Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Важным этапом при исследовании реальных физических процессов является формулировка математической задачи, адекватной рассматриваемому явлению. Для описания математических моделей были разработаны дифференциальные уравнения в частных производных.

В настоящее время с помощью таких уравнений моделируют процессы различной природы: физические, химические, биологические, экономические и др. Широкое применение методы математической физики находят и при решении инженерных задач.

В основе уравнений математической физики лежат фундаментальные законы природы — законы сохранения, связанные с симметрией пространства и времени. Благодаря этому различные, на первый взгляд, процессы, такие как распространение теплоты в сплошной среде, диффузия химических компонентов, проникновение магнитного поля в хорошо проводящую среду и распространение волн эпидемий, можно описать одинаковыми по форме уравнениями.

История математического аппарата уравнений в частных производных начинается в первой половине XVIII в. в работах Эйлера, посвященных теории поверхностей. Важный вклад в развитие уравнений в частных производных внесли Даламбер, Лагранж, Коши, Фурье и другие ученые.

Прежде всего, в задаче математической физики выделяют область, в которой следует решить уравнение. Эта область отражает геометрические размеры и форму тела, в котором протекает процесс.

На границе области выставляют некоторые граничные условия на искомую функцию, которые учитывают связь процесса в теле с аналогичным процессом в окружающей среде.

Задачи, в которых учитывают граничные условия, называют *краевыми задачами*. Если на различных участках границы заданы граничные условия различных типов, то задачу называют *смешанной краевой задачей*. Иногда, не беря во внимание влияние на исследуемый процесс формы и размеров тел, задачу решают в безграничном пространстве. Такие задачи называются *задачами Коши*.

Ж. Адамаром было введено понятие корректной постановки задачи математической физики: задача для уравнения в частных производных в рассматриваемой области поставлена корректно, если решение существует, единственно и устойчиво к малым возмущениям исходных данных [1].

В учебном пособии рассматриваются основные виды задач, возникающие при изучении уравнений в частных производных, и методы их решения. Каждый раздел содержит теоретическое введение, несколько задач с решениями, которые иллюстрируют применение методов исследования краевых и начально-краевых задач; предлагаются задания для самостоятельной работы студентов.

Разнообразие и объемность литературы по уравнениям математической физики порой осложняют работу с ней.

При изложении материала в учебном пособии обращается внимание на конкретные задачи математической физики.

Важнейшими уравнениями математической физики являются: уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности, волновое уравнение.

Уравнение Лапласа встречается в задачах электростатики, теории потенциала, гидродинамики, теории теплопередачи и во многих других разделах физики, а также в теории функций комплексного переменного и в различных областях математического анализа. Уравнение Лапласа является простейшим представителем широкого класса так называемых *эллиптических уравнений*.

Также важное место в теории уравнений с частными производными и ее приложениях занимает уравнение теплопроводности. Это уравнение встречается в задачах теплопередачи, диффузии и многих других разделах физики, а также играет важную роль в теории вероятностей. Оно является наиболее простым представителем класса так называемых *параболических уравнений*.

Волновое уравнение описывает различные волновые процессы, в частности распространение звуковых волн. Оно играет важную роль в задачах акустики. Это — представитель класса так называемых *гиперболических уравнений* [2].

1. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1.1. Малые поперечные колебания струны

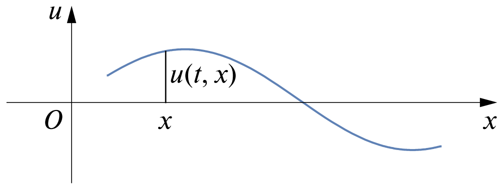

Рис. 1. Струна в момент времени t

Рассмотрим в плоскости Oux тонкую гибкую упругую нить (струну) (рис. 1). Допустим, что, если ее вывести из положения равновесия, то движение точек струны будет происходить в одной плоскости. Каждая точка движется параллельно оси Ou, и ее смещение в момент времени t: $u(t, x)$. Будем предполагать, что смещения струны от положения равновесия малы. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, в каждой точке направлены по касательной к ее мгновенному профилю. Это условие выражает собой тот факт, что струна не сопротивляется изгибу, то есть, если удалить часть струны, лежащую по одну сторону от какой-либо ее точки, то сила натяжения T, заменяющая действие удаленной части, будет направлена по касательной.

При каждом фиксированном времени t график $u(t, x)$ представляет форму колеблющейся струны в момент времени t, частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u'_x(t, x)$ — угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x.

При постоянном значении x функция $u(t, x)$ задает закон движения точки с абсциссой x вдоль прямой, параллельной оси Ou:

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = u'_t(t, x)$ — скорость этого движения;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u''_t(t, x)$ — ускорение.

Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать $(u'_x)^2$ по сравнению с 1. Длина участка струны в таком случае:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (u'_x)^2}\,dx = \int_a^b \left(1 + \frac{(u'_x)^2}{2} + \cdots\right) dx = b - a,$$

то есть удлинением струны можно пренебречь.

Пусть $\alpha(t, x)$ — угол наклона касательной к оси Ox, $\mathrm{tg}\alpha = u'_x$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (u'_x)^2}} \approx 1, \sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}} \approx u'_x.$$

Рассмотрим малый участок струны от x до $x + \Delta x$ (рис. 2).

Проектируем силы T_1, T_2 на ось Ox:

$$-T_1 \cdot \cos\alpha_1 + T_2 \cdot \cos\alpha_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T.$$

Проектируем силы T_1, T_2 на ось Ou:

$$-T \cdot \sin\alpha_1 + T \cdot \sin\alpha_2 = T\left[u'_x(t,x + \Delta x) - u'_x(t,x) = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\Delta x,$$

так как $\sin\alpha_1 = \mathrm{tg}\alpha_1 = u'_x(t, x)$, $\sin\alpha_2 = \mathrm{tg}\alpha_2 = u'_x(t, x + \Delta x)$.

