

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ЧАСТЬ 1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ.....	6
Введение. Ключевые правила и формулы .....	6
Раздел 1.1. Продольная сила. Напряжения и деформации.....	10
Раздел 1.2. Испытание конструкционных материалов на растяжение и сжатие.....	13
Раздел 1.3. Механические свойства материалов.....	16
Раздел 1.4. Расчёты стержней на прочность и жёсткость.....	20
ЧАСТЬ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ.....	28
Введение. Ключевые правила и формулы .....	28
Раздел 2.1. Статические моменты. Центр тяжести поперечного сечения.....	35
Раздел 2.2. Моменты инерции сечения. Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей.....	38
Раздел 2.3. Главные оси и главные моменты инерции поперечного сечения.....	45
Раздел 2.4. Моменты инерции, моменты сопротивления, радиусы инерции поперечных сечений.....	49
ЧАСТЬ 3. ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ.....	53
Введение. Ключевые правила и формулы .....	53
Раздел 3.1. Определение поперечной силы и изгибающего момента в поперечных сечениях стержней.....	58
Раздел 3.2. Характерные особенности эпюр поперечных сил « $Q$ » и изгибающих моментов « $M$ ».....	65
Раздел 3.3. Напряжения в поперечных сечениях балки.....	69
Раздел 3.4. Расчёты на прочность.....	75
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	79

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие позволит студентам проверить и расширить свои знания и навыки в освоении теоретического и практического материала по темам «Центральное растяжение и сжатие стержней», «Геометрические характеристики поперечных сечений стержней», «Изгиб стержней».

С помощью представленных тестов можно подготовиться к прохождению тестирования по соответствующим расчётно-графическим работам. Так как каждый тест снабжён комментируемым ответом, учащиеся могут контролировать уровень своей подготовки в режиме «самотестирования». К каждому тесту (заданию) предлагается пять вариантов ответа. Причём все ответы помечены или символом «○» (кружок), или символом «□» (квадрат). Символом «○» обозначены ответы, из которых только *один* является правильным, а символом «□» — ответы, из которых правильными являются *несколько* из пяти предложенных (но не более четырех). Таким образом, тестируемому даётся некоторая подсказка, в целом упрощающая задание. В следующих за ответами комментариях содержится решение поставленной в тесте задачи и краткие сведения по соответствующему теоретическому материалу. В конце каждого теста предлагается *правильный ответ*.

При прохождении реального аудиторного тестирования на кафедре сопротивления материалов действуют такие же принципы. Студенту необходимо ответить на пять вопросов, включающих три задачи и два теоретических задания. Время тестирования — 15 минут. Для получения удовлетворительной оценки необходимо правильно ответить на три вопроса из пяти предложенных. В учебно-методическом пособии использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: сила —  $P$ , площадь поперечного сечения стержня —  $A$ .

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также  $\text{кН/см}^2$  ( $1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$ ).

# ЧАСТЬ 1 ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

## Введение КЛЮЧЕВЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ

*Центральное растяжение-сжатие* — это напряжённо-деформированное состояние, вызываемое нагрузками, действующими вдоль продольной оси стержня  $Ox$  (рис. 1.1, *a*). В результате в поперечных сечениях стержня возникает только одно внутреннее усилие — продольная сила  $N(x)$ . Далее при решении задач будем писать просто  $N$ .

