ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО И ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛОВ

§ 1.1. Углы

Напомним следующие определения из школьного курса геометрии:

✍Два луча, выходящие из одной точки, образуют фигуру, которая называется ***углом***.

✍Угол называется ***острым***, если его градусная мера заключена между значениями 0° и 90°.

✍Угол является ***прямым***, если он равен 90°.

✍Угол называется ***тупым***, если его градусная мера заключена между 90° и 180°.

✍Угол называется ***развернутым***, если он равен 180°.

Пока мы будем рассматривать только такие углы, так как сначала мы будем давать определения тригонометрических величин, исходя из понятия «*треугольник*», одним из компонентов этой простейшей геометрической является угол.

§ 1.2.Тригонометрические функции острого угла

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (Рис. 1.2.1) и введём обозначения: $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.

Напомним, что если в прямоугольном треугольнике отмечен острый угол, то катет, лежащий напротив этого угла, называется *противолежащим катетом*, а катет, являющийся одной из сторон угла, называют *прилежащим катетом*.

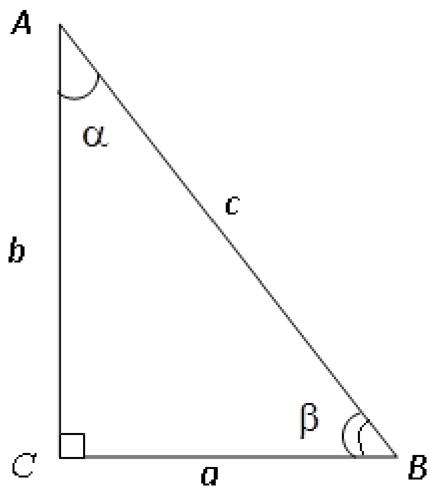


Рис. 1.2.1

Тригонометрические функции острого угла (α или β)

✍***<u>Синусом</u>*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Пишут: $sin\,\alpha=\dfrac{a}{c}$ или $sin\,\beta=\dfrac{b}{c}$.

✍***Косинусом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Пишут: $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$ или $\cos\beta=\dfrac{a}{c}$.

Ясно, что при этом выполняется равенство $\alpha+\beta=90^\circ$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°), то, очевидно, $\sin\alpha=\cos\beta$, а также $\cos\alpha=\sin\beta$.

✍***Тангенсом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Пишут: $tg\,\alpha=\dfrac{a}{b}$ или $tg\,\beta=\dfrac{b}{a}$.

✍***Котангенсом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету.

Пишут: $ctg\,\alpha=\dfrac{b}{a}$ или $ctg\,\beta=\dfrac{a}{b}$.

Очевидно, что имеют место равенства $tg\,\alpha=ctg\,\beta$, а также $ctg\,\alpha=tg\,\beta$.

Кроме введённых четырёх тригонометрических функций (их называют основными тригонометрическими функциями) можно рассмотреть ещё две функции *секанс* и *косеканс*.

✍***Секансом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к прилежащему катету.

Пишут: $\sec\alpha=\dfrac{c}{b}$ или $\sec\beta=\dfrac{c}{a}$.

✍***Косекансом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к противолежащему катету.

Пишут: $cosec\,\alpha=\dfrac{c}{a}$ или $cosec\,\beta=\dfrac{c}{b}$.

Из определений тригонометрических функций следует, что:

$$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (1.2.1)$$

$$ctg\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (1.2.2)$$

Далее можем получить формулы, выражающие связь тангенса и котангенса одного и того же острого угла прямоугольного треугольника:

$$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{1}{ctg\,\alpha}, \qquad (1.2.3)$$

$$ctg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{1}{\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}} = \frac{1}{tg\,\alpha}. \qquad (1.2.4)$$

Из формул (1.2.3) и (1.2.4) непосредственно вытекает формула

$$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1. \qquad (1.2.5)$$

Далее применим к треугольнику ABC теорему Пифагора. Имеем равенство

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Разделим обе его части на c^2. Получим

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Так как $\frac{a}{c} = sin\,\alpha$ и $\frac{b}{c} = cos\,\alpha$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$(sin\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$$

или

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1. \qquad (1.2.6)$$

Равенство (1.2.6) называют ***основным тригонометрическим тождеством***.

Разделим обе части основного тригонометрического тождества на $cos^2\alpha$ и $sin^2\alpha$ соответственно, получим такие формулы:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}, \qquad (1.2.7)$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}. \qquad (1.2.8)$$

Легко заметить, что функция *секанс* непосредственно связана с косинусом, а функция *косеканс* – с синусом следующими соотношениями:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}, \qquad (1.2.9)$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}. \qquad (1.2.10)$$

Используя соотношения (1.2.9) и (1.2.10) формулы (1.2.7) и (1.2.8) можно соответственно переписать в виде:

$$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha, \qquad (1.2.11)$$

$$1 + ctg^2\alpha = cosec^2\alpha. \qquad (1.2.12)$$

Отметим, что две последние формулы можно переписать в ином виде, роднящем их с основным тригонометрическим тождеством:

$$sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1, \qquad (1.2.11^*)$$

$$cosec^2\alpha - ctg^2\alpha = 1. \qquad (1.2.12^*)$$

🕮 Заметим теперь, что названия тригонометрических функций попарно созвучны и отличаются лишь наличием или отсутствием приставки «*ко*». По этой причине тригонометрические функции можно разбить на две группы: без приставки «*ко*» (условимся называть их *основными* тригонометрическими функциями) и содержащие приставку «*ко*» (будем назвать их *дополнительными* тригонометрическими функциями).

Представим это в виде схемы.

