ВВЕДЕНИЕ

В начертательной геометрии под геометрическим телом понимают предмет, лишенный всех свойств, кроме пространственных. Поэтому точка рассматривается как тело, лишенное размеров, линия — тело, лишенное толщины и ширины, а поверхность — часть тела, мысленно отделенная от него и лишенная толщины. След, оставляемый при движении точки в пространстве, образует линию, а линия при ее движении порождает поверхность, которая порождает тело.

В природе нет геометрических точек, линий и поверхностей, но все их геометрические свойства находят применение при изучении и проектировании тех или иных объектов. Изучение геометрических свойств в чистом виде является основной задачей дисциплины «Начертательная геометрия», рассматривающей геометрические модели, в отличие от математических, которые отображаются в виде формул, описывающих основные свойства объекта и физических моделей.

Начертательная геометрия — область науки и техники, занимающаяся разработкой научных основ построения и исследования геометрических моделей проектируемых инженерных объектов и процессов и их графического отображения. Задачи этой науки — создание оптимальных геометрических форм объектов машиностроения, архитектуры и строительства, разработка геометрических основ их воспроизведения в процессе производства, оптимизация технологических процессов на основе их геометрических моделей, разработка теории графического отображения объектов и процессов при их проектировании в промышленности и строительстве.

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором *пространственные формы* (совокупности точек, линий, поверхностей) с геометрическими закономерностями изучаются в виде их изображений на плоскости.

С изучением начертательной геометрии приходит умение изображать всевозможные сочетания геометрических форм на плоскости, решать позиционные и метрические задачи, производить исследования геометрических образов по их изображениям.

Начертательную геометрию называют «грамматикой языка техники». Кроме того, она по своему содержанию и методам занимает особое положение среди других наук. Наглядность и простота решения многих задач не только обогащают точные науки, но и помогают работникам изобразительного искусства (художникам, архитекторам, скульпторам) в создании их произведений. Художнику и архитектору знания по начертательной геометрии нужны для построения перспективы предметов, т. е. для изображения предметов такими, какими они представляются в действительности нашему глазу. Скульптору они нужны для определения очертания ваяния, которое создается из куска камня, дерева, глины и т. п.

В инженерной практике мы часто встречаемся с геометрическими моделями в виде чертежей, которые являются средством общения людей в их производственной деятельности.

Словесное описание не может заменить чертежа, построенного по определенным геометрическим правилам. Начертательная геометрия — наилучшее средство развития у человека пространственного воображения, без которого немыслимо никакое техническое творчество. Без живой силы воображения и наглядности мышления нельзя прийти и к абстрактной, математической формулировке проблемы, невозможно вывести понятия, а тем более осуществить практически экспериментальные исследования.

При использовании систем автоматизированного проектирования основной проблемой является математическое описание геометрических форм рассматриваемых объектов. На качестве проектируемых технических объектов в значительной степени будут сказываться знания и умение использовать геометрические закономерности.

В математических науках вопросы теории геометрических форм и их сочетаний сопровождаются реальным и конкретным их представлением. Решая математические задачи в их графическом значении, начертательная геометрия находит применение в физике, астрономии, химии, механике, кристаллографии и многих других науках. Методы начертательной геометрии являются связующим звеном между прикладной математической наукой и профессиональными техническими дисциплинами.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ

В начертательной геометрии, как и в любой другой области математики, для упрощения записи условий и решения задач принята система условных обозначений элементов и действий. Ниже приведены используемые в процессе изучения дисциплины символы и условные обозначения.

1.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

При изучении дисциплины используются специальные символы и знаки, обозначающие те или иные геометрические элементы или понятия. Это позволяет кратко записывать геометрические положения, алгоритмы решения задач и доказательства теорем.

Условные обозначения объектов и действий, которые будут использоваться в данном курсе при изучении теоретического материала и записи алгоритмов решения задач, следующие.

1. Геометрическая фигура — Ф.

2. Точки — прописные буквы латинского алфавита или арабские цифры — A, B, C, D, ... или 1, 2, 3, 4, ...

3. Линии, произвольно расположенные в пространстве по отношению к плоскостям проекций: a, b, c, d, ...

Линии уровня: h — горизонталь; f — фронталь; p — профильная прямая линия уровня.