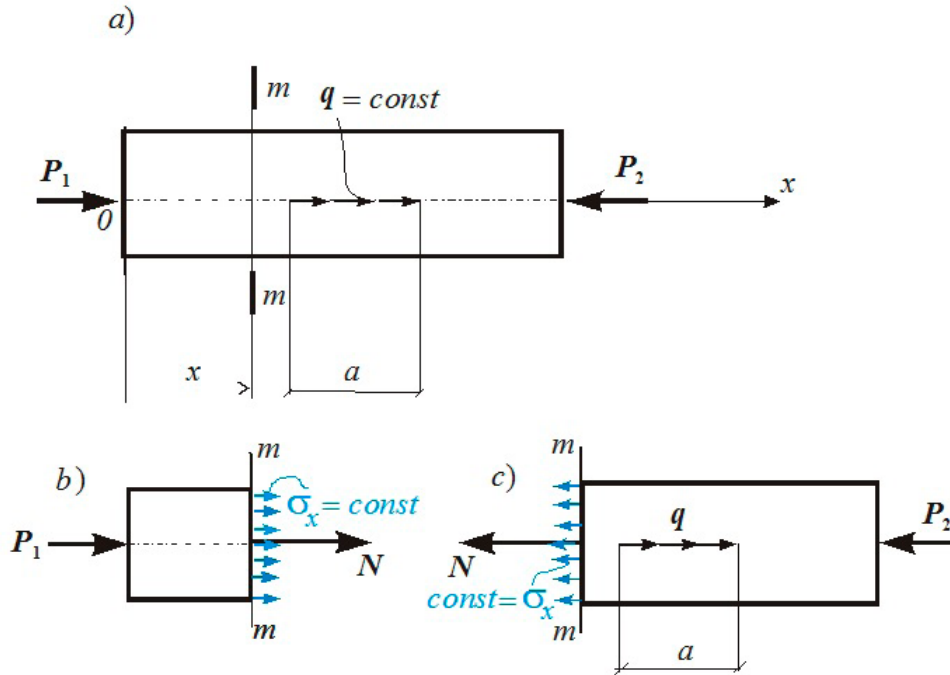


Рис. 1.1

- Правило знаков для продольной силы  $N$ .

$N > 0$ , если вектор усилия вызывает растяжение и направлен «от сечения» (рис. 1.2, *a*). И наоборот,  $N < 0$ , если вектор усилия вызывает сжатие и направлен «в сечение» (рис. 1.2, *b*). Правило действует независимо от того, с какой стороны стержня ведётся расчёт: «слева направо» или «справа налево».

Численно продольная сила равна сумме проекций на ось  $Ox$  всех сил (включая реакции), расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения. Тогда из рис. 1.1, *a* следует, что при определении  $N$  в сечении  $m$ - $m$  можно пойти двумя путями:

- 1) рассмотреть равновесие *левой* части стержня (рис. 1.1, *b*):

$$N + P_1 = 0; \quad N = -P_1; \tag{1.1}$$

- 2) рассмотреть равновесие *правой* части стержня (рис. 1.1, *c*):

$$N + P_1 - qa = 0; \quad N = qa - P_1. \tag{1.2}$$

Так как стержень находится в равновесии, то решения (1.1) и (1.2) являются эквивалентными.

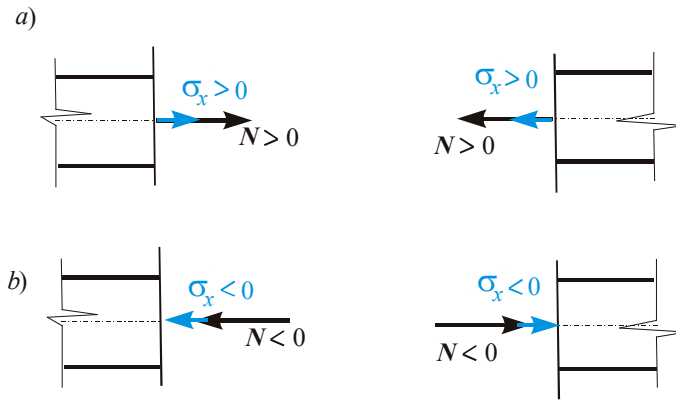


Рис. 1.2

- *Напряжения при центральном растяжении-сжатии.*

В поперечных сечениях стержня возникают только нормальные напряжения  $\sigma_x$ . Они равномерно распределены по площади  $A$  поперечного сечения (рис. 1.1, *b, c*) и определяются по формуле:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (1.3)$$

- *Правило знаков для нормальных напряжений  $\sigma_x$ .*

При растяжении  $\sigma_x > 0$ , и вектор напряжения направлен «от сечения» (рис. 1.2, *a*). При сжатии  $\sigma_x < 0$ , и вектор напряжения направлен «в сечение» (рис. 1.2, *b*). Правило действует вне зависимости от выбранного хода.

Закон Гука показывает, что нормальные напряжения пропорциональны относительным продольным деформациям:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (1.4)$$

где  $E$  — модуль упругости первого рода.

Далее индекс « $x$ » будем опускать:  $\sigma = E\varepsilon$ .

Коэффициент Пуассона  $\nu$  связывает продольные  $\varepsilon$  и поперечные  $\varepsilon'$  относительные деформации:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (1.5)$$

- *Дифференциальная зависимость между продольным усилием  $N$  и распределённой нагрузкой  $q$ :*

$$\frac{dN(x)}{dx} = -q(x). \quad (1.6)$$

- *Характерные особенности эпюр продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$ :*

1. Если на участке стержня распределённая нагрузка  $q = 0$ , то в пределах этого участка продольная сила  $N = \text{const}$ . При условии, что на данном участке площадь поперечного сечения  $A = \text{const}$ , напряжения  $\sigma = \text{const}$ .

