Оглавление

Введение

Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста любого профиля. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры будущего специалиста.

Изучение математики на базовом уровне среднего (полного) общего образования направлено на достижение следующих целей:

• формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

• развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, а также последующего обучения в высшей школе;

• овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

• воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен уметь:

• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

• применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

• решать дифференциальные уравнения.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен знать:

• основы математического анализа;

• основы линейной алгебры и аналитической геометрии;

• основы дифференциального и интегрального исчисления.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование общих компетенций (ОК), включающих в себя способность:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникативные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

В ходе изучения дисциплины ставиться задача формирования профессиональных компетенций (ПК), соответствующих виду деятельности:

ПК 1.1. Выполнять проектирование кабельной структуры компьютерной сети.

ПК 1.2. Осуществлять выбор технологии, инструментальных средств и средств вычислительной техники при организации процесса разработки и исследования объектов профессиональной деятельности.

ПК 1.4. Принимать участие в приемо-сдаточных испытаниях компьютерных сетей и сетевого оборудования различного уровня и в оценке качества и экономической эффективности сетевой топологии.

ПК 2.3. Обеспечить сбор данных для анализа использования и функционирования программно-технических средств компьютерных сетей.

ПК 3.5. Организовывать инвентаризацию технических средств сетевой инфраструктуры. Осуществлять контроль оборудования после его ремонта.

Раздел 1. Линейная и векторная алгебра

1.1. Матрицы и определители

Понятие матрицы. Действия над ними

Термин «матрица» ввел английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр.

Прямоугольной матрицей размера m×n называется совокупность m×n чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно в виде A = (a_{ij}) $\qquad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$

$$\textit{Пример: } A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} m = 2 \\ n = 3 \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} m = 3 \\ n = 3 \end{matrix}$$

Числа a_{ij}, составляющие данную матрицу, называются ее элементами; первый индекс указывает на номер строки, второй — на номер столбца.

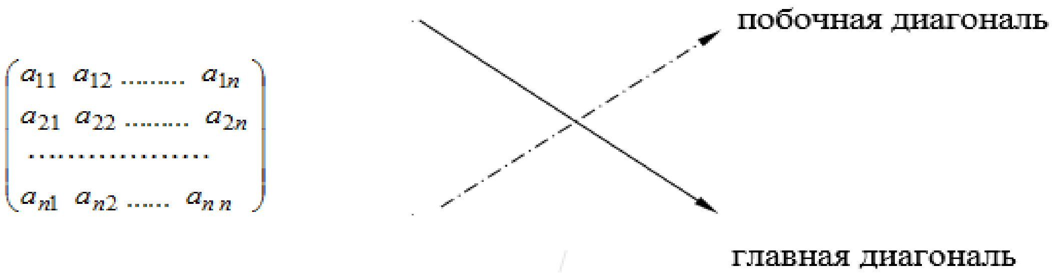
Две матрицы A = (a_{ij}) и B = (b_{ij}) одинакового размера называются ***равными***, если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть A = B, если $a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно ***вектор-строкой*** или ***вектор-столбцом***.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Матрица размера mxn, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой матрицей*** и обозначается через 0.

Элементы матрицы с одинаковыми индексами называют ***элементами главной диагонали***.



Диагональ, идущая от правого верхнего элемента к левому нижнему, называется *побочной диагональю матрицы*

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то есть m = n, то матрицу называют ***квадратной*** порядка n.

Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются ***диагональными матрицами*** и записываются так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots 0 \\ 0 & a_{22} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все элементы a_{ii} диагональной матрицы равны 1, то матрица называется ***единичной*** и обозначается буквой Е:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

верхняя треугольная матрица — нижняя треугольная матрица

Транспонированием называется такое преобразование матрицы, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров. Обозначается транспонирование значком Т наверху.

Если в матрице переставить строки со столбцами. Получим матрицу:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая будет ***транспонированно***й по отношению к матрице А.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

В частности, при транспонировании вектора-столбца получается вектор-строка и наоборот.

Если $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ то матрица $\boldsymbol{A}$ называется **симметрической.** *Пример*:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = C.$$

Кососимметрическая матрица, если $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$. *Пример*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы А на число k называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы А умножением на число k:

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij}).$$

Пример:

$$-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -6 & -9\\ 9 & 0 & -21\end{pmatrix}.$$

Суммой двух матриц А = (a_{ij}) и В = (b_{ij}) одного размера называется матрица С = (c_{ij}) того же размера, элементы которой определяются по формуле c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.

