множества вещественных чисел (16). 1.4. Счетные и несчетные множества(19).
2. Предел …… 21
2.1. Предел последовательности (22). 2.2. Свойства предела последовательности (27).
3. Функции одной переменной…… 31
3.1. Понятие функции (отображения) (31). 3.2. Простейшая классификация отображений (40). 3.3. Композиция функций (41). 3.4. Функция как отношение. График функции (42). 3.5. Предел функции (43). 3.6. Свойства предела функции (48). 3.7. Замечательные пределы (58). 3.8. Сравнение бесконечно малых функций (62). 3.9. Эквивалентные бесконечно малые функции (63).
4. Непрерывность функции…… 66
4.1. Приращение функции (66). 4.2 Понятие непрерывности в точке (68).
4.3. Точки разрыва функции. Их классификация (71). 4.4. Свойства непрерывных функций (74).
5. Производные и дифференциалы функции одной переменной…… 80
5.1. Производная (80). 5.2. Понятие дифференцируемости функции (86). 5.3. Понятие дифференциала функции (87). 5.4. Основные правила дифференцирования (89).
6. Основные теоремы дифференциального исчисления…… 108
6.1. Теоремы о среднем значении (108). 6.2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя (116). 6.3. Формула Тейлора (119). 6.4. Разложение по формуле Маклорена (125). 6.5. Приложения формулы Тейлора (127).
7. Исследование функций одной переменной построение их графиков…… 130
7.1. Условия монотонности функции (130). 7.2. Экстремум функции (131).
7.3. Общая схема исследования функции и построения ее графика (144).
7.4. Наибольшее и наименьшее значение функции непрерывной на отрезке (145).
Использованная литература…… 147

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Математический анализ – раздел математики, в котором изучаются функции. Основу математического анализа составляют дифференциальное и интегральное исчисление, теория рядов. Заслуга открытия дифференциального и интегрального исчисления (или анализа бесконечно малых функций) принадлежит Ньютону и Лейбницу. Развитие анализа бесконечно малых оказало огромное влияние на прогресс науки и техники.

Ньютон Исаак (1643 -1727)

НЬЮТОН – видный английский физик, механик, астроном и математик, чл. Лондонского королевского о-ва (1672) и его президент (1703), иностранный чл. Парижской АН (1699). Родился в Вулсторне. С 12 лет учился в школе в Грантеме. С 1661 по 1665 учился в Кембриджском ун-те. С 1669 по 1701 работал в этом ун-те. В 1695 был назначен смотрителем, а с 1699 – главным директором Монетного двора в Лондоне.

В 17 веке перед естествознанием возникла проблема – найти законы движения и установить законы механики. Для этого аппарат математики постоянных величин был недостаточным. Заслуга Ньютон заключается в том, что одновременно с *Г. Лейбницем*, но независимо от него, он создал дифференциальное и интегральное исчисления, которые стали могучим средством решения новых задач. Концепции Ньютона и Лейбница были разными. Ньютон рассматривал математику только как способ для физических исследований.

Надпись на могиле Ньютона гласит:

«***Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, дворянин, который почти божественным разумом первый доказал с факелом математики движение планет, пути комет и приливы океанов.***

Он исследовал различие световых лучей и позволяющиеся при этом различные свойства цветов, чего ранее никто не подозревал. Прилежный, мудрый и верный истолкователь природы, древности и Св. писания, утверждал своей философией величие Всемогущего Бога, а нравом выражал евангельскую простоту.

Пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого».

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646 – 1716)

ЛЕЙБНИЦ – немецкий математик, физик и философ, организатор и первый президент Берлинской АН (1700); чл. Лондонского королевского о-ва (1673), чл. АН (1700). Родился в Лейпциге. В 1661 Л. поступил на юридический факультет Лейпцигского ун-та. Кроме юридических наук изучал философию и математику. Защитил диссертацию на степень бакалавра (1663), магистра философии (1664) и доктора права (1666).

Он занимается вопросами химии, геологии, конструирует ветряной двигатель для насосов, выкачивающих воду из шахт.

Особенно плодотворной была научная деятельность Лейбница в области математики. Сконструированная им счетная машина выполняла не только сложение и вычитание, как это было у *Б. Паскаля*, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение квадратного и кубического корней.

Он занимается вопросами химии, геологии, конструирует ветряной двигатель для насосов, выкачивающих воду из шахт.

Но важнейшей его заслугой является то, что он, одновременно с И. Ньютоном, но независимо от него, завершил создание дифференциального и интегрального исчисления.

Концепции Ньютона и Лейбница были разными. Лейбниц развивал чистый анализ, исходил из абстрактной концепции, которая стала исходной для развития чистого анализа. Лейбниц ввел много математических терминов, которые теперь прочно вошли в научную практику. Функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината, координата. А также знаки дифференциала, интеграла, логическую символику и т. д.

Лейбниц создал собственную научную школу, в которую входили братья Бернулли, Г. Ф. Лопиталь и др. математики.

Г. В. Лейбниц на 28 лет раньше Ньютона опубликовал свое открытие анализа бесконечно малых, но Ньютон на 10 лет раньше его установил для себя наличие двух больших взаимно связанных исчислений, полностью понял их значение для изучения природы и использовал в своих научных достижениях.

1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ (ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ) ЧИСЛА

Математические теории, как правило, находят свой выход в том, что позволяет перерабатывать набор чисел (исходные данные) в другой набор чисел, составляющих промежуточную или окончательную цель вычислений. По этой причине особое место в математике и ее приложениях занимают числовые функции (точнее, так называемые дифференцируемые числовые функции). Они составляют главный объект исследования классического анализа. Но сколь-нибудь полное с точки зрения современной математики описание свойств этих функций невозможно без точного определения множества вещественных чисел, на котором эти функции действуют.

Число в математике, как ***время*** в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам. Это одна из основных математических абстракций. Рассказу о ней может быть посвящен самостоятельный насыщенный курс. Здесь же мы имеем в виду, только свести воедино то, что читателю в основном известно о вещественных числах из средней школы, выделив в виде аксиом фундаментальные и независимые свойства чисел. При этом наша цель состоит в том, чтобы дать точное, пригодное для последующего математического использования определение вещественных чисел и обратить особое внимание на их свойство непрерывности, являющееся зародышем предельного перехода – основной неарифметической операции анализа.