2. Если на участке стержня распределённая нагрузка  $q = \text{const}$ , то продольная сила  $N$  в пределах этого участка изменяется по линейному закону. Если площадь поперечного сечения на данном участке  $A = \text{const}$ , то напряжения  $\sigma$  также изменяются по линейному закону.

3. Если на участке стержня распределённая нагрузка  $q$  изменяется по линейному закону, то продольная сила  $N$  в пределах этого участка изменяется по закону квадратной параболы. При условии, что на данном участке  $A = \text{const}$ , напряжения  $\sigma$  также изменяются по закону квадратной параболы.

4. В сечении стержня, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $N$  возникает скачок, численно равный величине этой силы.

• *Осевое перемещение  $u(x)$  определяется по формуле (предполагается отсутствие температурной нагрузки):*

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{\sigma}{E} dx. \quad (1.7)$$

При  $E = \text{const}$  формула приобретает вид:

$$u(x) = u_0 + \frac{\Omega_{\sigma[0,x]}}{E}, \quad (1.8)$$

где  $u_0$  — перемещение начального сечения при  $x=0$ ;  $\Omega_{\sigma[0,x]}$  — площадь эпюры напряжений  $\sigma$ , ограниченная начальным  $x=0$  и заданным сечением  $x$  (рис. 1.3).

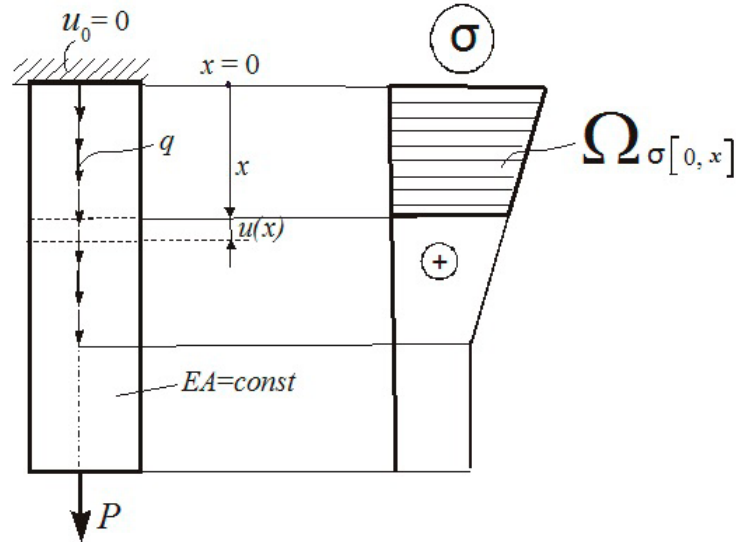


Рис. 1.3

- Правило знаков для осевого перемещения  $u(x)$ .

Осевое перемещение  $u(x) > 0$ , если оно совпадает с направлением выбранного хода.

Удобно при решении задач использовать следующие формулы.

Полное удлинение – укорочение стержня от силы  $P$ , приложенной на конце ( $EA = \text{const}$ ) (рис. 1.4, a, b):

$$\Delta l = \pm \frac{Pl}{EA}; \quad (1.9)$$

полное удлинение – укорочение стержня от нагрузки  $q = \text{const}$ , равномерно распределённой по всей длине стержня ( $EA = \text{const}$ ) (рис. 1.5, a, b):