Тригонометрические функции

Основные

Синус	$\sin\alpha$
Тангенс	$tg\,\alpha$
Секанс	$\sec\alpha$

Дополнительные

$\cos\alpha$	***Косинус***
$ctg\,\alpha$	***Котангенс***
$cosec\,\alpha$	***Косеканс***

Название «*косинус*» представляет собой сокращение термина *complementi sinus* (синус дополнения), выражающего тот факт, что $\cos\alpha$ равен синусу угла, дополнительного к α (т.е. составляет в сумме с ним угол, равный 90^0). По такому же принципу образованы названия «*котангенс*» (тангенс дополнения) и «*косеканс*» (секанс дополнения).

Основные и дополнительные тригонометрические функции образуют две группы (по три в каждой) функций. Каждую группу функций по отношению к другой, будем называть «*ко-функциями*».

§ 1.3. Тригонометрические функции дополнительных углов

✍Два острых угла, в сумме составляющих прямой угол называются *дополнительными*.

Очевидно, что острые углы прямоугольного треугольника являются дополнительными по отношению друг к другу.

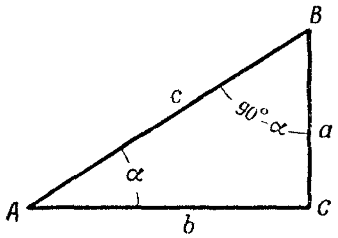


Рис. 1.3.1

Если в прямоугольном треугольнике ΔABC ($\angle C = 90^\circ$), острый угол $\angle BAC = \alpha$, то второй острый угол $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$.

Из Рис. 1.3.1 имеем

$$sin\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\frac{b}{c}=cos\,\alpha\,,$$

$$cos\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\frac{a}{c}=sin\,\alpha\,,$$

т.е. *синус одного из двух острых углов равен косинусу другого угла.*

Аналогично,

$$tg\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\frac{b}{a}=ctg\alpha\,,$$

$$ctg\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\frac{a}{b}=tg\alpha\,,$$

т.е. *тангенс одного из двух острых углов прямоугольного треугольника равен котангенсу другого угла.*

Кроме того

$$sec\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\frac{c}{a}=cosec\,\alpha\,,$$

$$cosec\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\frac{c}{b}=sec\,\alpha\,.$$

Заключаем, что *секанс одного из двух острых углов прямоугольного треугольника равен косекансу другого угла.*

Например, $sin11^{\circ}=cos79^{\circ}$, $tg51^{\circ}=ctg39^{\circ}$, $sec27^{\circ}=cosec63^{\circ}$.

§ 1.4. Значения тригонометрических функций углов 30°*,* 45°*,* 60°

Прежде всего, заметим, что в прямоугольном треугольнике отношение двух его сторон зависит только от величины одного из острых углов и не зависит от линейных размеров сторон. Если изменить угол, то изменится отношение; если изменить отношение, то изменится угол.

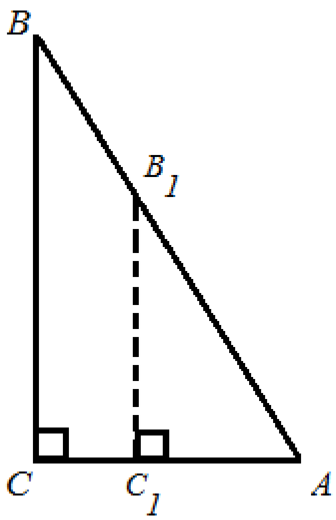


Рис. 1.4.1

Для каждого угла такое отношение постоянно, что легко доказать, используя подобие треугольников ABC и AB_1C_1 (Рис. 1.4.1).

Поэтому числовые значения тригонометрических функций острых углов, найденные, например, для треугольника с гипотенузой, равной единице, будут такими же и для любого другого треугольника с теми же острыми углами.

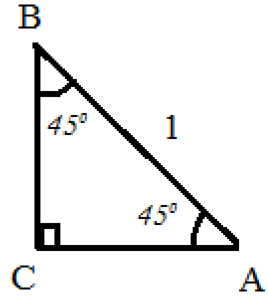


Рис. 1.4.2

Учитывая этот факт, при нахождении значений тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60° [1 градус (1°) – это $\dfrac{1}{90}$ часть плоского прямого угла] будем, для удобства, рассматривать прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной единице.

При таком выборе треугольника противолежащий катет будет равен синусу угла, а прилежащий – косинусу угла.

Итак, рассмотрим сначала равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* (Рис. 1.4.2). Оба острых угла рассматриваемого треугольника равны по 45°. А так как $CB = CA$, то по теореме Пифагора $CB^2 + CA^2 = 1$. Значит, $2CA^2 = 1$, откуда $CB = CA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $tg 45^\circ = ctg\, 45^\circ = 1$.

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник с острыми углами 30° и 60° (Рис. 1.4.3).

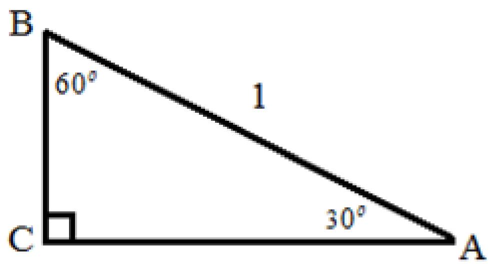


Рис. 1.4.3

Известно, что катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Поэтому $BC = \dfrac{1}{2}$ и по теореме Пифагора $CA = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда следует, что $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $tg 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg 30^\circ = \sqrt{3}$.