Кроме того, прямые линии обозначаются так:

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B;

$[AB)$ — луч с началом в точке A;

$[AB]$ — отрезок прямой, ограниченный точками A и B;

$|AB|$ — расстояние от точки A до точки B (длина отрезка AB);

$|Aa|$ — расстояние от точки A до прямой линии a;

$|A\Phi|$ — расстояние от точки A до плоскости Ф;

$|\Sigma\Omega|$ — расстояние между плоскостями Σ и Ω.

4. Углы обозначаются как α, β, γ, … , $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$, а также $\angle ABC$ — угол с вершиной в точке B.

5. Поверхности обозначаются строчными буквами греческого алфавита: α, β, γ, δ, … .

Для обозначения способа задания поверхности указывают геометрические элементы, которыми она определяется, например:

$\alpha\,(a \| b)$ — плоскость α задана двумя параллельными прямыми a и b;

$\Phi\,(g, i)$ — поверхность определяется образующей g и осью вращения i.

6. Центр и направление проецирования обозначаются S и $\vec{S}$ соответственно.

Плоскости проекций обозначаются греческой буквой Π (π), причем:

Π_1, π_1 — горизонтальная плоскость проекций $x0y$;

Π_2, π_2 — фронтальная плоскость проекций $x0z$;

Π_3, π_3 — профильная плоскость проекций $y0z$.

При замене плоскостей проекций или введении новых плоскостей их обозначают как π_4, π_5 и т. д.

Оси проекций:

x — ось абсцисс;

y — ось ординат;

z — ось аппликат.

7. Координаты точек A, B, … обозначаются как x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, … .

8. Проекции точек, линий, поверхностей, любой геометрической фигуры обозначают теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением нижнего индекса, соответствующего плоскости проекции, на которой они получены:

A_1, B_1, C_1 , … — горизонтальные проекции точек;

A_2, B_2, C_2, … — фронтальные проекции точек;

A_n, B_n, C_n, … — проекции точек на дополнительную (n-ю) плоскость проекций;

a_1, b_1, c_1, … — горизонтальные проекции линий;

a_2, b_2, c_2, … — фронтальные проекции линий;

a_n, b_n, c_n, … — проекции линий на дополнительную (n-ю) плоскость проекций.

Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами, следующие:

$=$ — результат действия, знак равенства, например: $|AB|=|CD|$ — длины отрезков AB и CD равны;

$\equiv$ — совпадение, тождество, например: $A_1 \equiv B_1$ — горизонтальные проекции точек A и B совпадают;

$\cong$ — конгруэнтность (отношение эквивалентности на множестве геометрических фигур);

$\perp$ — перпендикулярность;

$//$ — параллельность;

$\underline{\bigcirc}$ — скрещивание;

$\times$ или $\bigcap$ — пересечение;

$\Rightarrow$ — импликация (логическое следствие). Например, $a \Rightarrow b$ означает, что «если есть a, то есть и b, или из a следует b»;

$\in$, $\ni$ — принадлежность, например: $A \in a$ — точка A принадлежит прямой a; $A \ni a$ — прямая a проходит через точку A;

$\sim$ — подобие;

$\supset$, $\subset$ — включение (содержит в себе), например: $\Omega \supset a$ — плоскость Ω проходит через прямую a; $a \subset \Omega$ — прямая принадлежит плоскости Ω;

$\cup$ — объединение множеств. Так, $ABCD=[AB] \cup [BC] \cup [CD]$ — ломаная $ABCD$ состоит из отрезков AB, BC, CD;

$\not\subset$, $\notin$, $\neq$ — отрицание, например: $A \notin a$ — точка A не принадлежит прямой a, или прямая a не проходит через точку A;

$\wedge$ — конъюнкция предложений, соответствует союзу «*и*»;

$\vee$ — дизъюнкция предложений, соответствует союзу «*или*»;

$\forall$ — квантор общности, читается так: «для всех, для любого». Выражение $\forall(x)P(x)$ означает «для всякого x имеет место свойство $P(x)$»;

$\exists$ — квантор существования, читается так: «существует». Выражение $\exists(x)P(x)$ означает «существует x, обладающее свойством $P(x)$»;

$\exists^1$ — квантор единственности существования, читается так: «существует единственное (-я, -й) ... ». Выражение $(\exists^1 x)(Px)$ означает: существует единственное (только одно) x, обладающее свойством Px;

$(\overline{Px})$ — отрицание высказывания (Px). Например, a $\bigcirc$ b $\Rightarrow (\overline{\exists\alpha})(\alpha \supset a, b)$. Если прямые a и b скрещиваются, то не существует плоскости α, которая содержит их;

$\setminus$ — отрицание знака.