$$\Delta l = \pm \frac{ql^2}{2EA}. \quad (1.10)$$

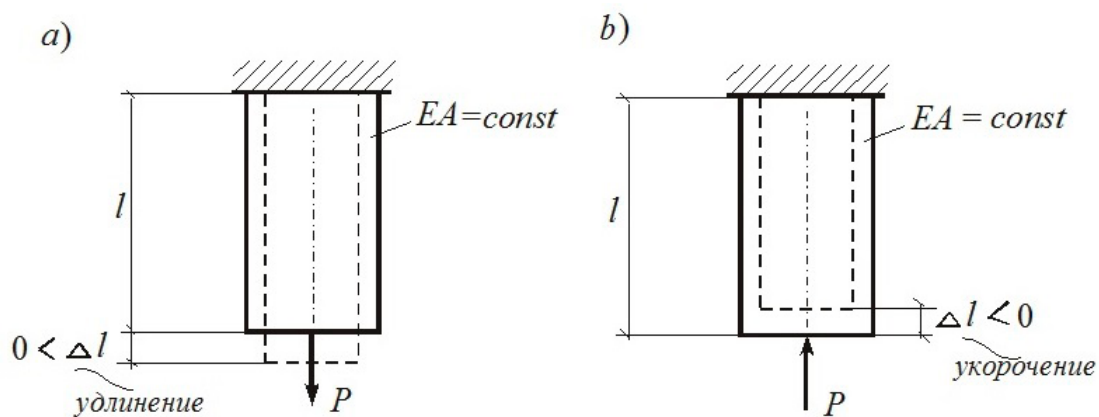


Рис. 1.4

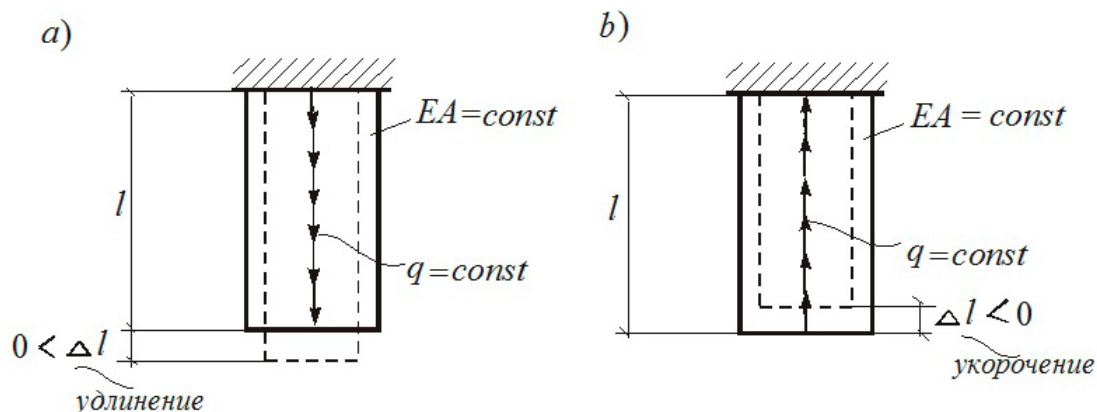


Рис. 1.5

• Условия прочности при центральном растяжении и сжатии по методу предельных состояний записываются так:

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{N_{\text{рас}}}{A} \leq \gamma_c R_{\text{рас}}; \quad (1.11)$$

$$\sigma_{\text{сж}} = \frac{N_{\text{сж}}}{A} \leq \gamma_c R_{\text{сж}}. \quad (1.12)$$

Здесь продольные усилия берутся в опасных сечениях по модулю. Из этого же условия определяется допустимая расчётная нагрузка, то есть решается задача о грузоподъёмности стержня или стержневой системы.

• Разрушающая нагрузка  $P_{\text{раз}}$ .

△ Для стержней **из пластичного материала** полагается:

1) в случае *статически определимой* задачи разрушающая нагрузка  $P_{\text{раз}}$  определяется из условия, что в наиболее опасном сечении (или в наиболее опасном стержне системы) возникают напряжения, равные пределу текучести  $\sigma = \sigma_T$ ;

2) в случае *статически неопределимой* задачи разрушающая нагрузка  $P_{\text{раз}}$  определяется из условия, что во всех сечениях стержня (или во всех стержнях системы) образуются напряжения, равные пределу текучести  $\sigma = \sigma_T$ .

△ Для стержней **из хрупкого материала** за разрушающую нагрузку  $P_{\text{раз}}$  принимают такую силу, при которой в наиболее опасном сечении (или в наиболее опасном стержне системы) возникают напряжения, равные пределу прочности  $\sigma = \sigma_B$ . Это условие относится и к статически определимым, и к статически неопределимым задачам.

## РАЗДЕЛ 1.1 ПРОДОЛЬНАЯ СИЛА. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

### Тест 1.1.1

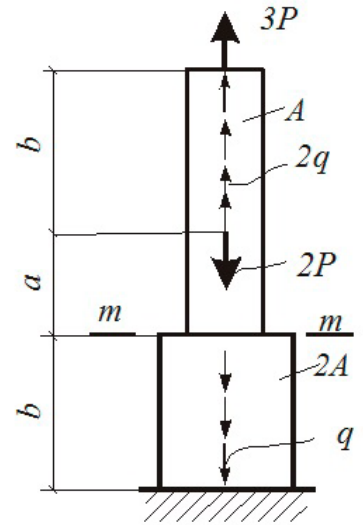
Продольная сила в сечении  $m-m$  стержня равна ...