1.1. Аксиоматика и некоторые общие свойства

Определение множества вещественных чисел

Определение. Множество называется множеством ***действительных*** (***вещественных***) ч***исел***, а его элементы **–** ***действительными*** (***вещественными***) ***числами***, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения

Определено отображение (операция сложения), сопоставляющее каждой упорядоченной паре $(x; y)$ элементов x, y из $\mathbf{R}$ некоторый элемент $x+y\in\mathbf{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

1. Существует ***нейтральный*** элемент 0 (называемый в случае сложения ***нулем***) такой, что для любого $x\in\mathbf{R}$ $x+0=0+x=x.$
2. Для любого элемента $x\in\mathbf{R}$ имеется элемент $-x\in\mathbf{R}$, называемый ***противоположным*** к x, такой, что $x+(-x)-(-x)+x=0.$
3. Операция сложения ассоциативна, т.е. для любых элементов x, y, z из $\mathbf{R}$ выполнено $x+(y+z)=(x+y)+z.$
4. Операция сложения ***коммутативна***, т.е. для любых элементов x, y из $\mathbf{R}$ выполнено $x+y=y+x.$

(II) Аксиомы умножения

Определено отображение (операция умножения), сопоставляющее каждой упорядоченной паре $(x; y)$ элементов x, y из $\mathbf{R}$ некоторый элемент $x\cdot y\in\mathbf{R}$, называемый произведением x и y. При этом выполнены следующие условия:

1. Существует нейтральный элемент $1\in\mathbf{R}\setminus 0$ (называемый в случае умножения ***единицей***) такой, что $\forall x\in\mathbf{R}\setminus 0$ $x\cdot 1=1\cdot x=x.$
2. Для любого элемента $x\in\mathbf{R}\setminus 0$ имеется элемент $x^{-1}\in\mathbf{R}\setminus 0$, называемый ***обратным***, такой, что $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1.$
3. Операция умножения ассоциативна, т.е. для любых x, y, z из $\mathbf{R}\setminus 0$ $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z.$
4. Операция умножения коммутативна, т.е. для любых

$$x, y \text{ из } \mathbf{R}\setminus 0 \quad x\cdot y=y\cdot x.$$

(I, II) Связь сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т.е.

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R}\ (x+y)z = xz + yz.$$

(III) Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbf{R}$ имеется отношение $\le$, т.е. для элементов x, y из $\mathbf{R}$ установлено, выполняется $x \le y$ или нет. При этом должны выполняться следующие условия:

1. $\forall x \in \mathbf{R}\,(x \le x)$.
2. $(x \le y) \wedge (y \le x) \Rightarrow (x = y)$.
3. $(x \le y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x \le z)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}\,(x \le y) \vee (y \le x)$.

Отношение $\le$ в $\mathbf{R}$ называется отношением ***неравенства***.

Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение, удовлетворяющее аксиомам 0, 1, 2, как известно, называется ***частично упорядоченным***, а если, сверх того, выполнена аксиома 3, т.е. любые два элемента множества сравнимы, множество называется ***линейно упорядоченным***.

Таким образом, множество вещественных чисел линейно упорядочено отношением неравенства между его элементами.

(I, III) Связь сложения и порядка в R

Если x, y, z – элементы $\mathbf{R}$, то $(x \le y) \Rightarrow (x+z \le y+z)$.

(II, III) Связь умножения и порядка в R

Если $x,\ y$ – элементы $\mathbf{R}$, то $(0 \le x) \wedge (0 \le y) \Rightarrow (0 \le x \cdot y)$.

(IV) Аксиома полноты (непрерывности)

Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – непустые подмножества $\mathbf{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$ выполнено $x \le y$, то существует такое $c \in \mathbf{R}$, что $x \le c \le y$ для любых элементов $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$.

Этим завершается список аксиом, выполнение которых, на каком бы то ни было множестве $\mathbf{R}$, позволяет считать это множество конкретной реализацией или, как говорят, ***моделью вещественных чисел***.

Это определение формально не предполагает никакой предварительной информации о числах, и из него, «включив математическую мысль», опять-таки формально мы должны получить уже в качестве теорем остальные свойства вещественных чисел. По поводу этого аксиоматического формализма хотелось бы сделать несколько неформальных замечаний.

Представьте себе, что вы не прошли стадию от складывания яблок, кубиков или других именованных величин к сложению абстрактных натуральных чисел; что вы не занимались измерением отрезков и не пришли к рациональным числам; что вам неизвестно великое открытие древних о том, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной и потому ее длина не может быть рациональным числом, т. е. нужны иррациональные числа; что у вас нет возникающего в процессе измерений понятия ***больше*** (***меньше***); что вы не иллюстрируете себе порядок, например, образом числовой прямой. Если бы всего этого предварительно не было, то перечисленный набор аксиом не только не воспринимался бы как определенный итог духовного развития, но скорее показался бы, по меньшей мере, странным и, во всяком случае, произвольным плодом фантазии.

Относительно любой абстрактной системы аксиом сразу же возникают, по крайней мере, два вопроса.

Во-первых, совместимы ли эти аксиомы, т.е. существует ли множество, удовлетворяющее всем перечисленным условиям. Это вопрос о ***непротиворечивости аксиоматики***.

Во-вторых, однозначно ли данная система аксиом определяет математический объект, т.е., как бы сказали логики, ***категорична*** ли система аксиом.

Положительный ответ на вопрос о непротиворечивости аксиоматики всегда носит условный характер. В отношении чисел он выглядит так: исходя из принятой нами аксиоматики теории множеств, можно построить множество натуральных, затем множество рациональных и, наконец, множество **R** всех вещественных чисел, удовлетворяющее всем перечисленным свойствам.

Некоторые общие алгебраические свойства вещественных чисел

Покажем на примерах, как известные свойства чисел получаются из приведенных аксиом.

a. Следствия аксиом сложения

1. Во множестве вещественных чисел имеется только один нуль.

▲ Если 0_1 и 0_2 – нули в **R**, то по определению нуля находим

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2 \,.▼$$

2. Во множестве вещественных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.

▲ Если x_1 и x_2 – элементы, противоположные $x \in \mathbf{R}$, то

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = x_2 + (x + x_1) = x_2 + 0 = x_2 \,.▼$$

Здесь последовательно использовано определение нуля, определение противоположного элемента, ассоциативность сложения, снова определение противоположного элемента и, наконец, снова определение нуля.