С другой стороны, катет *CA*, лежащий против угла 60°, – это синус этого угла, а катет *CB* – косинус угла. Таким образом, $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, $tg 60^\circ = \sqrt{3}$, $ctg 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Обратим внимание на тот факт, что углы 30° и 60°, а также два угла по 45° являются частными случаями, так называемых, взаимно дополнительных углов (см. ***§ 1.3.***).

Для удобства запоминания значений синуса углов 30°, 45°, 60° (а также 0° и 90°) можно использовать *правило ладони*.

Если присвоить каждому из пальцев ладони номер и сопоставить угол (см. Рис. 1.4.4), то для нахождения синуса каждого из этих углов достаточно извлечь квадратный корень из номера пальца, сопоставленного углу, и полученный результат разделить на два.

Итак, $sin\alpha = \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

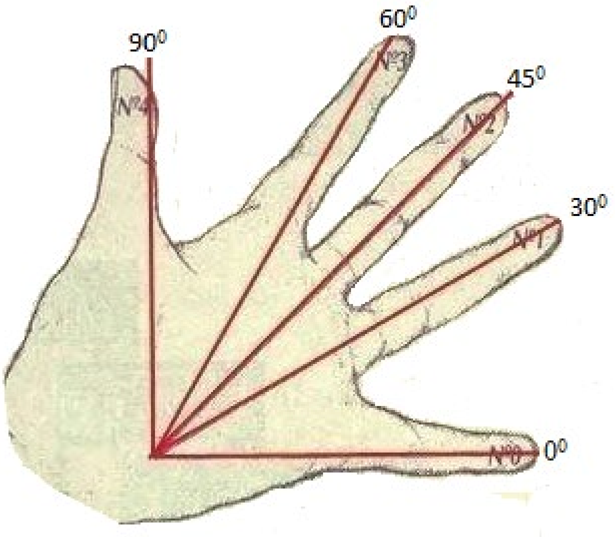


Рис. 1.4.4

Запишем результаты, получаемые с помощью этой формулы и Рис. 1.4.4 в виде таблицы.

Номер и название пальца ладони	*n*=№	*Угол*	$sin\alpha$
№0 – Мизинец	*n*=0	0^0	$sin0^\circ = \dfrac{\sqrt{0}}{2} = 0$
№1 – Безымянный	*n*=1	30^0	$sin30^\circ = \dfrac{\sqrt{1}}{2} = \dfrac{1}{2}$
№2 – Средний	*n*=2	45^0	$sin45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
№3 – Указательный	*n*=3	60^0	$sin60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
№4 – Большой	*n*=4	90^0	$sin90^\circ = \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$

Замечание. С помощью «правила ладони» можно находить и значения косинусов тех же самых углов. Для этого надо начать нумерацию пальцев не с мизинца, а с большого пальца.

§ 1.5. Угол как мера поворота подвижного луча вокруг данной точки

Любой угол $\angle AOB$, как геометрическую фигуру можно получить в результате вращения подвижного луча вокруг вершины O от начальной стороны OA угла до его конечной стороны OB. Тогда величину поворота, совершенного этим лучом, измеряют величиной угла, который образуют лучи OA и OB. Луч OA называют началом отсчета угла, а о луче OB говорят, что он определяет угол поворота.

✍Угол называется ***положительным***, если он образован поворотом луча ***против хода часовой стрелки***, и ***отрицательным***, если он образован поворотом луча ***по ходу часовой стрелки***.

Обозначим через φ наименьший неотрицательный угол, образованный лучами OA и OB (Рис. 1.5.1).

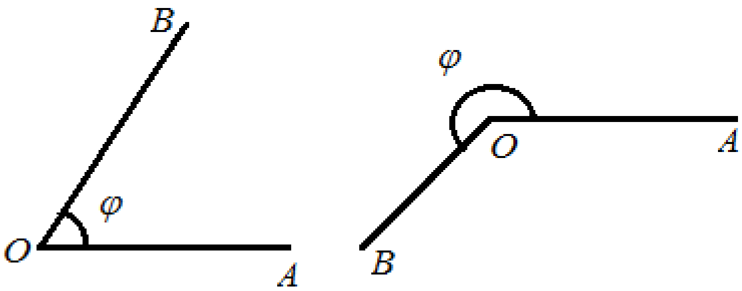


Рис. 1.5.1

Если луч OB совершает дополнительно полный оборот вокруг точки O против хода часовой стрелки (такой поворот считают поворотом на 360^0), то получаем другую величину угла, равную $\varphi + 360^\circ$. А тогда ясно, что любой угол поворота φ, определяемый лучом OB, можно представить в виде

$$\psi = \varphi + 360^\circ \cdot n,$$

где $0^\circ \le \varphi \le 360^\circ$, а $n \in Z$.

🕮 На практике уже более трех тысяч лет за единицу измерения величины угла принята $\frac{1}{360}$ часть полного оборота, которую называют ***градусом***.

В технике за единицу измерения углов принимают ***полный оборот***.

В мореплавании за единицу измерения углов принят ***румб***, равный $\frac{1}{32}$ части полного оборота.

Рис. 1.5.2

В артиллерии за единицу измерения углов принята $\frac{1}{60}$ часть полного оборота, которую называют ***большим делением угломера***[1] (0,01 часть большого деления угломера называют малым делением угломера).

§ 1.6. Тригонометрическая окружность

Градусная мера измерения углов привычна, но не является единственной. Существует ещё радианное измерение углов.

Введение радианной (впрочем, как и градусной) меры основано на следующем утверждении:
отношение длины дуги, на которую данный центральный угол опирается, к радиусу окружности определяется лишь только данным углом и не зависят от величины радиуса.