- 1)  $q(b + a) + 2P$ ;
- 2)  $2qb - P$ ;
- 3)  $-3P + 2qb$ ;
- 4)  $2qbA$ ;
- 5)  $P + 2qb$ .

*Комментарий:*

Продольная сила в любом сечении стержня определяется статически с помощью метода сечений. Рассматривая равновесие части стержня **выше** сечения  $m-m$ , имеем:  $N = 3P + 2qb - 2P = P + 2qb$ .

*Правильный ответ:* 5).



### Тест 1.1.2

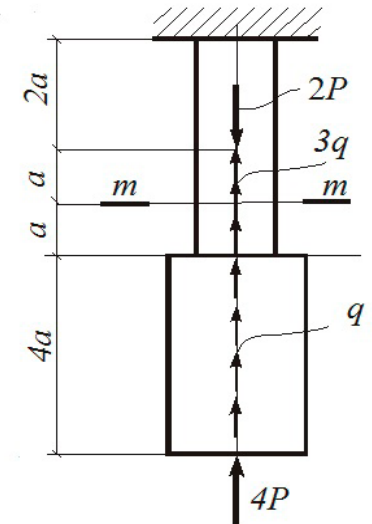
Продольная сила в сечении  $m-m$  стержня равна ...

- 1)  $-P - 7qa$ ;
- 2)  $-2P + 3qa$ ;
- 3)  $3qa$ ;
- 4)  $6qa$ ;
- 5)  $-2P - 10qa$ .

*Комментарий:*

Продольная сила в любом сечении стержня определяется статически с помощью метода сечений как сумма проекций всех нагрузок, приложенных к одной из частей стержня, на его ось. Рассматривая равновесие части стержня **ниже** сечения  $m-m$ , имеем:  $N = -4P - 4qa - 3qa = -4P - 7qa$ .

*Правильный ответ:* 1).



### Тест 1.1.3

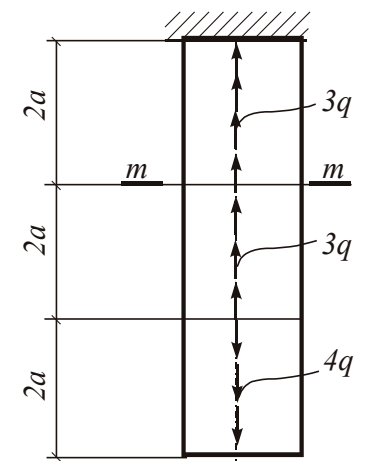
Продольная сила в сечении  $m-m$  стержня равна ...

- 1)  $-6qa$ ;
- 2)  $-12qa$ ;
- 3)  $4qa$ ;
- 4)  $2qa$ ;
- 5)  $-4qa$ .

*Комментарий:*

Продольная сила в любом сечении стержня определяется как сумма проекций всех нагрузок, приложенных к одной из частей стержня, на его ось. Рассматривая равновесие части стержня **ниже** сечения  $m-m$ , имеем:  $N = 4q \cdot 2a - 3q \cdot 2a = -2qa$ .

*Правильный ответ:* 4).



**Тест 1.1.4**

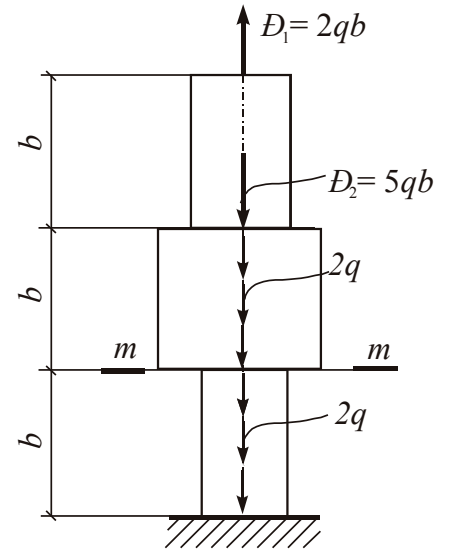
Продольная сила в сечении  $m-m$  стержня равна ...

- 1)  $-2qb$ ;
- 2)  $-4qb$ ;
- 3)  $-7qb$ ;
- 4)  $7qb$ ;
- 5)  $-5qb$ .

*Комментарий:*

Продольная сила определяется с помощью метода сечений. Растягивающая продольная сила считается положительной, а сжимающая — отрицательной. Рассматривая равновесие части стержня **выше** сечения  $m-m$ , имеем:  $N = 2qb - 5qb - 2qb = -5qb$ .

*Правильный ответ:* 5).