1. Уравнение $a + x = b$ в R *имеет и притом единственное решение*

$$x = b + (\text{-}a).$$

▲ То, что $x = b + (\text{-}a)$ есть решение, проверяется непосредственно:

$$a + (b + (\text{-}a)) = a + ((\text{-}a) + b) = (a + (\text{-}a)) + b = 0 + b = b + 0 = b\,.$$

То, что это единственное решение, вытекает из единственности обратного элемента:

$$(a + x = b) \Rightarrow ((a + x) + (\text{-}a) = b + (\text{-}a)) \Rightarrow ((x + a) + (\text{-}a) = b + (\text{-}a)) \,,$$

$$(x + (a + (\text{-}a) = b + (\text{-}a)) \Rightarrow (x + 0 = b = (\text{-}a)) \Rightarrow (x = b = (\text{-}a)) \,.▼$$

Выражение $b + (\text{-}a)$ записывается также в виде $b - a$. Этой более короткой и привычной записи мы, как правило, и будем придерживаться.

b. Следствия аксиом умножения

1. Во множестве вещественных чисел имеется только одна единица.

2. Для каждого числа $x \neq 0$ *имеется только один обратный элемент* x^{-1}.

3. Уравнение $a \cdot x = b$ *при* $a \in \mathbf{R} \setminus 0$ *имеет и притом единственное решение* $x = b \cdot a^{-1}$.

Доказательство этих утверждений, разумеется, повторяют доказательства соответствующих утверждений для сложения (с точностью до замены символа и названия операции), поэтому они опущены.

c. Следствия аксиомы связи сложения и умножения

Привлекая дополнительно аксиому $(I,\ II)$, связывающую сложение и умножение, получаем дальнейшие следствия.

1. Для любого $x \in \mathbf{R}$ $x \cdot 0 = 0$.

▲ $x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x(1 + 0) = x \cdot 1 = x$. $(x + x \cdot 0 = x) \Rightarrow (x \cdot 0 = 0)$ в силу единственности нуля. ▼

2. $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

▲ Если, например $y \neq 0$, то из единственности решения уравнения $x \cdot y = 0$ относительно x находим $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$. ▼

3. Для любого $x \in \mathbf{R}$ $\text{-}x = (\text{-}1) \cdot x$.

▲ $x+(-1)\cdot x=(+(-1))x=0\cdot x=x\cdot 0=0.$ и утверждение следует из единственности противоположного элемента. ▼

4. *Для любого* $x\in\mathbf{R}$ $(-1)(-x)=x.$ ▲ Следует из 3 и единственности элемента x, противоположного $-x$. ▼

5. *Для любого* $x\in\mathbf{R}$ $(-x)(-x)=x\cdot x$.

$$▲\ (-x)(-x)=((-1)\cdot x)(-x)=(x\cdot(-1))(-x)=x((-1)(-x))=x\cdot x.$$

Мы последовательно воспользовались двумя предыдущими утверждениями, а также коммутативностью и ассоциативностью умножения. ▼

d . Следствия аксиом порядка

Отметим сначала, что отношение $x\le y$ (читается x ***меньше или равно*** y) записывают также в виде $y\ge x$ (y ***больше или равно*** x); отношение $x\le y$ при $x\ne y$ записывают в виде $x<y$ (читается x ***меньше*** y) или в виде $y>x$ (y ***больше*** x) и называют ***строгим неравенством***.

1. *Для любых* $x, y\in\mathbf{R}$ *всегда имеет место в точности одно из соотношений*:

$$x<y, x=y, x>y.$$

▲ Это следует из приведенного определения строгого неравенства и аксиом

$III.1$ *и* $III.3$.▼

2. *Для любых чисел* x, y из $\mathbf{R}$

$$(x<y)\wedge(y<z)\Rightarrow(x<z),\ (x\le z)\wedge(y<z)\Rightarrow(x<z).$$

▲ Приведем для примера доказательство последнего утверждения
По аксиоме $III.2$ транзитивности отношения неравенства имеем

$$(x\le y)\wedge(y<z)\Leftrightarrow(x\le y)\wedge(y\le \mathbf{z})\wedge(y\ne z)\Rightarrow(x\le z).$$

Осталось проверить, что $x\ne z$. Но в противном случае

$$(x\le y)\wedge(y<z)\Leftrightarrow(z\le y)\wedge(y<z)\Leftrightarrow(z\le y)\wedge(y\le z)\wedge(y\ne z)$$

В силу аксиомы $III.1$ отсюда следует $(y=z)\wedge(y\ne z)$ – противоречие. ▼

e . Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

Если в дополнение к аксиомам сложения, умножения и порядка использовать аксиомы $(I, III), (II, III)$, связывающие порядок с арифметическими операциями, то можно получить, например, следующие утверждения:

1. *Для любых чисел* x, y, z, w *из* $\mathbf{R}$

$$(x<y)\Rightarrow(x+z)<(y+z),\qquad (0<x)\Rightarrow(-x<0),$$
$$(x\le y)\wedge(z\le w)\Rightarrow(x+z\le y+w),\ (x\le y)\wedge(z<w)\Rightarrow(x+z<y+w).$$

▲ Проверим первое из этих утверждений.

По определению строгого неравенства и аксиоме (I, III) имеем

$$(x<y)\Rightarrow(x\le y)\Rightarrow(x+z)\le(y+z).$$

Остается проверить, что

$$x+z\ne y+z,\ ((x+z)=(y+z))\Rightarrow(x=(y+z)-z=y+(z-z)=y),$$

что несовместимо с условием $x<y$. ▼

2. *Если* x, y, z – *числа из* $\mathbf{R}$, *то*

$$(0<x)\wedge(0<y)\Rightarrow(0<x\cdot y),\qquad (x<0)\wedge(y<0)\Rightarrow(0<xy),$$
$$(x<0)\wedge(0<y)\Rightarrow(xy<0),\qquad (x<y)\wedge(0<z)\Rightarrow(xz<yz),$$
$$(x<y)\wedge(z<0)\Rightarrow(yz<xz).$$

▲ Проверим первое из этих утверждений. По определению строгого неравенства и аксиоме (II, III)

$$(0<x)\wedge(0<y)\Rightarrow(0\le x)\wedge(0\le y)\Rightarrow(0\le xy).$$

Кроме того $0\ne xy$, поскольку, как уже было показано,

$$(x\cdot y=0)\Rightarrow(x=0)\vee(y=0).$$

Проверим еще, например, и третье утверждение:

$$(x<0)\wedge(0<y)\Rightarrow(0<-x)\wedge(0<y)\Rightarrow(0<(-x)\cdot y)\Rightarrow(0<((-1)\cdot x)y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(0<-1\cdot(xy))\Rightarrow(0<-(xy))\Rightarrow(xy<0).\ ▼$$

Читателю предоставляется возможность доказать самостоятельно остальные соотношения, а также проверить, что если в одной из скобок левой части наших утверждений стоит нестрогое неравенство, то следствием его также буде нестрогое неравенство в правой части.