Введём на плоскости прямоугольную систему координат xOy и рассмотрим единичную окружность, т.е. окружность с центром в некоторой точке O и с радиусом, равным единице масштаба. Выберем на этой окружности некоторую точку A (1;0) (см. Рис. 1.6.1), лежащей на этой окружности, называемой «*началом отсчёта*» (не путать с началом координат).

Направление обхода по окружности ***против хода*** (***по ходу***) часовой стрелки будем называть ***положительным*** (***отрицательным***) ***направлением обхода***.

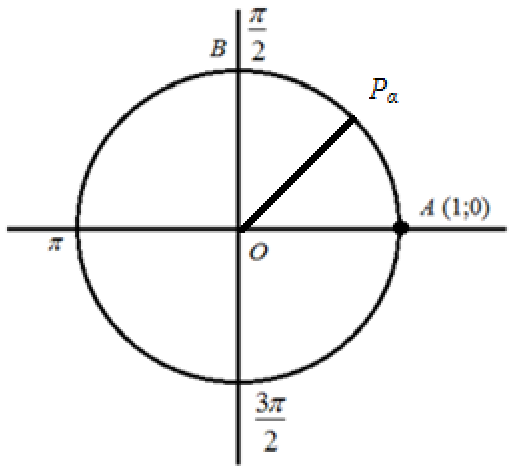


Рис. 1.6.1

✍Введённую таким образом окружность называют ***тригонометрической окружностью***, а круг, который она ограничивает, – ***тригонометрическим кругом***.

По аналогии с числовой прямой каждому числу $\alpha \in (0;2\pi)$ поставим в соответствие точку P_α данной единичной окружности такую, что длина дуги AP_α равна α, причем дуга AP_α откладывается от точки A против часовой стрелки. Числу 0 и числу 2π поставим в соответствие точку A. Таким образом, между точками единичной окружности и числами промежутка [0; 2π) установлена взаимно однозначное соответствие.

✍Число α называется ***радианной мерой*** дуги AP_α и соответственно угла AOP_α.

Из формулы для вычисления длины дуги окружности следует формула, связывающая радианную и градусную меры угла.

[1]***Угломер*** – устройство для измерения углов (см. Рис. 1.5.2)

Действительно, если α – длина дуги единичной окружности, градусная мера которой равна β, то

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \beta . \qquad (1.6.1)$$

Итак, дуга в ***1 радиан*** содержит $\frac{180}{\pi}$ градусов: $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$. Дуга в 1° содержит $\frac{\pi}{180}$ радиан: $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$.

<u>Пример 1.6.1</u>. Найти радианную меру углов 120^0; 320^0.

Решение. Так как $1^\circ = \frac{\pi}{180}$, то:

$$120^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{2\pi}{3},$$

$$320^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 320 = \frac{16\pi}{9}.$$

Для перевода меры угла из градусной в радианную и обратно существуют таблицы (например, В. М. Брадис, Четырехзначные математические таблицы).

Приведем таблицу для углов и дуг, которые встречаются наиболее часто.

Градусы	**360°**	**180°**	**90°**	**60°**	**45°**	**30°**	**18°**	**15°**	**10°**	**1°**	**β°**
Радианы	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot \beta$

Снова рассмотрим единичную окружность с выбранной точкой A (Рис. 1.6.1).

Каждому числу $\alpha \in (-2\pi; 0)$ поставим в соответствие точку P_α данной единичной окружности такую, что длина дуги AP_α равна $|\alpha|$ и дуга AP_α откладывается от точки A по часовой стрелке (Рис. 1.6.2). Числу -2π поставим в соответствие точку A.

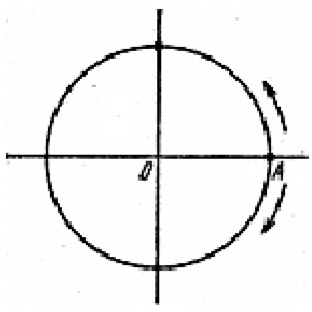


Рис. 1.6.2

Произвольное число α представим следующим образом: $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, где k – некоторое целое число, а $\alpha_0 \in]-2\pi; 2\pi[$. Заметим, что для любого α такое представление возможно. Теперь числу α поставим в соответствие ту же точку, что и числу α_0, т. е. точки P_α и P_{α_0} совпадают.

Таким образом, выше построено соответствие между действительными числами и точками единичной окружности. Из самого построения этого соответствия следует, что точки $P_{\alpha+2\pi}$, $P_{\alpha-2\pi}$, P_{α} совпадают. То есть, единичная окружность – это числовая ось в виде тончайшей нерастяжимой нити, мысленно «намотанная» своим положительным лучом на окружность против часовой стрелки.

О точке P_α говорят, что она получается из точки A поворотом на $|\alpha|$ радиан против часовой стрелки, если $\alpha > 0$, и по часовой стрелке, если $\alpha < 0$.

§ 1.7. Тригонометрические функции произвольного аргумента

В предыдущем параграфе было установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством точек единичной окружности. Каждому действительному числу α поставлена в соответствие точка P_α единичной окружности.