**Тест 1.1.5**

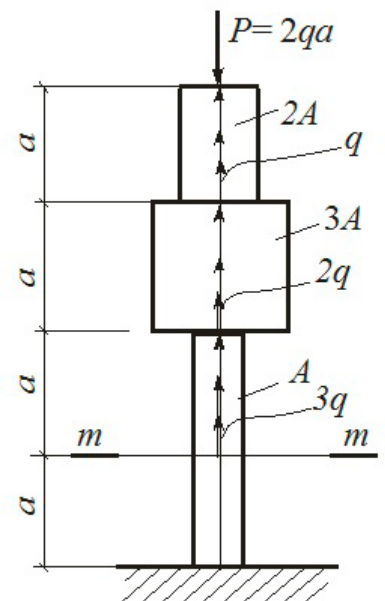
Продольная сила в сечении  $m-m$  стержня равна ...

- 1)  $4qa$ ;
- 2)  $\frac{3qa}{A}$ ;
- 3)  $5qa$ ;
- 4)  $\frac{-4qa}{A}$ ;
- 5)  $6qa$ .

*Комментарий:*

Растягивающая продольная сила считается положительной, а сжимающая — отрицательной. Используя метод сечений, рассмотрим равновесие части стержня **выше** сечения  $m-m$ . В результате получим:  $N = -2qa + qa + 2qa + 3qa = 4qa$ .

*Правильный ответ:* 1).



**Тест 1.1.6**

Нормальные напряжения в сечении  $m-m$  стержня равны ...

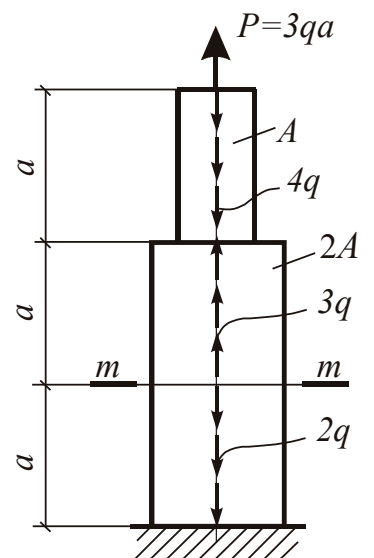
- 1)  $\frac{3qa}{2A}$ ;
- 2)  $\frac{qa}{A}$ ;
- 3)  $\frac{qa}{2A}$ ;
- 4) 0;
- 5)  $\frac{-3qa}{2A}$ .

*Комментарий:*

Нормальные напряжения в указанном сечении для случая центрального растяжения-сжатия равны  $\sigma = N/(2A)$ . Продольную силу  $N$  определяем из равновесия части стержня, расположенной **выше** сечения  $m-m$ . В результате имеем:

$$\sigma = \frac{N}{2A} = \frac{3qa - 4qa + 3qa}{2A} = \frac{qa}{A}.$$

*Правильный ответ:* 2).





### Тест 1.1.7

Нормальные напряжения в сечении  $m-m$  стержня равны ...

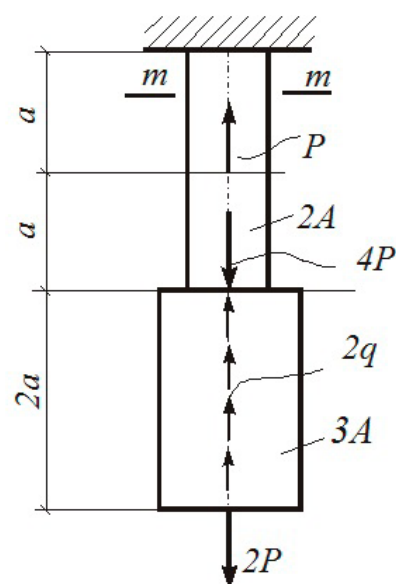
- 1)  $\frac{-P}{2A}$ ;
- 2)  $\frac{3P}{2A}$ ;
- 3) 0;
- 4)  $\frac{5P-4qa}{2A}$ ;
- 5)  $\frac{5P-6qa}{2A}$ .

Комментарий:

Нормальные напряжения в заданном сечении стержня равны  $\sigma = N/(2A)$ . Продольную силу  $N$  определяем с помощью метода сечений как сумму проекций всех нагрузок, приложенных к одной из частей стержня, на его ось. Рассматривая равновесие части стержня, расположенной **ниже** сечения  $m-m$ , имеем:

$$\sigma = \frac{N}{2A} = \frac{-P + 4P + 2P - 2q \cdot 2a}{2A} = \frac{5P - 4qa}{2A}.$$

Правильный ответ: 4).