2. $0<1$.

▲ $1\in \mathrm{R}\setminus 0$, т.е. $0\neq 1$. Если предположить, что справедливо неравенство $1<0$, то по только что доказанному утверждению

$$(1<0)\wedge(1<0)\Rightarrow(0<1\cdot 1)\Rightarrow(0<1).$$

Но мы знаем, что для любой пары чисел $x, y\in\mathbf{R}$ реализуется и притом только одна из возможностей: $x<y,\ x=y,\ x>y$.

Поскольку $0\neq 1$, а предположение $1<0$ ведет к несовместимому с ним соотношению $0<1$, остается единственная возможность, указанная в утверждении. ▼

3. $(0<x)\Rightarrow(0<x^{-1})$, $(0<x)\wedge(x<y)\Rightarrow(0<y^{-1})\wedge(y^{-1}<x^{-1})$.

▲ Проверим первое из этих утверждений.

Прежде всего $x^{-1}\neq 0$. Предположив, что $x^{-1}<0$, получим

$$(x^{-1}<0)\wedge(0<x)\Rightarrow(x\cdot x^{-1}<0)\Rightarrow(1<0).$$

Это противоречие завершает доказательство. ▼

Напомним, что числа, которые больше нуля, называются ***положительными***, а числа, меньше нуля, – ***отрицательными***.

Таким образом, доказано, например, что единица – положительное число, что произведение положительного и отрицательного чисел есть число отрицательное, а величина, обратная положительному числу, также положительна.

Аксиома полноты (непрерывности) и существование верхней (нижней) грани числового множества

Определение. Говорят, что множество $\mathbf{X}\subset\mathbf{R}$ ***ограничено сверху*** (***снизу***), если существует число $x\in\mathbf{R}$ такое, что $x\leq c$ (соответственно $c\leq x$) для любого $x\in\mathbf{X}$.

Число c в этом случае называют ***верхней*** (соответственно ***нижней***) ***границей*** множества $\mathbf{X}$ или также ***мажорантой*** (***минорантой***) множества $\mathbf{X}$.

Определение. Множество, ***ограниченное*** и сверху, и снизу, называется ***ограниченным***.

Определение. Элемент $a\in\mathbf{X}$ называется ***наибольшим*** или ***максимальным*** (***наименьшим*** или ***минимальным***) элементом множества $\mathbf{X}\subset\mathbf{R}$, если $x\leq a$ (соответственно $a\leq x$) для любого элемента $x\in\mathbf{X}$

Введем обозначения и заодно приведем формальную запись определения ***максимального*** и ***минимального*** элементов соответственно:

$$(a=\max\mathbf{X}):=(a\in\mathbf{X}\wedge\forall x\in\mathbf{X}\ (x\leq a)),$$
$$(a=\min\mathbf{X}):=(a\in\mathbf{X}\wedge\forall x\in\mathbf{X}\ (a\leq x)).$$

Наряду с обозначением $\max\mathbf{X}$ (читается ***максимум*** $\mathbf{X}$) и $\min\mathbf{X}$ (читается ***минимум*** $\mathbf{X}$) в том же смысле используются соответственно символы $\max\limits_{x\in\mathbf{X}} x$ и $\min\limits_{x\in\mathbf{X}} x$.

Из аксиомы III.1 порядка сразу следует, что если в числовом множестве есть ***максимальный*** (***минимальный***) элемент, то он только один. Однако не во всяком даже ***ограниченном*** множестве имеется ***максимальный*** (***минимальный***) элемент.

Например, множество $\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x < 1\}$ имеет ***минимальный*** элемент, но, как легко проверить, не имеет ***максимального*** элемента.

Определение. ***Наименьшее*** из чисел, ограничивающих множество $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ сверху, называется ***верхней гранью*** (или ***точной верхней границей***) множества **X**. **Обозначение**: $\sup \mathbf{X}$ (читается ***супремум*** **X**) или $\sup\limits_{x \in \mathbf{X}} x$.

Это основное **определение** настоящего пункта. Итак,

$$s = \sup \mathbf{X} := \forall x \in \mathbf{X}\ ((x \le s) \wedge (\forall s' < s\ \ \exists x' \in \mathbf{X}\ (s' < x'))).$$

В первой скобке, стоящей справа от определяемого понятия, написано, что S ограничивает сверху; вторая скобка говорит, что s – минимальное из чисел, обладающих этим свойством. Точнее вторая скобка утверждает, что любое число, меньшее s, уже не является верхней границей **X**.

Аналогично вводится понятие ***нижней грани*** (***точной нижней границы***) множества **X** как ***наибольшей*** из ***нижних границ*** множества **X**.

Определение $i = \inf\ \mathbf{X} := \forall x \in \mathbf{X}((i \le x) \wedge (\forall i < i'\ \ \exists x' \in \mathbf{X}(x' < i'))$.

Таким образом, даны следующие **определения**:

$$\sup \mathbf{X} := \min \{c \in \mathbf{R} \mid \forall x \in \mathbf{X}\ (x \le c)\},$$
$$\inf \mathbf{X} := \max \{c \in \mathbf{R} \mid \forall x \in \mathbf{X}\ (c \le x)\}.$$

1.2. Важнейшие классы вещественных чисел

Натуральные числа и принцип математической индукции

а . Определение множества натуральных чисел

Числа вида $1,\ 1+1,\ (1+1)+1$ и так далее обозначают соответственно символами 1, 2, 3 и так далее и называют ***натуральными*** числами.

Принять такое определение может только тот, кто и без него имеет полное представление о ***натуральных*** числах, включая их
запись, например, в десятичной системе счисления.

Продолжение какого-то процесса далеко не всегда бывает однозначным, поэтому вездесущее «и так далее» на самом деле требует уточнения, которое доставляет фундаментальный ***принцип математической индукции***.

Определение. Множество $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ называется ***индуктивным***, если вместе с каждым числом $x \in \mathbf{X}$ ему принадлежит также число $x+1$.

Например,

- **R** является ***индуктивным*** множеством;
- множество положительных чисел также является ***индуктивным*** множеством.