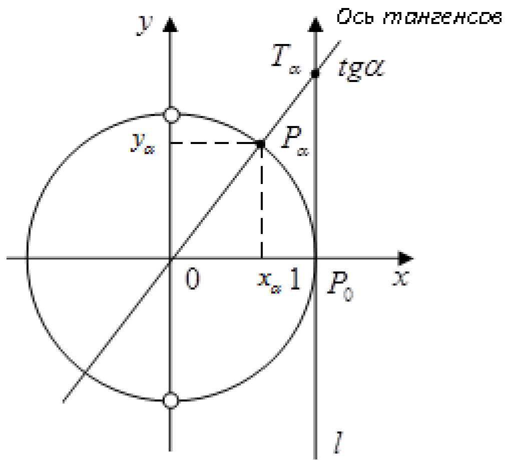


Рис. 1.7.1

✍***Синусом*** произвольного угла (числа) α называется *ордината* точки P_α единичной окружности, т.е.

$$sin\,\alpha = y_\alpha .$$

Действительно, исходя из определения синуса, приведённого в ***§ 1.2***. синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе, т.е.

$$sin\,\alpha = \frac{y_\alpha}{OP_\alpha} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha .$$

✍***Косинусом*** произвольного угла (числа) α называется *абсцисса* точки P_α единичной окружности, т.е.

$$cos\,\alpha = x_\alpha .$$

Итак, синус и косинус числа (угла) определяются соответственно как *ордината и абсцисса* точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;0)$ вокруг начала координат на угол α радиан (градусов).

Определения синуса и косинуса носят геометрический характер, так как получаются из прямоугольного треугольника как отношение соответствующих катетов к гипотенузе.

Пример 1.7.1. Найти синус числа $\alpha = \dfrac{13}{6}\pi$.

Решение. Так как $\dfrac{13}{6}\pi = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi$, то этому соответствует та же точка P, что и числу $\frac{\pi}{6}$. Опустим из точки *P* перпендикуляр *PM* на ось *Ox*. Тогда имеем |*PM*| = *y*. В прямоугольном треугольнике *POM* длина гипотенузы *OM* равна 1 (так как окружность единичная), длина катета *PM* равна $\frac{1}{2}$ (как катет, лежащий против угла в 30º). Следовательно, ордината точки *M* равна числу 0,5, т. е. *y* = 0,5. Таким образом, $sin\frac{13\pi}{6}=0{,}5$.

<u>Пример 1.7.2.</u> Найти *sin* 1,17.

Решение. Воспользуемся книгой «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса: *sin* 1,17 ≈ 0,9208 (Стр. 62).

Что касается тангенса и котангенса, то их можно определить алгебраически через отношение:

$$tg\alpha=\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z; \qquad (1.7.1)$$

$$ctg\alpha=\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z. \qquad (1.7.2)$$

✍***<u>Тангенсом</u>*** угла (числа) *α* называется отношение $\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

✍***<u>Котангенсом</u>*** угла (числа) *α* называется отношение $\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$, $\alpha\neq\pi k$.

Во многих случаях геометрические определения более удобны для использования. Поэтому рассмотрим геометрическую интерпретацию определений тангенса и котангенса.

1) Пусть дана единичная окружность. Проведем касательную l к ней в точке P_0 (Рис.1.7.1). Если α - произвольное число такое, что $cos\,\alpha\neq0$, т.е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, то прямые l и OP_α пересекаются. Найдем координаты точки T_α пересечения прямых.

Прямая l задается уравнением $x=1$. Прямая OP_α проходит через начало координат $(0;0)$ и точку $P_\alpha(cos\,\alpha;sin\,\alpha)$. Поэтому ее уравнение имеет вид: $y=(tg\alpha)\cdot x$.

Решая систему $\begin{cases} x=1 \\ y=x\cdot tg\alpha \end{cases}$, находим координаты точки T_α: $(1;tg\alpha)$.

Выберем на прямой l направление, совпадающее с направлением оси ординат, начало отсчета – точку P_0 ($tg0=0$) и единичный отрезок, равный единичному отрезку основной системы координат. Получим координатную прямую – ось тангенсов. Тогда можно сформулировать следующее *определение.*

✍***Тангенсом*** угла (числа) α называется ***координата на оси тангенсов*** точки пересечения оси тангенсов и прямой OP_α, где O – начало координат, P_α – точка, полученная поворотом точки $(1;0)$ вокруг начала координат на угол α.

__**Пример 1.7.3**__. Найти $tg\dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. Числу $\dfrac{3\pi}{4}$ на числовой окружности соответствует точка *P*, которая является концом дуги в 135°. Опустим из точки *P* перпендикуляр на ось *Ox*. Треугольник *OPM* прямоугольный и равнобедренный (дополнительный угол равен 45°). Координатами точки *P* будут числа: $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно,

$$tg\frac{3\pi}{4}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\div\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1.$$

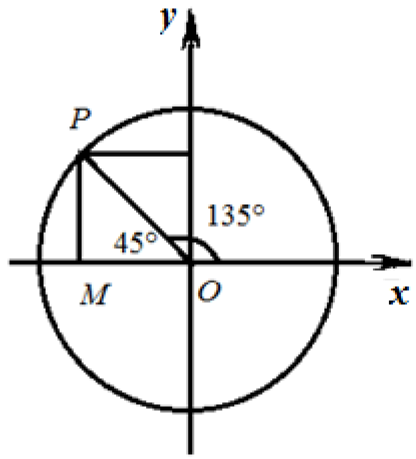


Рис. 1.7.2

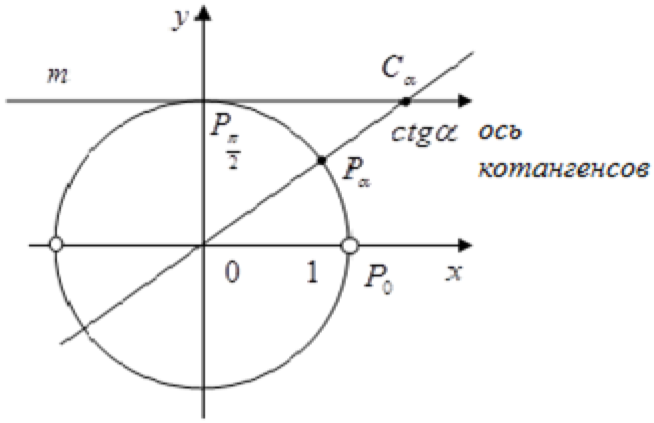


Рис. 1.7.3

2) По аналогии с осью тангенсов получим ось котангенсов. Проведем касательную m к единичной окружности в точке $P_{\frac{\pi}{2}}$ (Рис. 1.7.3). Выберем на прямой m направление, совпадающее с направлением оси абсцисс, начало отсчета – точку $P_{\frac{\pi}{2}}$ ($ctg\dfrac{\pi}{2}=0$) и единичный отрезок, равный единичному отрезку основной системы координат. Можно сформулировать следующее *определение.*