### Тест 1.1.8

Нормальные напряжения в сечении  $m-m$  стержня равны ...

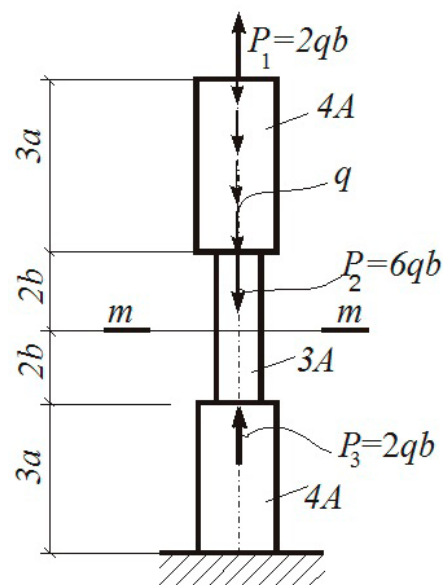
- 1)  $\frac{-q(2b+3a)}{3A}$ ;
- 2)  $\frac{q(2b+3a)}{3A}$ ;
- 3)  $\frac{-2qb}{A}$ ;
- 4)  $\frac{-4qb}{3A}$ ;
- 5)  $\frac{-q(4b+3a)}{3A}$ .

Комментарий:

Нормальные напряжения  $\sigma$  в случае центрального растяжения-сжатия определяются как отношение продольной силы  $N$  в данном сечении к площади поперечного сечения стержня. Сила  $N$  определяется как сумма проекций всех нагрузок, приложенных к одной из частей стержня, на его ось. Учитывая правило знаков для напряжений, рассмотрим равновесие части стержня, расположенной **выше** сечения  $m-m$ . В итоге имеем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{3A} = \frac{P_1 - P_2 - q \cdot 3a}{3A} = \frac{2qb - 6qb - 3qa}{3A} = \\ &= \frac{-4qb - 3qa}{3A} = \frac{-q(4b + 3a)}{3A}. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 5).



## РАЗДЕЛ 1.2.

### ИСПЫТАНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

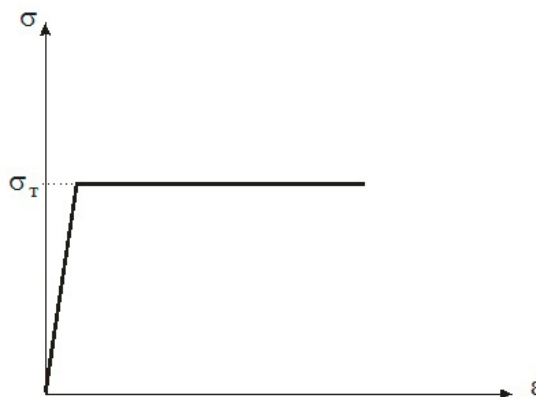
#### Тест 1.2.1

Диаграмма Прандтля, широко используемая при расчёте конструкций, *не имеет ...*

- 1) площадки текучести;
- 2) зоны упрочнения;
- 3) зоны нелинейного поведения материала;
- 4) нисходящей ветви;
- 5) участка упругого деформирования.

*Комментарий:*

Диаграмма Прандтля позволяет схематизировать диаграмму в виде двух прямых (см. рис.): участка упругого деформирования и площадки текучести. Нелинейные участки отсутствуют. Полагается, что все три напряжения ( $\sigma_{пл}$ ,  $\sigma_{уп}$  и  $\sigma_T$ ) соответствуют одной точке. Диаграмма отражает одну из характерных особенностей поведения упруго-пластических материалов — способность к большим пластическим деформациям. Такая простота графика исключает большие математические трудности при использовании реальных диаграмм.



*Правильные ответы:* 2), 3), 4).

#### Тест 1.2.2

Испытание на разрыв образца из малоуглеродистой стали происходит ...

- 1) в зоне упруго-пластических деформаций;
- 2) только в зоне упругих деформаций;
- 3) при ударном действии нагрузки;
- 4) в диапазоне  $\sigma_{уп} < \sigma < \sigma_T$ ;
- 5) при статическом действии нагрузки.

*Комментарий:*

Лабораторные испытания на разрыв образцов из малоуглеродистой стали происходят на специальных испытательных машинах. Эти испытания проводятся для определения числовых характеристик, позволяющих оценить прочность и пластичность материала. Поэтому образец проходит через все стадии нагружения: зону чисто упругих деформаций, зону упруго-пластических деформаций вплоть до разрушения. Нагрузка прикладывается постепенно, статически.