Пересечение $\mathbf{X} = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbf{X}_\alpha$ любого семейства ***индуктивных*** множеств $\mathbf{X}_\alpha$, если оно не пусто, является ***индуктивным*** множеством. Действительно,

$$\left(x \in \mathbf{X} = \bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbf{X}_\alpha\right) \Rightarrow \left(\forall \alpha \in \mathbf{A}\ \ (x \in \mathbf{X}_\alpha)\right) \Rightarrow \left(\forall \alpha \in \mathbf{A}\left((x+1) \in \mathbf{X}_\alpha\right)\right) \Rightarrow \left((x+1) \in \bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbf{X}_\alpha = \mathbf{X}\right).$$

Теперь примем следующее.

Определение. Множеством ***натуральных чисел*** называется ***наименьшее индуктивное*** множество, содержащее 1, т.е. пересечение всех ***индуктивных*** множеств, содержащих число 1.

Множество ***натуральных чисел*** **обозначают** символом **N**; его элементы называются ***натуральными числами***.

Следующий фундаментальный и широко используемый принцип является прямым следствием определения множества ***натуральных чисел***.

b. Принцип математической индукции

Если подмножество **E** множества ***натуральных чисел*** **N** таково, что $\mathbf{I} \in \mathbf{N}$ и вместе с числом $x \in \mathbf{E}$ множеству **E** принадлежит число $x+1$, то $\mathbf{E} = \mathbf{N}.$

С помощью этого принципа можно доказать несколько полезных и постоянно в дальнейшем используемых свойств ***натуральных чисел***.

1. Сумма и произведение натуральных чисел является натуральными числами.

2. $(n \in \mathbf{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow ((n-1) \in \mathbf{N})$.

3. Для любого элемента $n \in \mathbf{N}$ *во множестве* $\{x \in \mathbf{N} | \ n < x\}$

$$\min \ \{x \in \mathbf{N} \mid n < x\} = n + \mathbf{1}.$$

В качестве прямых следствий утверждений 2 и 3 получаем следующие свойства 4, 5, 6 ***натуральных чисел***:

4. $(m \in \mathrm{N}) \wedge (n \in \mathbf{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n+1 \leq m)$ **.**

5. *Число* $(n+1) \in \mathbf{N}$ *непосредственно следует в* **N** *за натуральным числом n, т.е. нет натуральных чисел* x*, удовлетворяющих условию* $n < x < n+1$*, если* $n \in \mathbf{N}$.

6. Если $n \in \mathbf{N}$ и $n \neq 1$*, то число* $(n-1) \in \mathbf{N}$ и $(n-1)$ *непосредственно предшествует числу n в* **N***, т.е. нет натуральных чисел* x*, удовлетворяющих условию* $n-1 < x < n$ *, если* $n \in \mathbf{N}$.

7. В любом непустом подмножестве множества ***натуральных чисел*** *имеется* ***минимальный*** *элемент.*

Рациональные и иррациональные числа

a. Целые числа

Определение. Объединение множества ***натуральных чисел***, множества чисел, противоположных ***натуральным числам***, и нуля называется множеством ***целых чисел***. **Обозначение Z**.

Поскольку сложение и умножение ***натуральных чисел*** не выводит за пределы **N**, то эти же операции над ***целыми числами*** не выводят за пределы множества **Z**.

В том случае, когда для чисел $m, n \in \mathrm{Z}$ число $k = m \cdot n^{-1} \in \mathbf{Z}$, т.е. когда $m = k \cdot n$**,** где $k \in \mathbf{Z}$, говорят, что ***целое число*** *m* ***делится*** на ***целое число*** *n*, или ***кратно*** *n*, или *n* есть ***делитель*** *m*.

Делимость целых чисел путем надлежащих изменений знаков, т.е. домножением на число **-**1, если в этом есть необходимость, немедленно приводится к делимости соответствующих ***натуральных чисел***, в рамках которых она и изучается в арифметике.

Напомним без доказательства так называемую **основную теорему арифметики**, которой при рассмотрении некоторых примеров мы будем пользоваться.

Число $p \in \mathbf{N}, p \neq 1$, называется ***простым***, если в **N** у него нет делителей, отличных от 1 и *p*.

Основная теорема арифметики. Каждое ***натуральное число*** допускает и притом единственное (с точностью до порядка сомножителей) представление в виде произведения $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где

$p_1, \ \ldots, \ p_k$ – ***простые числа***.

Числа $m, n \in \mathbf{Z}$ называются ***взаимно простыми***, если у них нет общих делителей, отличных от 1 и **-**1.

Из приведенной теоремы, в частности, видно, что если произведение $m \cdot n$ делится на ***простое число*** *p*, то одно из чисел $m, \ n$ также делится на *p*.

b. Рациональные числа

Определение. Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m, n \in \mathbf{Z}$, называются ***рациональными***.
Обозначение Q.
Таким образом, ***упорядоченная пара*** (m, n) ***целых чисел*** определяет ***рациональное число*** $q = m \cdot n^{-1}$, если $n \neq 0$.

Число $q = m \cdot n^{-1}$ записывают также в виде отношения m и n или так называемой ***рациональной дроби*** $\frac{m}{n}$.

Правила действий с ***рациональными числами***, относящиеся к такой форме их представления дробями, излучавшиеся в школе, немедленно вытекают из определения ***рационального числа*** и аксиом вещественных чисел. В частности, «от умножения числителя и знаменателя дроби на одно и то же отличное от нуля целое число величина дроби не изменится», т.е. дроби $\frac{mk}{nk}$ *и* $\frac{m}{n}$ представляют одно и то же ***рациональное число***. В самом деле, поскольку

$$(nk)(k^{-1}n^{-1}) = 1, \text{ т.е. } (n \cdot k)^{-1} = k^{-1} \cdot n^{-1}, \text{ то}$$
$$(mk)(nk)^{-1} = (mk)(k^{-1}n^{-1}) = m \cdot n^{-1}.$$

Таким образом, различные ***упорядоченные пары*** (m, n) и (mk, nk) задают одно и то же ***рациональное число***. Следовательно, после соответствующих сокращений любое ***рациональное число*** можно задать ***упорядоченной парой*** взаимно ***простых целых чисел***.

С другой стороны, если пары (m_1, n_1) и (m_2, n_2) задают одно и то же ***рациональное число***, т.е. $m_1 \cdot n_1^{-1} = m_2 \cdot n_2^{-1}$, то $m_1 n_2 = m_2 n_1$, и если, например, m_1 и n_1 взаимно ***просты***, то в силу упомянутого следствия ***основной теоремы арифметики*** $n_2 \cdot n_1^{-1} = m_2 \cdot m_1^{-1} = k \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, что две ***упорядоченные пары*** $(m_1, n_1), (m_2, n_2)$ задают одно и то же ***рациональное число*** тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. существует число $k \in \mathbf{Z}$ такое, что, например, $m_2 = km_1$ и $n_2 = kn_1$.

c. Иррациональные числа

Определение. Вещественные числа, не являющиеся ***рациональными***, называются ***иррациональными***.