Пример:

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}}+\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}}=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}-1 & 5 & 1\\ 3 & 5 & 5\end{pmatrix}}.$$

Пример: $A+B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4 & 3-5\\ -1+2 & 0+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & 8\end{pmatrix}.$

Свойства сложения матриц и умножения на число:

1. Переместительное свойство: $A + B = B + A$.

2. Сочетательное свойство: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. Распределительное свойство: $k\ (A + B) = k\,A + k\,B$, где k — число.

Произведением двух матриц А = (a_{ij}) и В = (b_{jk}), где i = $\overline{1,n}$, j= $\overline{1,m}$, k= $\overline{1,p}$, заданных в определенном порядке АВ, называется матрица С = (c_{ik}), элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{i\,k} = a_{i\,1}\cdot b_{1\,k} + a_{i\,2}\cdot b_{2\,k} + \ldots + a_{i\,m}\cdot{}_{m\,k} = \sum_{c=1}^{m} a_{i\,s}\cdot b_{s\,k}$$

Иначе говоря, элементы матрицы-произведения определяются следующим образом: элемент *i*-й строки и *k*-го столбца матрицы С равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы А на соответствующие элементы *k*-го столбца матрицы В.

Умножение строки на столбец: $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}.$

Решение: $A\cdot B = 3\cdot 1 - 1\cdot 0 + 4\cdot 3 = 15.$

Умножение матрицы на столбец: каждая строка матрицы скалярно умножается на столбец

Пример:

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\\ -5 & 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 7\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 8+ & (-1)\cdot 7+ & 2\cdot 2\\ 4\cdot 8+ & 2\cdot 7+ & 0\cdot 2\\ -5\cdot 8+ & 6\cdot 7+ & 1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ 46\\ 4\end{pmatrix}.$$

Произведение А·В матрицы А на матрицу В определяется в предположении, что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Если $\underset{2\times 2}{A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}$; $\underset{2\times 3}{B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}}.$

то $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$.

Замечание 1. Если $A \times B$ имеет смысл, то $B \times A$ может не иметь смысла.

Замечание 2. Если имеет смысл $A \times B$ и $B \times A$, то, вообще говоря $A \times B \neq B \times A$, т. е. умножение матриц не обладает переместительным законом.

Замечание 3. Если A — квадратная матрица и E — единичная матрица того же порядка, то $A \times E = E \times A = A$.

Отсюда следует, что единичная матрица при умножении играет роль единицы.

Пример. Найти, если можно, $A \times B$ и $B \times A$.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: Квадратные матрицы одного и того же второго порядка согласованы в томи другом порядке, поэтому $A \times B$ и $B \times A$ существуют.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Решение: Матрицы A и B согласованы

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Матрицы B и A не согласованы, поэтому $B \times A$ не имеет смысла.

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Имеем: матрица А размера 2×3, матрица В размера 3×3, тогда произведение А·В = С существует и элементы матрицы С равны:

$c_{11} = 1\times1 + 2\times2 + 1\times3 = 8$,

$c_{21} = 3\times1 + 1\times2 + 0\times3 = 5$,

$c_{12} = 1\times2 + 2\times0 + 1\times5 = 7$,

$c_{22} = 3\times2 + 1\times0 + 0\times5 = 6$,

$c_{13} = 1\times3 + 2\times1 + 1\times4 = 9$,
$c_{23} = 3\times3 + 1\times1 + 0\times4 = 10$.
$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$, а произведение B·A не существует.

Свойства умножения матриц:
1. $A \cdot O = O$;
2. $A \cdot E = A$;
3. $A \cdot B \neq B \cdot A$;
4. $\alpha (AB) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$;
5. $ABC = (AB) \cdot C = A \cdot (BC)$;
6. $A (B + C) = AB + AC$;
7. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Отметим следующий любопытный факт. Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь места, т. е. произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным *нуль-матрице*.

Действие «деление» для матриц не вводится. Для квадратных невырожденных матриц вводится обратная матрица.