✍ ***Котангенсом*** угла (числа) α называется ***координата на оси котангенсов*** точки пересечения оси котангенсов и прямой OP_α, где O - начало координат, P_α - точка, полученная поворотом точки $(1;0)$ вокруг начала координат на угол α.

✍ ***Секансом*** угла (числа) α называется отношение $\dfrac{1}{cos\,\alpha}$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$.

✍ ***Косекансом*** угла (числа) α называется отношение $\dfrac{1}{sin\,\alpha}$, $\alpha\neq\pi k$.

На Рис. 1.7.4 и Рис. 1.7.5 изображен тригонометрический круг, на который нанесены наиболее часто встречающиеся углы (в радианах) а также показаны значения основных тригонометрических функций (синуса, косинуса, тангенса и котангенса).

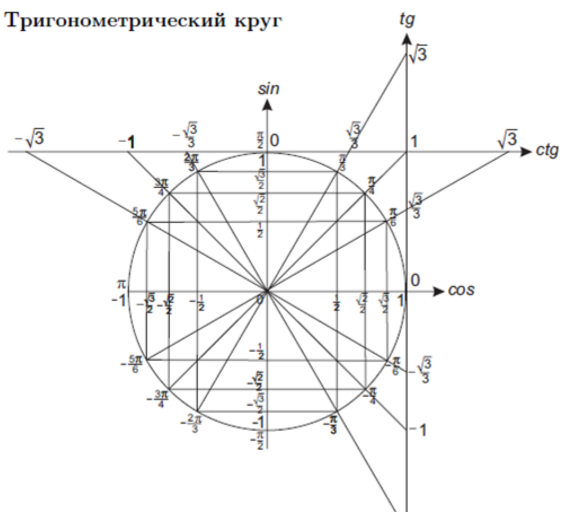


Рис. 1.7.4

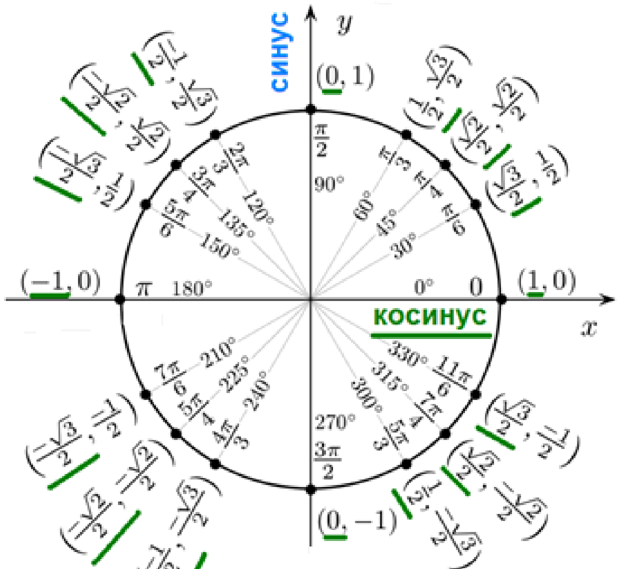


Рис. 1.7.5

§ 1.8. Знаки тригонометрических функций

Прежде всего, напомним, что угол α принадлежит:

1) ***первой*** (**I**) координатной четверти, если $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$;

2) ***второй*** (**II**) координатной четверти, если $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$;

3) ***третьей*** (**III**) координатной четверти, если $180^{\circ} < \alpha < 270^{\circ}$;

4) ***четвертой*** (**IV**) координатной четверти, если $270^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$.

Чтобы определить знаки тригонометрических функций синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс воспользуемся определениями этих функций из предыдущего параграфа.

1) Так из определения синуса произвольного угла α следует, что $sin\,\alpha = y_{\alpha}$ (ордината точки P_{α} на единичной окружности, соответствующая углу α). Поэтому $sin\,\alpha > 0$, если точка P_{α} лежит выше оси абсцисс (т.е. в **I** и **II** координатных четвертях), и $sin\,\alpha < 0$, если точка P_{α} лежит ниже оси абсцисс (т.е. в **III** и **IV** координатных четвертях).

2) Аналогично, из определения косинуса произвольного угла:

$$cos\,\alpha = \frac{OB}{OP_{\alpha}} = \frac{x_{\alpha}}{1} = x_{\alpha}.$$

Значит, $cos\,\alpha > 0$ в тех четвертях, где абсцисса точки P_{α} положительна (т.е. т.е. в **I** и **IV** координатных четвертях), соответственно $cos\,\alpha < 0$ будет во **II** и **III** координатных четвертях.