Классическим примером ***иррационального вещественного числа*** является $\sqrt{2}$, т.е. число $s \in \mathbf{R}$ такое, что $s > 0$ и $s^2 = 2$.

Иррациональность $\sqrt{2}$ в силу теоремы Пифагора как раз эквивалентна утверждению о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Можно показать, что в некотором смысле почти все вещественные числа ***иррациональны***. Среди ***иррациональных чисел*** выделяют еще так называемые ***алгебраические иррациональности*** и ***трансцендентные числа***.

Вещественное число называется ***алгебраическим***, если оно является корнем некоторого алгебраического уравнения $a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ с рациональными (или, что эквивалентно, с целыми) коэффициентами. В противном случае число называется ***трансцендентным***.

Только в 1882 г. было доказано, что знаменитое геометрическое число π трансцендентно[1].

[1] π – число, равное в евклидовой геометрии отношению длины окружности к ее диаметру. Отсюда общепринятое с XVIII века обозначение этого числа начальной буквой греческого слова *περιφερια* – периферия (окружность). Трансцендентность π доказана немецким

Принцип Архимеда

Архимед (Ἀρχιμήδης; 287 до н. э. — 212 до н. э.) — древнегреческий математик, физик и инженер из Сиракуз. Сделал множество открытий в геометрии. Заложил основы механики, гидростатики, автор ряда важных изобретений.

.

Переходим к важному как в теоретическом отношении, так и в плане конкретного использования чисел при измерениях и вычислениях принципу Архимеда. Принцип Архимеда, в сущности, отражает свойства ***натуральных и целых чисел***, связанные с аксиомой полноты (непрерывности).

1. В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества натуральных чисел имеется максимальный элемент.

2. Множество натуральных чисел неограниченно сверху.

▲ В противном случае существовало бы ***натуральное максимальное число***.

Но $n < n+1$. ▼

3. В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества целых чисел имеется максимальный элемент.

4. В любом непустом ограниченном снизу подмножестве множества натуральных чисел имеется минимальный элемент.

5. Множество целых чисел неограниченно ни сверху, ни снизу.

6. Принцип Архимеда. Если фиксировать произвольное положительное число h, *то для любого вещественного числа* x *найдется и притом единственное целое число* k *такое, что* $(k-1)h \le h < kh$.

7. Для любого положительного числа ε *существует натуральное число* n *такое, что*

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

▲ По принципу Архимеда найдется $n \in \mathbf{Z}$ такое, что $1 < \varepsilon \cdot n$.

Поскольку $0 < 1$ и $0 < \varepsilon$, имеем $0 < n$. Таким образом, $n \in \mathbf{N}$ и $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ▼

8. Ели число $x \in \mathbf{R}$ *таково, что* $0 \le x$ *и для любого* $n \in \mathbf{N}$ $x < \frac{1}{n}$, *то* $x = 0$.

9. Для любых чисел $a, b \in \mathbf{R}$ *таких, что* $a < b$, *найдется рациональное число* $r \in \mathbf{Q}$ *такое, что* $a < r < b$.

10. Для любого числа $x \in \mathbf{R}$ *существует и притом единственное целое число* $k \in \mathbf{Z}$ *такое, что* $k \le x < k-1$.

Указанное число k обозначается $[x]$ и называется целой частью числа x. Величина $\{x\} := x - [x]$ называется дробной частью числа x.

Итак, $x = [x] + \{x\}$ причем $\{x\} \ge 0$.

математиком Ф. Линдеманом. Из трансцендентности π, в частности, вытекает невозможность построения циркулем и линейкой отрезка длины π (задача о спрямлении окружности). Как и неразрешимость, этими средствами древней задачи о квадратуре круга.

Геометрическая интерпретация множества вещественных чисел

a . Числовая ось

По отношению к вещественным числам часто используют образный геометрический язык. Он связан с тем обстоятельством, что, как в общих чертах из школы известно, в силу аксиом геометрии между точками прямой ℓ и множеством **R** вещественных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие $f\colon \ell \to \mathbf{R}$. Причем это соответствие связано с движениями прямой. А именно, если T – параллельный перенос прямой ℓ по себе, то существует число $t \in \mathbf{R}$ (зависящее только от T) такое, что

$$f(T(x)) = f(x) + t \text{ для любой точки } x \in \ell .$$

Число, соответствующее точке $x \in \ell$ называется ***координатой*** точки x. Ввиду взаимной однозначности координату точки часто называют просто точкой. Например, вместо фразы «отметим точку, координата которой 1», говорят «отметим точку 1». Прямую ℓ при наличии указанного соответствия $f\colon \ell \to \mathbf{R}$ называют ***координатной осью***, ***числовой осью*** или ***числовой прямой***. Само множество **R** вещественных чисел также часто называют числовой прямой, и его элементы – точками числовой прямой.

Как отмечалось, отображение $f\colon \ell \to \mathbf{R}$, задающее на прямой ℓ координаты, таково, что при параллельном переносе T координаты образов точек прямой ℓ отличаются от координат самих точек на одну и ту же величину $t \in \mathbf{R}$.

Ввиду этого f полностью определяется указанием точки с координатой 0 и точки с координатой 1 или, короче, точки нуль, называемой ***началом координат***, и точки 1. Отрезок, определяемый этими точками, называется единичным отрезком. Направление, определяемое лучом с вершиной 0, содержащим точку 1, называется положительным, а движение в этом направлении (от 0 к 1) – движением слева направо. В соответствии с этим соглашением 1 лежит правее 0, а 0 – левее 1.

Описанное сопоставление точкам прямой их координат доставляет наглядную модель как отношению порядка во множестве **R** (отсюда термин ***линейная упорядоченность***). А также и аксиоме полноты или непрерывности множества **R**, которая на геометрическом языке означает, что в прямой ℓ «нет дыр», разбивающих ее на два не имеющих общих точек куска (такое разбиение осуществляется некоторой точкой прямой ℓ).

b . Некоторые наиболее употребительные числовые множества

Введем следующие обозначения и названия для перечисленных ниже числовых множеств:

$(a;b) := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ – интервал ab;

$[a;b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$ – отрезок ab;

$(a;b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$ – полуинтервал ab, содержащий конец b;

$[a;b) := \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$ – полуинтервал ab, содержащий конец a.