Определители, свойства и вычисления

Понятие «определитель» принадлежит Г. Лейбницу (1678).

Определитель матрицы или **детерминант матрицы** — это одна из основных численных характеристик квадратной матрицы, применяемая при решении многих задач.

Обозначение. Определитель матрицы A обычно обозначается det(A), |A|, или $\Delta(A)$.

***Свойства определителей*:**

1. Определитель единичной матрицы равен единице: $\det(E) = 1$
2. Определитель матрицы с двумя равными строками (столбцами) равен нулю.
3. Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.
4. Определитель матрицы, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.
5. Определитель матрицы равен нулю если две (или несколько) строк (столбцов) матрицы линейно зависимы.
6. При транспонировании значение определителя матрицы не меняется:

   $\det(A) = \det(A^T)$
7. Определитель обратной матрицы: $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
8. Определитель матрицы не изменится, если к какой-то его строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на некоторое число.
9. Определитель матрицы не изменится, если к какой-то его строке (столбцу) прибавить линейную комбинации других строк (столбцов).

10. Если поменять местами две строки (столбца) матрицы, то определитель матрицы поменяет знак.

11. Общий множитель в строке (столбце) можно выносить за знак определителя:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2}\dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

12. Если квадратная матрица n-ого порядка умножается на некоторое ненулевое число, то определитель полученной матрицы равен произведению определителя исходной матрицы на это число в n-той степени:

$B = k\cdot A \;\Rightarrow\; \det(B) = k^n\cdot\det(A)$ где A матрица n×n, k — число.

13. Если каждый элемент в какой-то строке определителя равен сумме двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме двух определителей, в которых вместо этой строки стоят первые и вторые слагаемые соответственно, а остальные строки совпадают с исходным определителем:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+a_{i1} & b_{i2}+a_{i2}\dots & b_{in}+a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2}\dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

14. Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

15. Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц: $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

Методы вычисления определителя матрицы

Вычисление определителя матрицы 1×1

Правило: Для матрицы первого порядка значение определителя равно значению элемента этой матрицы:

$\Delta = |a_{11}| = a_{11}$

Вычисление определителя матрицы 2×2

Правило: Для матрицы 2×2 значение определителя равно разности произведений элементов главной и побочной диагоналей:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$

Например: Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ = 3·6 -(-2)·4 = 18 + 8 = 26.

Числа, составляющие определитель называются его ***элементами***. Определитель второго порядка имеет две строки и два столбца.

Вычисление определителя матрицы 3×3

Правило: Для матрицы 3×3 значение определителя равно сумме произведений элементов главной диагонали и произведений элементов, лежащих на треугольниках с гранью параллельной главной диагонали, от которой вычитается произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - (a_{13}a_{22}a_{31}+a_{32}a_{23}\,a_{11}+a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot3+3\cdot1\cdot1+4\cdot2\cdot5 - (1\cdot(-2)\cdot4 + 2\cdot1\cdot2 + 3\cdot3\cdot5) = -12+3+40 - (-8+4+45) = 31-41= - 10$$

Правило Саррюса для вычисления определителя матрицы 3-его порядка

Правило: Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком «плюс»; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком «минус»:

$$\Delta=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Пример: $$\Delta=\left|\begin{matrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{matrix} = 5\cdot1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot6 + 1\cdot3\cdot0 - 1\cdot1\cdot6 - 5\cdot(-4)\cdot0 - (-2)\cdot3\cdot(-3) = 9.$$

Вычисление определителя матрицы произвольного размера

Разложение определителя по строке или столбцу

Правило: Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки определителя на их алгебраические дополнения:

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ — разложение по i-той строке

Правило: Определитель матрицы равен сумме произведений элементов столбца определителя на их алгебраические дополнения:

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ — разложение по j-тому столбцу.

При разложение определителя матрицы обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом максимальное количество нулевых элементов.

Алгебраическое дополнение A_{ij} есть минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i строки j столбца, т. е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Минор M_{ij} есть определитель порядка на единицу ниже исходного.

Например, в определителе, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ Минором к элементу 4 является

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10+2=12.$$

Например: Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Разложим определитель по элементам второго столбца. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$

$= -3 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} = -3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}$
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \cdot (-3+16) + 5 \cdot (-6-4) - (-8 - 1) = 3 \cdot 13 + 5 \cdot (-10) + 9 = 48 - 50 = -2.$

Приведение определителя к треугольному виду

Правило: Используя свойства определителя для элементарных преобразований над строками и столбцами 8–11, определитель приводится к треугольному виду, и тогда его значение будет равно произведению элементов стоящих на главной диагонали.