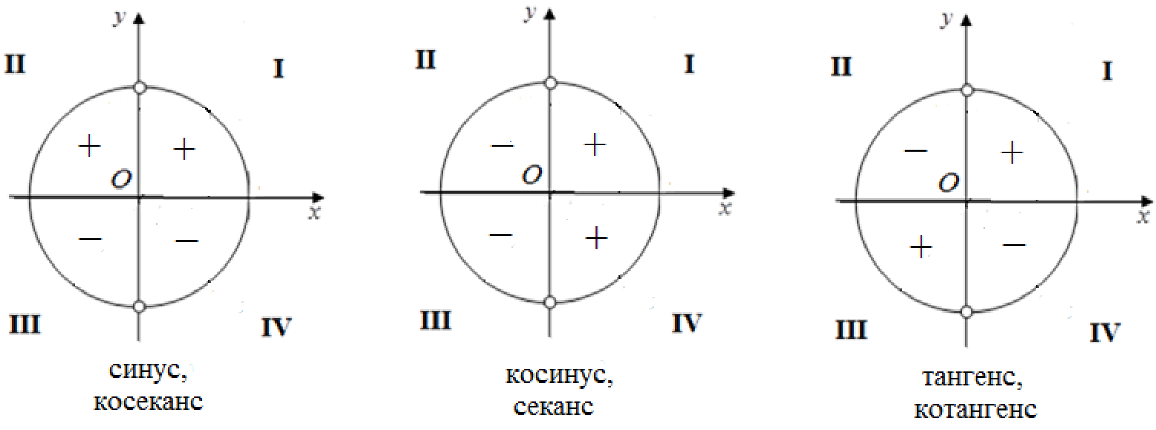


Рис. 1.8.1

3) Что касается знаков тангенса и котангенса, то из определений этих функций следует, что как тангенс, так и котангенс положительны, когда синус и косинус имеют одинаковые знаки (т.е. в **I** и **III** координатных четвертях) и отрицательны, когда синус и косинус имеют разные знаки (т.е. во **II** и **IV** координатных четвертях).

4) Для определения знака секанса достаточно вспомнить, что $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, т.е. его совпадает со знаком косинуса, а т.к. $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sin\,\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, то знак косеканса совпадает со знаком синуса.

Схематическое распределение знаков по координатным четвертям представлено на Рис. 1.8.1.

§ 1.9. Чётность и нечётность тригонометрических функций

Перейдём к рассмотрению такого свойства тригонометрических функций, как чётность.

Рассмотрим треугольник $OBP_{-\alpha}$, в котором угол $BOP_{-\alpha} = -\alpha$ (см. Рис. 1.9.1). Тогда

$$sin(-\alpha) = \frac{BP_{-\alpha}}{OP_{-\alpha}} = \frac{-y_\alpha}{1} = -y_\alpha = -sin\,\alpha,$$

а это означает нечётность синуса.

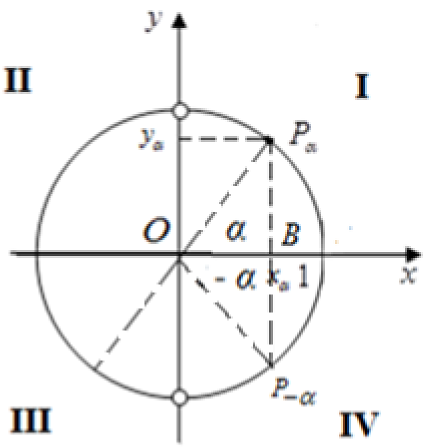


Рис. 1.9.1

Далее

$$cos(-\alpha) = \frac{OB}{OP_{-\alpha}} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha = cos\,\alpha,$$

что свидетельствует о чётности косинуса.

Теперь рассмотрим этот же вопрос для тангенса и котангенса:

$$tg(\text{-}\alpha) = = \frac{sin(\text{-}\alpha)}{cos(\text{-}\alpha)} = \frac{-sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = -\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = -tg\alpha\,,$$

$$ctg(\text{-}\alpha) = = \frac{1}{tg(\text{-}\alpha)} = \frac{1}{-tg\alpha} = -\frac{1}{tg\alpha} = -ctg\alpha\,.$$

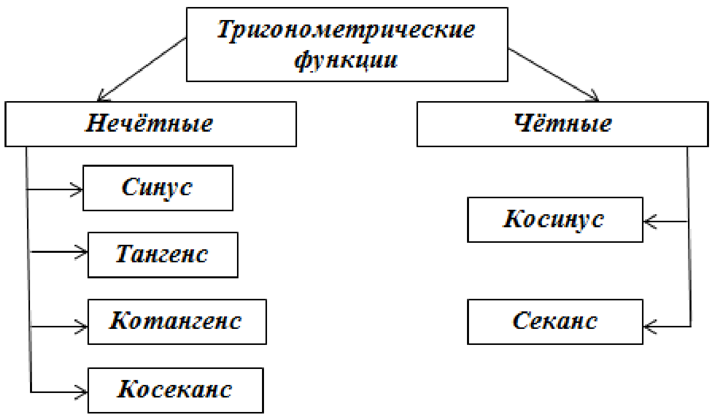
Полученные результаты говорят о том, что тангенс и котангенс обладают свойством нечётности.

Исследуем теперь на чётность и нечётность секанс и косеканс.

$$sec(\text{-}\alpha) = = \frac{1}{cos(\text{-}\alpha)} = \frac{1}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha\,,$$

$$cosec(\text{-}\alpha) = = \frac{1}{sin(\text{-}\alpha)} = \frac{1}{-sin\,\alpha} = -\frac{1}{sin\,\alpha} = -cos\,ec\,\alpha\,.$$

Таким образом, секанс обладает свойством чётности, а косеканс нечётен. Представим полученные результаты в виде схемы



§ 1.10. Периодичность тригонометрических функций

✍Функция $f(x)$ называется ***периодической***, если она задана на периодическом множестве и существует хотя бы одно число $l>0$, такое, что $\forall x$ значения функции $f(x)$ в точках $x,\ x+l,\ x-l$ равны.