1.2. СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА И ЕГО РЕКОНСТРУКЦИЯ

Изображение предмета на какой-либо поверхности можно получить путем проецирования его на данную поверхность. При этом предполагается, что основные свойства трехмерного пространства могут быть выражены следующими положениями.

1. Если точка A принадлежит прямой a, которая принадлежит плоскости α, то точка A принадлежит плоскости α (рис. 1.1):

$$A \in a \in \alpha \Rightarrow A \in \alpha.$$

2. Две различные точки A и B всегда принадлежат одной и той же и только одной прямой a (или каждой прямой a принадлежат по крайней мере две точки A и B) (рис. 1.2):

$$(\forall A, B)\ (A \neq B) \Rightarrow (\exists^1 a)\ (a \in A, B).$$

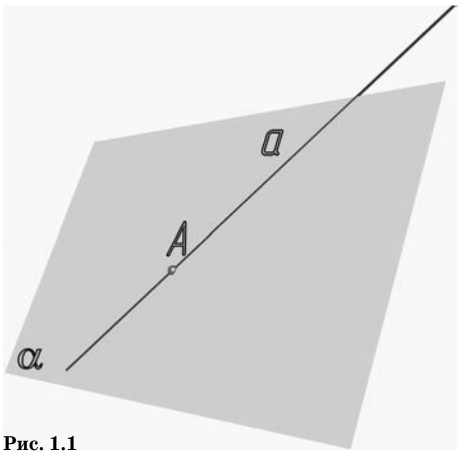

Рис. 1.1

3. Три различные точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной и той же и только одной плоскости (рис. 1.3):

$$(\forall A, B, C)\ (A \neq B \neq C) \wedge (A, B, C \notin a) \Rightarrow (\exists^1 \alpha)\ (\alpha \in (A, B, C)).$$

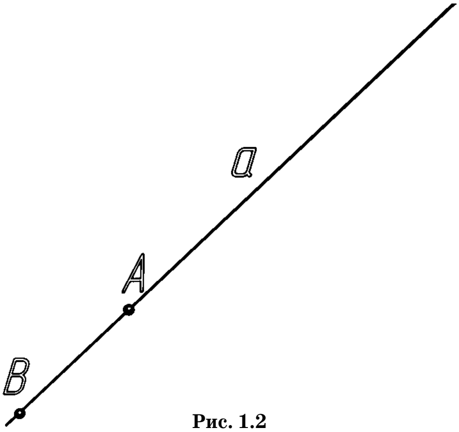

Рис. 1.2

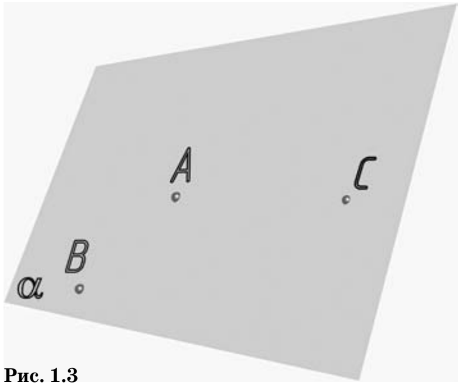

Рис. 1.3

4. Если две точки A и B, принадлежащие прямой a, принадлежат плоскости α, то прямая a принадлежит плоскости α (рис. 1.4):

$$(\forall A, B)\ (A \neq B)\ (A, B \in a) \wedge (A, B \in \alpha) \Rightarrow (a \in \alpha).$$

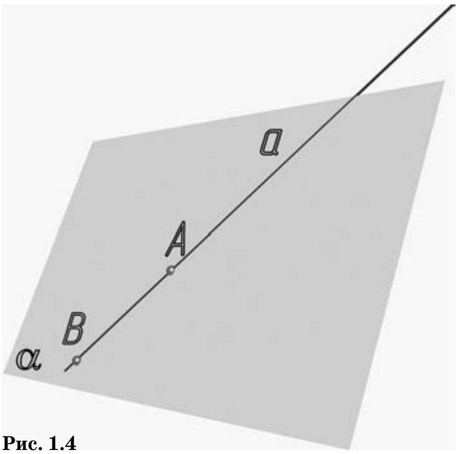

Рис. 1.4

Помимо указанных свойств, можно добавить следующие три положения, касающиеся аксиомы параллельности.