Например: Найти определитель матрицы А приведением его к треугольному виду

$$A=\begin{pmatrix}2&4&1&1\\0&2&1&0\\2&1&1&3\\4&0&2&3\end{pmatrix}$$

Решение:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&1&1\\0&2&1&0\\2&1&1&3\\4&0&2&3\end{vmatrix}$$

Сначала получим нули в первом столбце под главной диагональю. Для этого отнимем от 3-ей строки 1-ю строку, а от 4-той строки 1-ю строку, помноженную на 2:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&1&1\\0&2&1&0\\2-2&1-4&1-1&3-1\\4-2\cdot2&0-2\cdot4&2-2\cdot1&3-2\cdot1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&1&1\\0&2&1&0\\0&-3&0&2\\0&-8&0&1\end{vmatrix}$$

Получим нули во втором столбце под главной диагональю. Для этого поменяем местами 2-й и 3-й столбцы:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}2&1&4&1\\0&1&2&0\\0&0&-3&2\\0&0&-8&1\end{vmatrix}$$

Получим нули в третьем столбце под главной диагональю. Для этого к 3-ему столбцу добавим 4-й столбец, умноженный на 8:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}2&1&4&1\\0&1&2&0\\0&0&-3&2\\0&0&-8&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1&4+8\cdot1&1\\0&1&2+8\cdot0&0\\0&0&-3+8\cdot2&2\\0&0&-8+8\cdot1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1&12&1\\0&1&2&0\\0&0&13&2\\0&0&0&1\end{vmatrix}=$$
$$-2\cdot1\cdot13\cdot1=-26$$

Теорема Лапласа

Пусть Δ — определитель n-ого порядка. Выберем в нем произвольные k строк (столбцов), причем $k < n$. Тогда сумма произведений всех миноров k-ого порядка, которые содержатся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю.

Пример: разложить по первому столбцу, применив теорему Лапласа.

$$\begin{vmatrix}2&-1&1\\2&4&-3\\11&17&-12\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}4&-3\\17&-12\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\17&-12\end{vmatrix}+11\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\4&-3\end{vmatrix}$$
$$=2(-48+51)-2(12-17)+11(3-4)=6+10-11=5$$

Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим D =det A.

Квадратная матрица А называется ***невырожденной,*** или ***неособенной*,** если ее определитель отличен от нуля, и ***вырожденной,*** или ***особенной***, если D = 0.

Квадратная матрица В называется ***обратной*** для квадратной матрицы А того же порядка, если их произведение АВ = ВА = Е, где Е — единичная матрица того же порядка, что и матрицы А и В.

Теорема. Для того, чтобы матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице А, обозначается через A^{-1}, так что $B = A^{-1}$. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Вычисление обратной матрицы по формуле для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратную матрицу с помощью метода элементарных преобразований (ЭП). Любую неособенную матрицу А путем ЭП только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице Е.

Если совершенные над матрицей А ЭП в том же порядке применить к единичной матрице Е, то в результате получится обратная матрица.

Удобно совершать ЭП над матрицами А и Е одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту. Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов.

Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную.

Решение: Находим сначала определитель матрицы А

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

значит, обратная матрица существует и мы ее можем найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $A_{i\,j}$ (i,j=1,2,3) — алгебраические дополнения элементов $a_{i\,j}$ исходной матрицы.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2+4=6$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4+2)=-6$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(-4-2)=6$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4+2)=-6$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(-4-2)=6$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2+4=6$$

Откуда $A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}6 & 6 & 3\\ -6 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 6\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$

Ранг, линейная зависимость/независимость строк и столбцов

Рангом системы строк (столбцов) называется максимальное количество линейно независимых строк (столбцов) этой системы.

Рангом матрицы A называется ранг её системы строк или столбцов.

Обычно ранг матрицы A обозначается rank(A) или rang(A).

Ранг матрицы не изменится, если к ее строкам (столбцам) применить элементарные преобразования.

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований

Используя свойства матрицы связанные с ее рангом, получен метод расчета ранга наиболее часто использующийся на практике.