Графиком периодической функции является такая линия, у которой можно выделить некоторый участок (звено), который затем «повторяется» бесконечное множество раз.

Уравнение, содержащее периодическую функцию, как правило, имеет бесконечно много корней (бывают случаи, когда множество решений пусто).

Тригонометрические функции являются периодическими функциями.

✧ ***Число 2π является наименьшим положительным периодом для синуса, косинуса, секанса и косеканса***.

Действительно, справедливость этого утверждения следует непосредственно из того, что значение тригонометрических функций определяются с помощью координат вращающейся точки.

Но при вращении этой точки по единичной окружности через каждый оборот она занимает то же самое положение, и, как известно, полный оборот точка совершает тогда, когда приращение аргумента равно 2π.

Следовательно, для точки, совершающей n полных оборотов, справедливы формулы

$$sin\,(t+2\pi n)=sint,$$
$$cos\,(t+2\pi n)=cost,$$
$$sec\,(t+2\pi n)=sect,$$
$$cosec\,(t+2\pi n)=cosect.$$

Докажем, что никаких других периодов функции $y=cos\,x$ и $y=sin\,x$ не имеют.

Действительно, число $l\neq 0$ служит периодом функции $y=cos\,x$ только в том случае, если имеет место тождество: $cos(x+l)\equiv cos\,x$ *или* $cos(x+l)-cos\,x\equiv 0$. Тогда $-2sin\left(x+\frac{l}{2}\right)\cdot sin\frac{l}{2}\equiv 0$. Т.к. $sin\left(x+\frac{l}{2}\right)$ не равен тождественно нулю, то $sin\frac{l}{2}=0,\Rightarrow l=2\pi k$. Что и требовалось доказать.

✧ ***Число π является наименьшим положительным периодом для тангенса и котангенса.***

Пример 1.10.1. С помощью свойства периодичности синуса преобразовать $sin\,2672°$ к более простому виду.

Решение.

$sin\,2672° = sin\,(152°+7\cdot 360°)= sin\,152°$.

Пример 1.10.2. Найти значение выражения $\dfrac{sin\frac{7\pi}{3}-cos\frac{\pi}{3}+tg\frac{11\pi}{6}}{cos\frac{25}{6}\pi\cdot ctg\frac{13\pi}{4}\cdot sin\frac{3\pi}{2}}$.

Решение. Для краткости записей обозначим данное выражение буквой A и выразим все углы через углы, находящиеся в пределах одного оборота точки P_0. Далее, используя свойства периодичности, а также чётности и нечётности соответствующих функций, получим:

$$A=\frac{sin\frac{7\pi}{3}-cos\frac{\pi}{3}+tg\frac{11\pi}{6}}{cos\frac{25}{6}\pi\cdot ctg\frac{13\pi}{4}\cdot sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)-cos\frac{\pi}{3}+tg\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}{cos\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot ctg\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}+tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}\cdot ctg\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot(-1)}=\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $A=\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$.

§ 1.11. Формулы приведения

Формулами приведения называют формулы, выражающие значения тригонометрических функций углов вида:

$$\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\left(90^\circ\pm\alpha\right);\quad \pi\pm\alpha,\left(180^\circ\pm\alpha\right);\quad \frac{3\pi}{2}\pm\alpha,\left(270^\circ\pm\alpha\right);\quad 2\pi\pm\alpha,\left(360^\circ\pm\alpha\right);\ldots$$

через функции угла α из первой координатной четверти. То есть, формулы приведения позволяют упростить выражение за счёт замены присутствующего в нём угла углом первой четверти, нахождение значений тригонометрических функций для которого не представляет проблемы.

Выводятся формулы приведения разными способами. Мы же остановимся на следующих соображениях. Отметим на тригонометрической окружности (Рис. 1.11.1) точки:

$$A_\alpha, A_{\frac{\pi}{2}-\alpha}, A_{\frac{\pi}{2}+\alpha}, A_{\pi-\alpha},$$

$$A_{\pi+\alpha}, A_{\frac{3\pi}{2}-\alpha}, A_{\frac{3\pi}{2}+\alpha}, A_{2\pi-\alpha},$$

соответствующие углам:

$$\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha, \pi-\alpha,$$

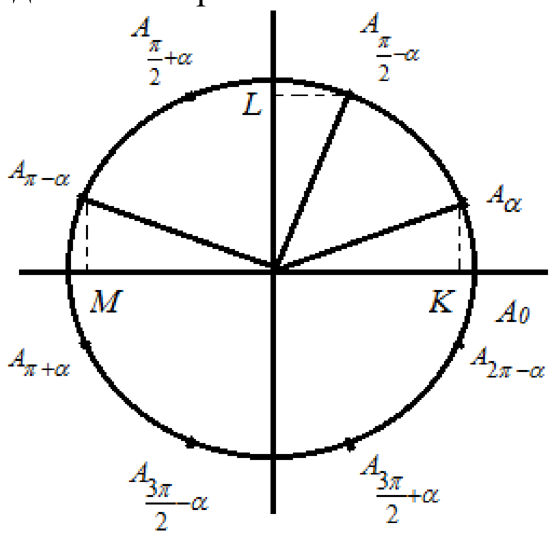


Рис. 1.11.1

$$\pi+\alpha, \frac{3\pi}{2}-\alpha, \frac{3\pi}{2}+\alpha, 2\pi-\alpha$$

Справедливость равенств $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, а также $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$, $ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$ вытекает непосредственно из факта, установленного в ***§ 1.3***, касавшегося свойств дополнительных углов.

Далее заметим, что точки A_α и $A_{\pi-\alpha}$ симметричны относительно оси ординат, следовательно, синусы соответствующих им углов равны, т.е.