5. Две прямые, принадлежащие одной плоскости, могут принадлежать (рис. 1.5*а*) или не принадлежать (рис. 1.5*б*) одной точке, т. е. две прямые либо пересекаются, либо параллельны:

$$(\forall a, b)\ (a \neq b)\ (a, b \in \alpha) \Rightarrow (a \cap b) \vee (a \parallel b).$$

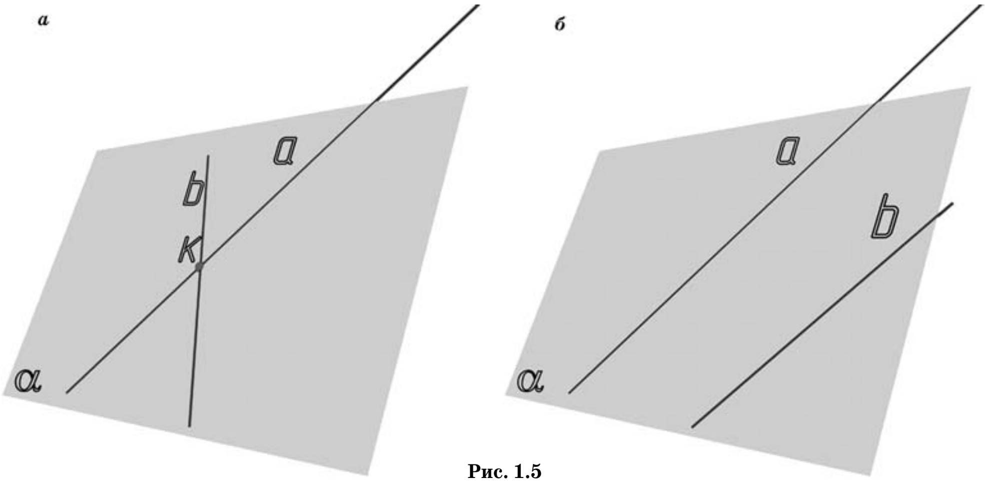

Рис. 1.5

6. Две плоскости могут принадлежать (рис. 1.6*а*) или не принадлежать (рис. 1.6*б*) одной и той же прямой, т. е. две плоскости либо пересекаются, либо параллельны:

$$(\forall\alpha, \beta)\ (\alpha\neq\beta)\Rightarrow(\alpha\cap\beta)\vee(\alpha\parallel\beta).$$

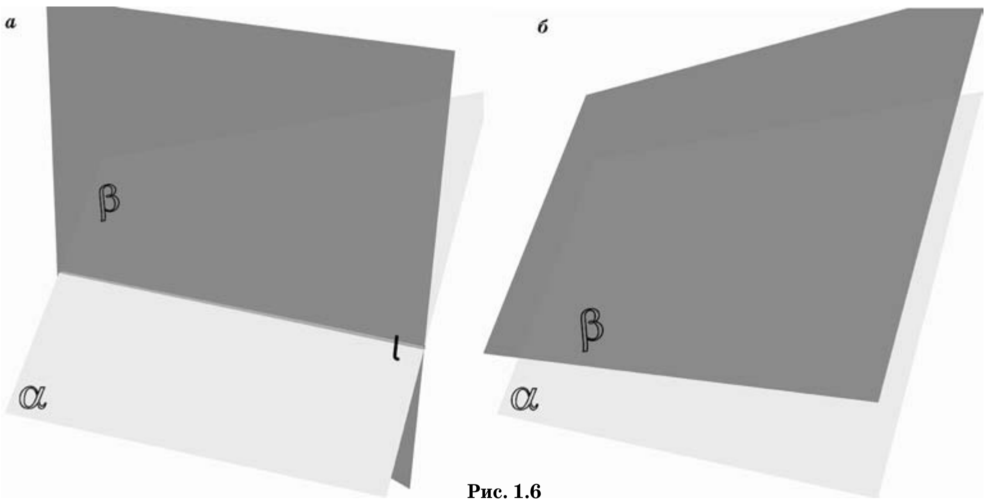

Рис. 1.6

7. Плоскость и не принадлежащая ей прямая могут принадлежать (рис. 1.7*а*) или не принадлежать (рис. 1.7*б*) одной точке, т. е. не принадлежащая плоскости прямая может ее либо пересекать, либо быть ей параллельной:

$$(\forall a, \alpha)\ (a\in\alpha)\Rightarrow(a\cap\alpha)\vee(a\parallel\alpha).$$