Определение. Интервалы, отрезки и полуинтервалы называются числовыми промежутками или просто промежутками.
Числа, определяющие промежуток, называются его концами.

Величина $b-a$ называется длиной промежутка ab. Если I – некоторый промежуток, то длину его мы будем обозначать через $|I|$.

Множества $(a;+\infty) := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$, $[a;+\infty) := \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x\}$,

$(-\infty;b) := \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$, $(-\infty;b] := \{x \in \mathbf{R} \mid x \le b\}$, $(-\infty;+\infty) := \mathbf{R}$

принято называть неограниченными промежутками.

В соответствии с таким употреблением символов $+\infty$ (читается «плюс бесконечность») и $-\infty$ (читается «минус бесконечность») для обозначения неограниченности числового множества **X** сверху (снизу), принято писать $\sup \mathbf{X} = +\infty$ $(\inf \mathbf{X} = -\infty)$.

Определение. Интервал, содержащий точку $x \in \mathbf{R}$, будем называть ***окрестностью*** этой точки.
В частности, при $\delta > 0$ интервал $(x-\delta; x+\delta)$ называется δ - ***окрестностью*** точки x. Его длина 2δ.

Расстояние между числами $x, y \in \mathbf{R}$ измеряется длиной промежутка, концами которого они являются. Чтобы не разбираться, где при этом лево, а где право, т.е. $x < y$ или $y < x$, и чему равна длина $y - x$ или $x - y$, можно использовать полезную функцию

$$|x| = \begin{cases} x \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -x \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

называемую ***модулем*** или ***абсолютной величиной*** числа.

Определение. Расстоянием между $x, y \in \mathbf{R}$ называется величина $|x-y|$.

Расстояние неотрицательно, равно нулю только при совпадении x и y; расстояние от x до y и от y до x одно и то же, ибо $|x-y| = |y-x|$; наконец, если $z \in \mathbf{R}$, то $|x-y| \le |x-z| + |z-y|$,

т.е. имеет место так называемое неравенство треугольника. Неравенство треугольника следует из свойства абсолютной величины числа, которое также называется неравенством треугольника (ибо получается из предыдущего при $z = 0$ и замене y на $-y$).

А именно, *для любых чисел* x, y *справедливо неравенство* $|x+y| \le |x| + |y|$, *причем равенство в нем имеет место в том и только в том случае, когда оба числа* x, y *неотрицательны или положительны.*

▲ Если $0 \le x$ и $0 \le y$, то $0 \le x + y$, $|x+y| = x + y$, $|x| = x$, $|y| = y$ и равенство установлено. Если $x \le 0$ и $y \le 0$, то $x + y \le 0$, $|x+y| = -(x+y) = -x - y$, $|x| = -x$, $|y| = -y$ и опять равенство имеет место. Пусть теперь одно из чисел отрицательно, а другое положительно, **например** $x < 0 < y$. Тогда либо $x < x + y \le 0$, либо $0 \le x + y < y$. В первом случае $|x+y| < |x|$, во втором $|x+y| < |y|$, т.е. в обоих случаях $|x+y| < |x| + |y|$. ▼

Используя принцип индукции, можно проверить, что $|x_1 + \dots x_n| \le |x_1| + \dots |x_n|$, причем равенство имеет место, если и только если все числа $x_1, \dots, x_n$ одновременно неотрицательны или одновременно не положительны.

Число $(a+b)/2$ часто называют серединой или центром промежутка с концами a, b, поскольку оно равноудалено от концов промежутка. В частности, точка $x \in \mathbf{R}$ является центром своей δ – окрестности $(x-\delta;\ x+\delta)$, и все точки δ - окрестности удалены от x меньше чем на число δ.

1.3. Основные леммы, связанные с полнотой множества вещественных чисел

Остановимся на нескольких принципах, каждый из которых можно было бы положить в основу построения теории вещественных чисел в качестве аксиомы полноты. Эти принципы названы основными леммами в соответствии с их широким использованием во всевозможных доказательствах теорем анализа.

а . **Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши- Кантора)**

Огюстен Луи Коши (фр. *Augustin Louis Cauchy*; 21 августа 1789, Париж – 23 мая 1857, Со, Франция) – великий французский математик.

Коши член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Георг Кантор (нем. *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*, 3 марта 1845, Санкт-Петербург – 6 января 1918, Галле (Заале)) – немецкий математик. Он наиболее известен как создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике.

Кантор ввёл понятие взаимно однозначного соответствия между элементами множеств, дал определения бесконечного и вполне-упорядоченного множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных.

Теорема Кантора, фактически, утверждает существование «бесконечности бесконечностей». Он определил понятия кардинальных и порядковых чисел и их арифметику. Его работа представляет большой философский интерес, о чём и сам Кантор прекрасно знал.

Теория Кантора о трансфинитных числах первоначально была воспринята нелогичной, парадоксальной и даже шокирующей теорией. Она натолкнулась на резкую критику со стороны математиков-современников, в частности, Леопольда Кронекера и Анри Пуанкаре; позднее — Германа Вейля и Лёйтзена Брауэра, а Людвиг Витгенштейн высказал возражения философского плана (см. Споры о теории Кантора). Некоторые христианские богословы (особенно представители неотомизма) увидели в работе Кантора вызов уникальности абсолютной бесконечности природы Бога, приравняв однажды теорию трансфинитных чисел и пантеизм. Критика его трудов была порой очень агрессивна: так, Пуанкаре называл его идеи «тяжёлой болезнью», поражающей математическую науку. В публичных заявлениях и личных выпадах Кронекера в адрес Кантора мелькали иногда такие эпитеты, как «научный шарлатан», «отступник» и «развратитель молодёжи». Десятилетия спустя после смерти Кантора, Витгенштейн с горечью отмечал, что математика «истоптана вдоль и поперёк разрушительными идиомами теории множеств», которое он отклоняет как «шутовство», «смехотворное» и «ошибочное». Периодически повторяющиеся с 1884 года и до конца дней Кантора приступы депрессии некоторое время ставили в вину его современникам, занявшим чересчур агрессивную позицию, но сейчас считается, что эти приступы, возможно, были проявлением биполярного расстройства.

Резкой критике противостояли всемирная известность и одобрение. В 1904 году Лондонское королевское общество наградило Кантора Медалью Сильвестра, высшей наградой, которую оно могло пожаловать. Сам Кантор верил в то, что теория трансфинитных чисел была сообщена ему свыше. В своё время, защищая теорию от критики, Давид Гильберт смело заявил: «Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор».