*Правильные ответы:* 1), 5).

#### Тест 1.2.3

Испытания на растяжение образцов из хрупких материалов показывают, что их разрушение происходит ...

- 1) при малых относительных остаточных удлинениях образца;
- 2) при малом относительном остаточном сужении в шейке;
- 3) при значительных остаточных деформациях;
- 4) при напряжениях, равных пределу текучести;
- 5) в зоне упругих деформаций.

*Комментарий:*

Диаграмма растяжения для хрупких материалов с самого начала имеет нелинейный характер, хотя и слабо выраженный. Площадка текучести отсутствует. Поэтому ответы 4), 5) исключаются. При растяжении образца из хрупкого материала (например, чугуна) до самого разрыва наблюдаются лишь незначительные деформации, поэтому ответ 3) — неверный. Разрушение происходит внезапно. Относительное удлинение и относительное сужение после разрыва оказываются очень малыми.

*Правильные ответы:* 1), 2).

### Тест 1.2.4

**Характеристики пластичности стали марки ВСт3 имеют следующие значения ...**

- 1) предел текучести  $\sigma_T = 225$  МПа;
- 2) относительное сужение  $\psi$  в шейке образца после разрыва составляет от 60 до 70 %;
- 3) относительное сужение  $\psi$  в шейке образца после разрыва составляет от 10 до 20 %;
- 4) относительное остаточное удлинение  $\delta$  образца после разрыва составляет от 20 до 23 %;
- 5) относительное остаточное удлинение  $\delta$  образца после разрыва составляет от 80 до 90 %.

*Комментарий:*

Предел текучести является характеристикой прочности, а не пластичности стали, поэтому ответ 1) — неверный. Испытания на растяжение образцов из малоуглеродистой стали марки ВСт3 показали, что величины  $\delta$  и  $\psi$ , характеризующие пластические свойства стали, составляют:  $\delta = 20-23$  % и  $\psi = 60-70$  %. Следовательно, ответы 3), 5) неверны.

*Правильные ответы:* 2), 4).

### Тест 1.2.5

**Понятие «наклёп» связано со следующими изменениями свойств стали ...**

- 1) понижение предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$ ;
- 2) площадка текучести удлиняется;
- 3) исчезает площадка текучести;
- 4) материал становится более хрупким;
- 5) материал становится более пластичным.

*Комментарий:*

Если точка нагружения лежит выше  $\sigma_T$ , то при разгрузке и повторном нагружении стального образца возникают изменения свойств стали: повышается  $\sigma_{пц}$ , пропадает площадка текучести. Материал становится более хрупким. Это связано с изменением микроструктуры в кристаллической решётке стали. Такое явление называют наклёпом.

*Правильные ответы:* 3), 4).

### Тест 1.2.6

**Петля гистерезиса ...**

- 1) образуется вследствие необратимых потерь энергии деформации;
- 2) описывает упругие свойства материала;
- 3) возникает на диаграмме растяжения стали при разгрузке от напряжений, больших предела текучести, и повторном нагружении;
- 4) характеризует свойство ползучести материала;
- 5) характеризует твёрдость материала.

*Комментарий:*

Если нагрузить стальной образец выше предела текучести, затем снять нагрузку, а потом опять нагрузить материал, то диаграмма пойдёт по линии, образуя небольшую петлю. Эта петля получается вследствие необратимых потерь энергии деформации. Она носит название — *петля гистерезиса*.

*Правильные ответы:* 1), 3).

### Тест 1.2.7

**Пластические свойства стали марки ВСт3 характеризуются величинами ...**

- 1)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{E}$ ;
- 2)  $R = \frac{R_H}{\gamma_m}$ ;
- 3)  $\delta = \frac{l}{l_0} (l_p - l_0) \cdot 100\%$ ;

$$\square 4) \nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|;$$

$$\square 5) \psi = \frac{1}{A_0} (A_0 - A_m) \cdot 100\%.$$

*Комментарий:*

По результатам испытаний образца после разрыва определяется относительное остаточное удлинение  $\delta = \frac{l}{l_0} (l_p - l_0) \cdot 100\%$  и относительное остаточное сужение в шейке  $\psi = \frac{1}{A_0} (A_0 - A_m) \cdot 100\%$ . Здесь  $l_p$  и  $A_{ш}$  — соответственно длина образца и площадь поперечного сечения шейки после разрыва. Величины  $\delta$  и  $\psi$  характеризуют пластические свойства стали.

*Правильные ответы: 3), 5).*

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)