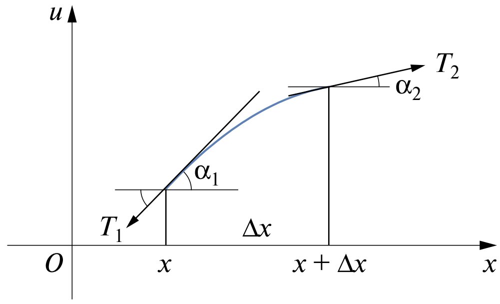

Рис. 2. Элемент струны

По второму закону Ньютона:

$$\rho\Delta x u''_{tt} = T u''_{xx}\Delta x,$$

где ρ — плотность струны.

$\rho u''_{tt} = T u''_{xx}$, $u''_{tt} = \dfrac{T}{\rho}u''_{xx}$, пусть $\dfrac{T}{\rho} = a^2$, тогда $\boxed{u''_{tt} = a^2 u''_{xx}}$ — это уравнение свободных колебаний струны.

В случае, когда на струну действует внешняя сила $F(t, x)$, то уравнение колебаний струны будет иметь вид: $u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + \dfrac{F(t, x)}{\rho}$ [3, 4].

1.2. Малые продольные колебания тонкого однородного прямого стержня

Стержень — это тело цилиндрической (призматической формы) для растяжения или сжатия которого нужно приложить некоторое усилие. Будем считать, что все силы действуют вдоль оси стержня, и поперечные сечения, перемещаясь вдоль этой оси, остаются плоскими и параллельными друг другу (это допущение оправдано, если поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной).

Если растянуть (сжать) стержень или ударить по его торцу, то будут происходить колебания. Пусть $u(t, x)$ обозначает, насколько сдвинулось сечение, которое в покое было в точке x в момент времени t (рис. 3, 4).

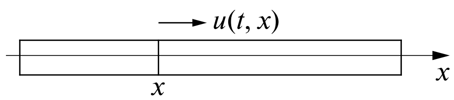

Рис. 3. Элемент стержня в момент времени t

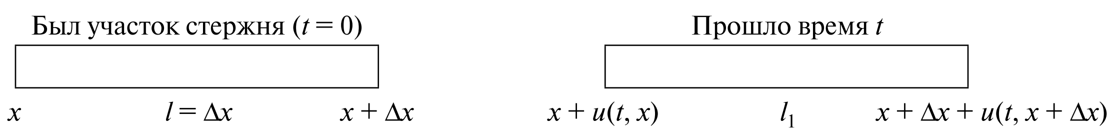

Рис. 4. Элемент стержня в начальный момент и в момент времени t

$$l_1 = x + \Delta x + u(t, x + \Delta x) - x - u(t, x) = \Delta x + u(t, x + \Delta x) - u(t, x),$$

$$\Delta l = l_1 - l = u(t, x + \Delta x) - u(t, x).$$

По закону Гука

$$T = ES\frac{\Delta l}{l} = ES\frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} = ESu'_x(t, x),$$

где E — модуль Юнга; S — площадь поперечного сечения стержня, то есть $T = ESu'_x(t, x)$.

Рассмотрим элемент стержня длиной Δx с действующими на него силами. Например, сила $ESu'(t, x + \Delta x)$ действует на левую часть сечения со стороны правой (рис. 5).

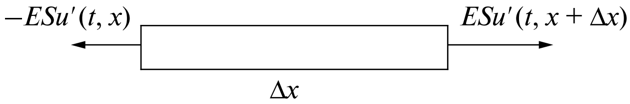

Рис. 5. Силы, действующие на элемент стержня

По второму закону Ньютона

$$mu''_{tt} = \rho S\Delta x u''_{tt} = ESu'(t, x + \Delta x) - ESu'(t, x).$$

Разделим на $S\Delta x$ и пусть $\Delta x \to 0$, тогда $\rho u''_{tt} = Eu''_{xx}$, обозначим $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, получим

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}.$$

1.3. Начальные и краевые условия

1. Начальные условия — это условия, заданные в начальный момент времени, который часто считается нулевым. Задаются начальная форма струны и ее начальная скорость:

$$u_{|t=0} = f(x);$$

$$u'_{|t=0} = F(x).$$

2. Краевые (граничные) условия — это условия на границе изучаемой среды:
$u_{|x=0} = 0$ — закрепленный левый конец (смещения отсутствуют);
$u'_{|x=0} = 0$ — свободный левый конец (это следует из условия равенства нулю силы).

1.4. Задача о свободных колебаниях конечной струны. Метод Фурье

Пусть струна длины l закреплена на обоих концах $x = 0$ и $x = l$.
Постановка задачи
Уравнение колебаний: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,
начальные условия: $\begin{cases} u_{|t=0} = f(x), \\ u'_{|t=0} = F(x), \end{cases}$
краевые условия: $\begin{cases} u_{|x=0} = 0, \\ u_{|x=l} = 0. \end{cases}$
Решение
Метод Фурье еще называют методом разделения переменных. Он состоит в следующем: неизвестную функцию $u(t, x)$ ищем в виде произведения двух новых неизвестных функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $\boxed{u(t, x) = X(x) \cdot T(t)}$.

Отсюда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' \cdot T$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \cdot T''$. Подставляя в уравнение, получим:

$$XT'' = a^2 X''T \Rightarrow \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = c = \text{const},$$