Определение. Функцию f натурального аргумента называют последовательностью или, полнее, последовательностью элементов множества $\mathbf{X}$.

Значение $f(n)$ функции f, соответствующее числу $n \in \mathbf{N}$, часто обозначают через x_n и называют n-м членом последовательности.

Определение. Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n, \ldots$ – последовательность каких-то множеств. Если справедливо отношение, $\mathbf{X}_1 \supset \mathbf{X}_2 \supset \ldots \supset \mathbf{X}_n \supset \ldots$ т.е. $\forall n \in \mathbf{N}\, (\mathbf{X}_n \supset \mathbf{X}_{n+1})$, то говорят, что имеется последовательность вложенных множеств.

Лемма. *Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbf{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.*

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k, длина которого $|I_k| < \varepsilon$, то c – единственная общая точка всех отрезков.

▲ Заметим, прежде всего, что для любых двух отрезков $I_m = [a_m; b_m]$, $I_n = [a_n; b_n]$ нашей последовательности $a_m \le b_n$. Действительно, в противном случае мы получили бы

$a_n \le b_n < a_m \le b_m$, т.е. отрезки I_m, I_n не имели бы общих точек, в то время как один из них (имеющий больший номер) должен содержаться в другом.

Таким образом, для числовых множеств $\mathbf{A} = \{a_m,\ m \in \mathbf{N}\}, \mathbf{B} = \{b_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ выполнены условия аксиомы полноты, в силу которой найдется число $c \in \mathbf{R}$ такое, что $\forall a_m \in \mathbf{A}, \forall b_n \in \mathbf{B}$ выполнено $a_m \le c \le b_n$.

В частности, $a_n \le c \le b_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Но это и означает, что точка c принадлежит всем отрезкам I_n.

Пусть теперь c_1 и c_2 – две точки, обладающие эти свойством.

Если они различны и, например $c_1 < c_2$, то при любом $n \in \mathbf{N}$

$$a_n \le c_1 < c_2 \le b_n,$$

поэтому $0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n$ и длина каждого отрезка нашей последовательности не может быть меньше положительной величины $c_2 - c_1$. Значит, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то общая точка у них единственная. ▼

b. Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля– Лебега)

Феликс Эдуард Жустин **Эмиль Борель** (фр. *Félix Edouard Justin Émile Borel*) (7 января 1871 — 3 февраля 1956, Париж) — французский математик и политический деятель.

Вместе с Р. Бэром и Анри Лебегом был одним из основоположников теории меры и её приложений в теории вероятностей.

Анри Леон Лебег (фр. Henri Léon Lebesgue; 28 июня 1875, Бове, департамент Уаза — 26 июля 1941, Париж) — французский математик, член Парижской АН (1922), член-корреспондент АН СССР (1929). Профессор Парижского университета (с 1910).

Наиболее известен как автор теории интегрирования (т. н. интеграл Лебега), обобщающей обычное определение интеграла на более широкий класс функций. Интеграл Лебега нашёл широкое применение в теории вероятностей.

Определение. Говорят, что система $\mathbf{S} = \{\mathbf{X}\}$ множеств $\mathbf{X}$ ***покрывает*** множество $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{Y} \subset \bigcup\limits_{\mathbf{X} \in \mathbf{S}} \mathbf{X}$ (т.е. если любой элемент y множества $\mathbf{Y}$ содержится, по крайней мере, в одном из множеств $\mathbf{X}$ системы $\mathbf{S}$).

Подмножество множества $\mathbf{S} = \{\mathbf{X}\}$, являющегося системой множеств, будем называть подсистемой системы $\mathbf{S}$.

Таким образом, подсистема системы множеств сама является системой множеств того же типа.

Лемма. *В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.*

с. Лемма о предельной точке
(принцип Больцано - Вейерштрасса)

Больцано Бернард (5. 10. 1781-18. 12. 1848) - чешский математик, философ и логик. Родился в Праге. В 1800 г. окончил философский, а в 1805 г. - теологический факультет Пражского университета с присвоением ученой степени доктора философии. В 1805-1820 гг. занимал кафедру истории религии в Пражском университете. За выступления против австрийского правительства отстранен от работы (1820 г.) и отдан под тайный надзор полиции, лишен права публичного выступления.

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (нем. *Karl Theodor Wilhelm Weierstraß*; 31 октября 1815 — 19 февраля 1897) — выдающийся немецкий математик, «отец современного анализа».

С конца 1850-х годов международная известность Вейерштрасса быстро растёт. Этим он обязан великолепному качеству своих лекций. Вот список тематики его курсов:

- Введение в теорию аналитических функций, включающее теорию действительных чисел.
- Теория эллиптических функций, приложения эллиптических функций к задачам геометрии и механики.
- Теория абелевых интегралов и функций.
- Вариационное исчисление.

Напомним, что окрестностью точки $x \in \mathbf{R}$ назван интервал, содержащий эту точку; δ - окрестностью точки x назвали интервал $(x-\delta; x+\delta)$.

Определение. Точка $p \in \mathbf{R}$ называется ***предельной точкой*** множества $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества **X**.

Это условие, очевидно, равносильно тому, что в любой окрестности точки p есть, по крайней мере, одна, не совпадающая с p, точка множества **X**.

Приведем несколько примеров.

Если $\mathbf{X} = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbf{R} \middle| n \in \mathbf{N} \right\}$, то предельной для $\mathbf{X}$ является только точка $0 \in \mathbf{R}$.

Для интервала $(a; b)$ предельной является каждая точка отрезка $[a; b]$, и других предельных точек в этом случае нет.

Для интервала $(a; b)$ предельной является каждая точка отрезка $[a; b]$, и других предельных точек в этом случае нет.

Для множества **Q** ***рациональных чисел*** предельной является каждая точка $\mathbf{R}$, ибо, как мы знаем, в любом интервале вещественных чисел имеются ***рациональные числа***.

Лемма. *Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.*

1.4. Счетные и несчетные множества

Сделаем небольшое, но весьма полезное для дальнейшего, добавление к тем сведениям о множествах, которые уже были изложены.

а. Мощность множества (кардинальные числа)

Говорят, что множество **X** ***равномощно*** множеству **Y**, если существует биективное отображение **X** на **Y**, т.е. каждому элементу $x \in \mathbf{X}$ сопоставляется элемент $y \in \mathbf{Y}$, причем