Три последних положения о параллельности при последующем изучении начертательной геометрии приводят к некоторым трудностям, так как при проецировании на плоскость геометрических фигур, расположенных в пространстве, мы сталкиваемся с неоднородностью евклидова пространства

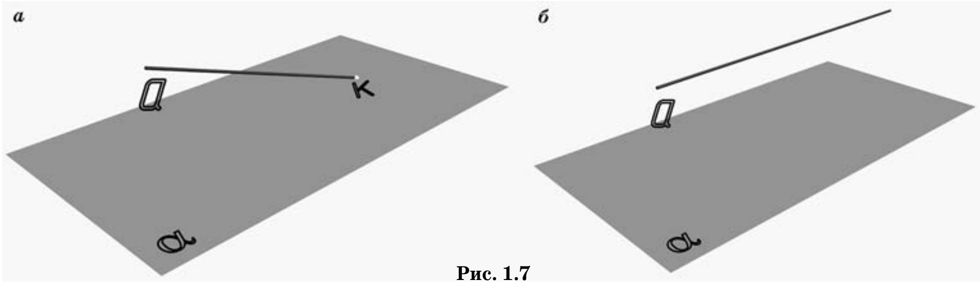

Рис. 1.7

и находящихся в нем фигур. Для того чтобы избавиться от неоднородности пространства, необходимо выполнить его реконструкцию, т. е. допустить существование на прямой бесконечно удаленной точки — несобственной точки, на плоскости — несобственной прямой, в пространстве — несобственной плоскости. В результате три последних положения можно перефразировать следующим образом:

- п. 5*а* — две прямые, принадлежащие одной плоскости, всегда принадлежат одной и той же и только одной точке, т. е. параллельные прямые принадлежат одной и только одной *несобственной точке* — K^{∞} (точка находится в бесконечности) (рис. 1.8) и пересекающиеся прямые (рис. 1.5*а*) принадлежат одной и той же и только одной точке K:

$$(\forall a, b)\,(a \neq b)\,(a, b \in \alpha) \Rightarrow (a, b \in K \vee K^{\infty});$$

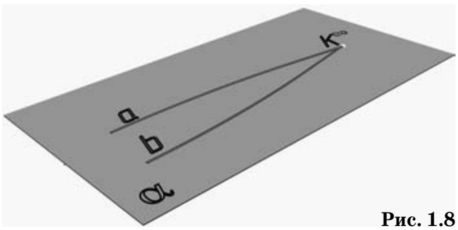

Рис. 1.8

- п. 6*а* — две различные плоскости всегда принадлежат одной и той же и только одной прямой, т. е. две плоскости имеют либо одну несобственную прямую — l^{∞}, находящуюся в бесконечности (параллельные плоскости) (рис. 1.9), либо одну прямую, находящуюся в конечном пространстве (пересекаются) (рис. 1.6*б*):

$$(\forall \alpha, \beta)\,(\alpha \neq \beta) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathrm{l} \vee \mathrm{l}^{\infty});$$

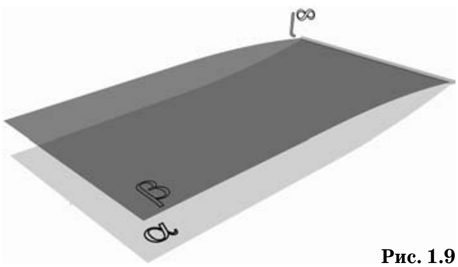

Рис. 1.9

• п. 7*а* — плоскость и не принадлежащая ей прямая всегда принадлежат одной и той же и только одной точке, т. е. точка будет либо собственной (рис. 1.7*а*), либо несобственной (рис. 1.10) точкой.

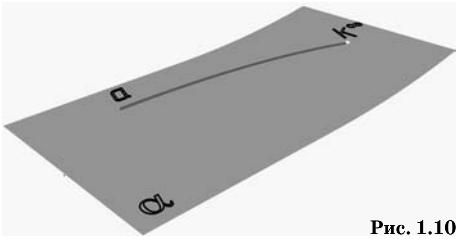

Рис. 1.10

Таким образом, используя понятия несобственной точки и прямой, находящихся в бесконечности, мы реконструировали евклидово пространство, что в дальнейшем позволит определять проекции любой точки на плоскостях проекций способом центрального проецирования.