Метод 1.

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы.

Метод окаймления миноров

Теорема. **Ранг матрицы** равен наибольшему порядку не равного нулю минора.

Метод 2.

Если в матрице A найден ненулевой минор k-го порядка M. Рассмотрим все миноры (k + 1)-го порядка, включающие в себя (окаймляющие) минор M;

если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если среди окаймляющих миноров найдется ненулевой, то вся процедура повторяется.

Пример: Вычислить ранг матрицы A, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение:

От 1-й строки отнимем 2-ю умноженную на 2, от 4-й отнимем 2-ю умноженную на 2

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Поменяем местами строки

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

полученная матрица есть является ступенчатой, значит rank(A) = 3.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти матрицу 2A + 3B, если

A $=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Найти сумму матриц: A $= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Найти произведение матриц.

3.1. A $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ B $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3.2. A $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Найти произведение матриц AB и BA:

4.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2 $A=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\2&3&4&5\\1&3&2&5\\3&2&4&-3\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-5&2&-1\\-1&7&3\\-2&4&-3\\1&3&2\end{pmatrix}$.

5. Выполнить действия

5.1 $\begin{pmatrix}3&0&2\\0&1&3\\2&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\-2&-1&1&2\\2&1&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-4&6&1\\2&2&-5&-2\\2&-2&6&4\\1&3&0&1\end{pmatrix}$

5.2 $\begin{pmatrix}3&0&2&0\\0&1&2&1\\2&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&1\\-1&1&-2\\2&2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&-3\\0&6&-3\\5&-2&8\end{pmatrix}$.

6. Найдите матрицу C = A^2 – BA, если

6.1 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&4&-1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&3&3\\2&1&2\end{pmatrix}$

6.2 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&2\\1&1&4\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$

6.3 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&3&4\\2&1&0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&2\\3&2&2\end{pmatrix}$

6.4 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&-2&4\\-5&6&-7\\0&3&-1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-4&2&0\\3&-1&2\\5&3&-1\end{pmatrix}$

6.5 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&4&0\\4&2&2\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&2&1\\1&-3&1\end{pmatrix}$

6.6 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&3&4\\2&1&0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&2\\3&2&2\end{pmatrix}$

6.7 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&2\\4&1&0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&3\\3&1&-2\end{pmatrix}$.

7. Вычислить определители:

7.1 $\begin{vmatrix}3&-2\\4&6\end{vmatrix}$ $\qquad$ 7.2 $\begin{vmatrix}2&3\\7&10\end{vmatrix}$ $\qquad$ 7.3 $\begin{vmatrix}3&-2\\-4&6\end{vmatrix}$.

8. Вычислить определители, разложив их по элементам первой строки:

8.1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 8.2. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$

9. Упростить и вычислить определители:

9.1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & 15 \end{vmatrix}$ 9.2 $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

10. Вычислить определитель:

10.1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

10.1 если дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу для следующих матриц:

11. 1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

11.2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11.3. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

11.4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11.5. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

11.6. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. Найти ранг матрицы:

12.1. $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

12.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей?
2. Что называется размерностью матрицы?
3. Какая матрица называется нулевой?
4. Какая матрица называется квадратной?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Что называется побочной диагональю матрицы?
7. Какая матрица называется симметрической?
8. Какая матрица называется диагональной?
9. Какая матрица называется единичной?
10. Какие матрицы называются равными?
11. Что представляет собой сумма матриц?
12. Что представляет собой умножение матрицы на число?
13. Что представляет собой разность матриц?
14. Перечислите свойства линейных операций над матрицами.
15. Что представляет собой транспонирование матриц?
16. Перечислите свойства транспонирования матриц.
17. Что представляет собой произведение матриц? В чем состоит необходимое условие умножения матриц?
18. Перечислите свойства произведения матриц.
19. Что представляет собой определитель первого порядка?
20. Что представляет собой определитель второго порядка?
21. Что представляет собой определитель третьего порядка?
22. Что называется минором матрицы?
23. В чем заключается правило треугольников?
24. В чем заключается правило Саррюса?
25. Перечислите свойства определителя.
26. Какая матрица называется невырожденной?
27. Перечислить способы нахождения ранга матрицы
28. Что такое ранг матрицы?