2

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

В начертательной геометрии при проецировании необходимо установить однозначную связь между проецируемым объектом и его отображением на плоскости. При этом полученная проекция зависит от того способа, при помощи которого получается отображение. Причем тот или иной способ должен отвечать тем задачам, которые необходимо решить в конкретных (иных) областях знаний.

2.1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

При центральном проецировании задаются плоскость П и точка S, не принадлежащая плоскости (рис. 2.1). Проводят прямую, проходящую через точки A и S, и отмечают точку $A_П$ на плоскости П, в которой прямая AS пересечет ее. Точку S называют *центром проецирования*, прямую SA — *проецирующим лучом* или *проецирующей прямой*, полученную точку $A_П$ — *центральной проекцией* точки A на *плоскость проекций* П. Положение плоскости П и центра S определяет аппарат центрального проецирования. Иными словами, зная положение S и П, всегда можно определить положение проекции любой точки пространства на плоскости проекции.

В самом деле, для любой другой точки B можно провести проецирующую прямую и найти точку ее пересечения с плоскостью П. Проекция точки C, находящейся на плоскости проекции, совпадет с самой точкой ($C_П \equiv C$).

Любая точка D, находящаяся в плоскости, которая проходит через центр проецирования параллельно плоскости проекции, будет иметь в качестве проекции несобственную точку $D_П^\infty$ (рис. 2.1).

Таким образом, для каждой точки в пространстве (при указанном аппарате проецирования) существует только одна проекция. Однако одна проекция не определяет поло-

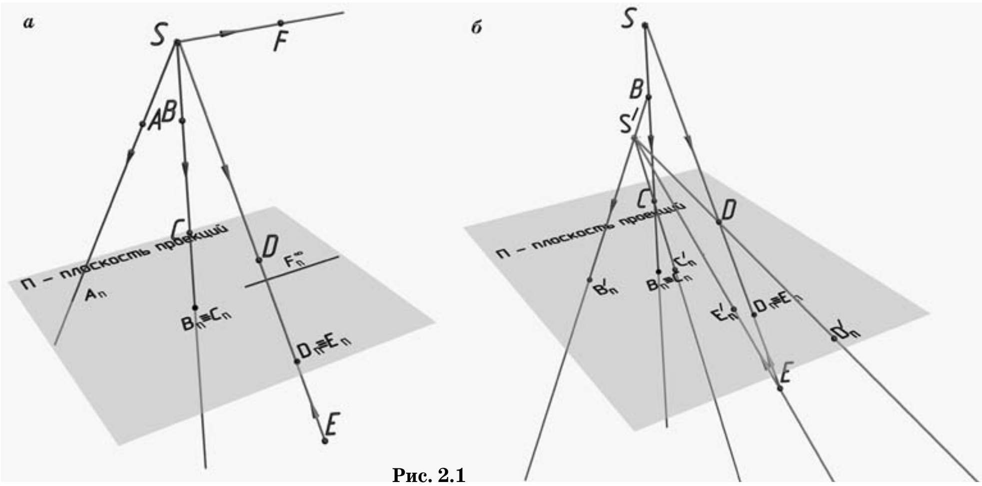

Рис. 2.1

жения точки в пространстве, т. е. для проекции точки на плоскости проекций можно показать множество точек пространства, принадлежащих одному и тому же проецирующему лучу. На рисунке 2.1*а* на одном проецирующем луче лежат точки S, B, C, на другом — S, E, D. В данном случае по одной проекции нельзя судить о положении точки в пространстве. Поэтому необходимо использовать еще один центр проецирования. На рисунке 2.1*б* показано проецирование с использованием двух центров — S и S'. Как видно из рисунка, для того чтобы определить положение точки в пространстве по проекциям с использованием двух центров проецирования, достаточно найти точку пересечения соответствующих проецирующих лучей.

2.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования, когда центр проекции находится в бесконечности. Тогда все проецирующие лучи будут параллельны. На рисунке 2.2*а* показано нахождение параллельной проекции точек A, B и C. Как и для центрального проецирования, нам необходимо выбрать положение плоскости проекции П, а проецирующие лучи будем направлять параллельно какому-либо выбранному направлению $\overline{S}$, которое назовем направлением проецирования. В связи с параллельностью проецирующих прямых рассматриваемый способ проецирования называется *параллельным*, а полученные с его помощью проекции — *параллельными проекциями*.

2.2.1. КОСОУГОЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Если направление проецирования не перпендикулярно и не параллельно плоскости проекций, то проецирование будет *косоугольным*.

Свойство центрального проецирования сохраняется и для параллельного проецирования, которое можно сформулировать так: каждая точка про-

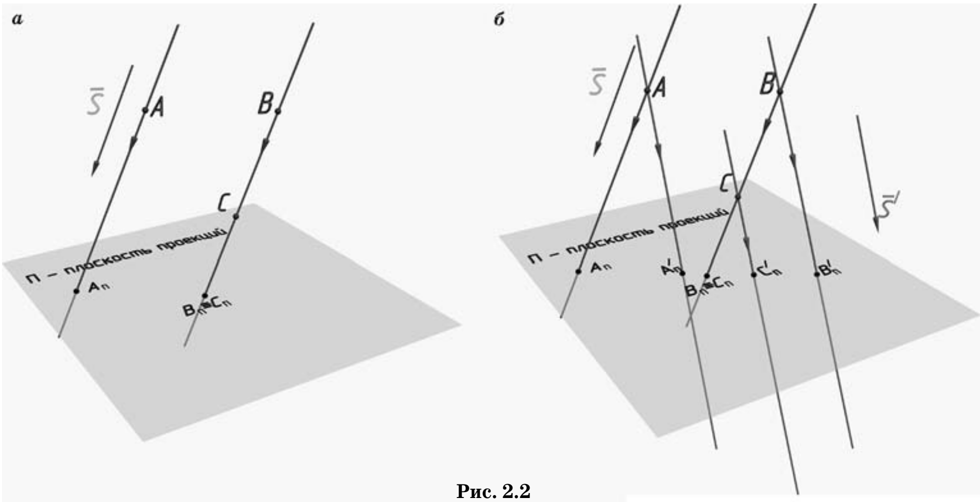

Рис. 2.2

странства при параллельном проецировании будет иметь только одну проекцию. Как и в случае центрального проецирования, обратное утверждение неправомочно. Действительно, проекция $A_П$ может быть проекцией точек A^1, A^2, A^3, … , A^n, расположенных на одном и том же проецирующем луче, что и точка A.

Имея два различных направления проецирования, мы получаем две проекции точки, по которым сможем однозначно определить положение точки в пространстве (рис. 2.2*б*).

В этом случае положение точки A или B определяется пересечением прямых, проведенных через $A_П^1$ и $A_П$ или $B_П^1$ и $B_П$, параллельно соответствующим направлениям проецирования.

Достоинство центрального проецирования заключается в наглядности проекций, которые используют в построениях перспективы различных сооружений. Изображения, полученные с помощью центрального проецирования, являются основой зрительного восприятия окружающего нас мира, их применяют в проектировании объекта в завершенном виде.

Перспективные изображения очень близки нашим зрительным представлениям о предмете. Это объясняется устройством нашего зрительного органа (глаза), работающего по принципу оптического проецирования. Аналогичный принцип характерен для конструкций проекционной аппаратуры (фото- и киноизображения).

2.2.2. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Если направление проецирования выбрать перпендикулярно плоскости проекций П, то получим *прямоугольное*, или *ортогональное*, *проецирование.* На рисунке 2.3 показана суть ортогонального проецирования точки.

Для однозначного определения положения точки в пространстве необходимо, кроме плоскости проекций $П_1$, показать еще одну плоскость проекций $П_2$ (рис. 2.4), тем самым добавляется еще одно направление проецирования.

Таким образом, можно отметить основное свойство ортогонального проецирования: если положение плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$ фиксировано, то

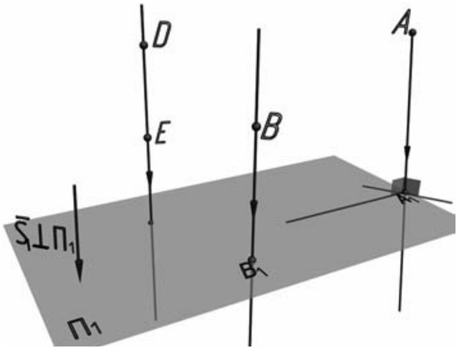

Рис. 2.3

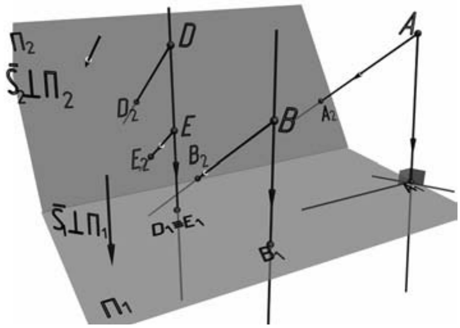

Рис. 2.4

каждой точке пространства будут соответствовать две ее проекции, и обратно — каждой паре проекций соответствует единственная точка пространства.

Ортогональное проецирование обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным):

1) простота геометрических построений для определения ортогональных проекций точек;

2) возможность при определенных условиях сохранить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

Указанные преимущества объясняют столь широкое применение ортогонального проецирования в технике для описания деталей и изделий в виде машиностроительных чертежей.

2.2.3. ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

В общем случае геометрические фигуры проецируются на плоскость с искажением. Это касается как геометрических размеров, так и взаимного расположения точек, линий, поверхностей. Если ортогонально спроецировать треугольник ABC на плоскость П, не параллельную плоскости треугольника (рис. 2.5), то длины сторон, величины углов и площадь не будут равными оригиналу.

Однако существуют свойства, которые будут сохраняться как у самого объекта, так и у его проекции. Из рисунка 2.5 видно, что точки A, B, C проецируются в точки $A_П$, $B_П$, $C_П$, отрезки $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ — стороны треугольника, проецируются в отрезки $[A_ПB_П]$, $[B_ПC_П]$, $[C_ПA_П]$ — проекции сторон треугольника.

Таким образом, существуют свойства геометрических тел, сохраняющиеся в проекциях при любых преобразованиях. Эти свойства в данном преобразовании называют *инвариантными*, или *проективными*.

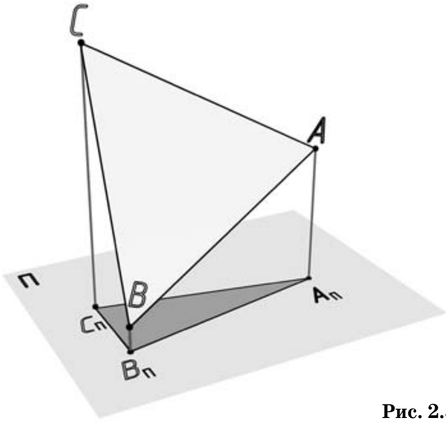

Рис. 2.5

Рассмотрим основные инвариантные свойства ортогонального проецирования.

Свойство 1. Проекция точки на плоскости есть точка (рис. 2.6):

$$A \to A_{\Pi}.$$

Свойство 2. Проекция прямой линии на плоскости есть прямая (рис. 2.7, прямая a); в частном случае, когда прямая перпендикулярна плоскости проекции, — точка (рис. 2.7, прямая b):

$$(\forall a) \wedge (a \not\perp \Pi) : a \to a_{\Pi}.$$

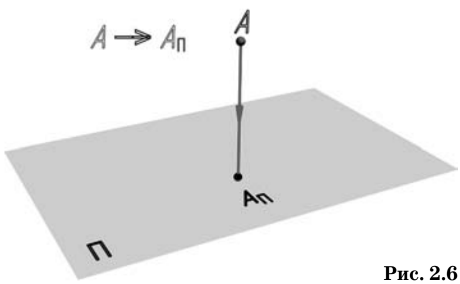

Рис. 2.6

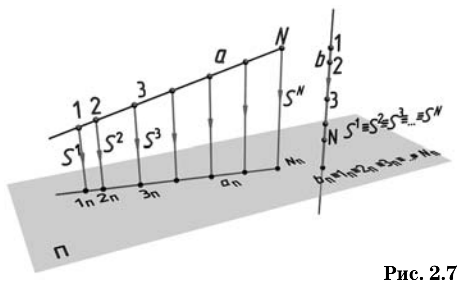

Рис. 2.7

Свойство 3. Если точка принадлежит (инцидентна) линии, то проекция точки принадлежит проекции этой линии (рис. 2.8):

$$A \in a \Rightarrow A_{\Pi} \in a_{\Pi}.$$

Свойство 4. Если точка делит отрезок прямой линии в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении (рис. 2.9):

$$C \in [AB] \Rightarrow \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A_{\Pi} C_{\Pi}|}{|C_{\Pi} B_{\Pi}|}.$$