Содержание

Предисловие

Авторы данного пособия ставили своей целью помочь абитуриентам, поступающим в 9-й класс Лицея НИУ ВШЭ. Пособие содержит разбор демонстрационных вариантов и задания для самостоятельной подготовки. Часть из этих заданий была взята из вариантов прошлых лет. В целом сборник дает возможность понять ожидаемый уровень освоения математики абитуриентами.

Для поступления на специализацию «Универсальная» необходимо успешно справиться с вступительными испытаниями 1-го этапа, для поступления на специализацию «Математика и физика» необходимо продемонстрировать хороший уровень владения математикой при решении задач вступительных испытаний 2-го этапа. Авторы уверены, что владение алгоритмами решения представленных здесь задач может служить прекрасным дополнением к глубокому и основательному изучению курса школьной математики.

Выражаем нашу благодарность и признательность В.П. Барашеву, Б.В. Галицкому, Н.А. Жариковой, Т.Б. Замковой, А.Б. Зубову, И.Н. Омельченко, В.В. Показееву, Д.С. Чистякову, Н.А. Шабат, А.В. Цареву за помощь в подготовке этого пособия, бесценные идеи, замечания и поддержку.

С пожеланиями успехов,
авторы настоящего пособия

Литература, рекомендуемая для подготовки

1. Алгебра. 8-й класс. Учебник. Базовый уровень/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. Изд. 16-е, перераб. М.: Просвещение, 2023.

2. Алгебра. 8-й класс. Учебник. Углубленный уровень / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. Изд. 4-е, стер. М.: Просвещение, 2022.

3. Математика. Алгебра. 8-й класс. Учебник. Базовый уровень / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. М.: Просвещение, 2023.

4. Геометрия. 8-й класс. Учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. Изд. 8-е, стер. М.: Просвещение, 2023.

5. Геометрия. 8-й класс. Учебник. Углубленный уровень / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. М.: Просвещение, 2021.

6. *Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В.* Геометрия. 8-й класс / под ред. В.А. Садовничего. М.: Просвещение, 2022.

7. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.* Задачи по математике. Алгебра. М.: Физматлит, 2007.

8. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Физматлит, 2007.

9. *Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И.* Сборник задач по алгебре. Учеб. пособие для 8–9-х классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2001.

10. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. 7–9-е классы. М.: МЦНМО, 2004.

11. *Иванов О.А.* Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы. Учеб. пособие. М.: МЦНМО, 2001.

12. *Кравцев С.В., Макаров Ю.Л., Максимов М.И. и др.* Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. М.: Экзамен, 2001.

13. *Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. Справочник. М.: Факториал, 1997.

14. *Олехник С.Н., Потапов М.К., Нестеренко Ю.В.* Конкурсные задачи по математике. Справочное пособие. Изд. 3-е, стер. М.: Физматлит, 2003.

15. *Сергеев И.Н.* Математика: задачи с ответами и решениями. М.: КДУ, 2013.

16. *Хорошилова Е.В.* Элементарная математика. Учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Ч. 1. М.: МГУ, 2010.

17. *Хорошилова Е.В.* Элементарная математика. Учеб. пособие для слушателей подготовительных отделений, абитуриентов и старшеклассников. Ч. 2. М.: МГУ, 2010.

Структура экзаменов

Структура вступительного экзамена по математике в 9-й класс

Вступительные испытания 1-го этапа проходят все абитуриенты, поступающие в 9 - й класс Лицея НИУ ВШЭ. Работа представляет собой тест и состоит из 10 заданий с открытым ответом. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь с 1—2 знаками после запятой. Проверка ответов осуществляется с помощью информационных технологий.

Задания оцениваются по шкале, приведённой в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество баллов	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1,5

Вступительные испытания 2-го этапа проходят только поступающие на специализацию «Математика и физика» 9-го класса Лицея НИУ ВШЭ. Вступительное испытание представляет собой письменную работу, которая состоит из пяти заданий с развернутым ответом. Проверка решений осуществляется по критериям, устанавливаемым приемной комиссией Лицея НИУ ВШЭ.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5
Количество баллов	3	3	4	5	5

Темы для подготовки: числа и вычисления, натуральные, целые, рациональные числа, действительные числа, проценты; квадратные корни, свойства арифметического квадратного корня, преобразование выражений, содержащих квадратные корни; алгебраические выражения, буквенные выражения, многочлены, алгебраические дроби, сокращение дробей, сложение, вычитание, умножение, деление алгебраических дробей, преобразование рациональных выражений; уравнения, линейные уравнения и их системы, квадратные уравнения с одной переменной, теорема Виета, дробные рациональные уравнения, применение уравнений к решению текстовых задач; функция, линейная функция, ее свойства и график.

Треугольники, элементы треугольника, медианы, высоты, биссектрисы треугольника и их свойства; равенство и подобие треугольников; прямоугольный треугольник и его свойства; параллельные прямые, их признаки и свойства; теорема Чевы, теорема Менелая; четырехугольники и их свойства; параллелограмм, трапеция; площади фигур; окружность и ее свойства; вписанные и центральные углы; хорда, секущая и касательная окружности; взаимное расположение двух окружностей; вписанные и описанные окружности и их свойства.

Вступительные испытания 1-го этапа в 9-й класс

Задания по **математике 2024 демо**
Выполните задания (10 баллов)

$\boxed{\textbf{1}}$ *(0,5 балла)* Решите уравнение

$$3\frac{1}{9} - x : 0{,}72 = 2\frac{7}{12}.$$

$\boxed{\textbf{2}}$ *(1 балл)* Иван Васильевич положил 65 000 руб. в банк на годовой вклад «Успешный». Через год после начисления процентов сумма на вкладе стала равна 74 100 руб. Какая сумма будет на вкладе Ивана Васильевича еще через год? Ответ дайте в рублях.

$\boxed{\textbf{3}}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{8}\right)^2 + \sqrt{0{,}15} \cdot \sqrt{240} - \left(-4\sqrt{0{,}3}\right)^2.$$

$\boxed{\textbf{4}}$ *(1 балл)* Сумма квадратов корней уравнения

$$2x^2 + 5x + c = 0$$

равна $9\frac{1}{4}$. Найдите c.

$\boxed{\textbf{5}}$ *(1 балл)* График линейной функции $y = kx + b$ не пересекается с прямой $y = 4x$, а с прямой MN пересекается в точке, лежащей на оси абсцисс. Найдите b, если $M(-4, -1)$ и $N(4, 3)$.

$\boxed{\textbf{6}}$ *(1 балл)* Петя и Коля устроили чемпионат по игре «крестики-нолики». Было проведено 15 партий, причем за победу давалось 4 очка, за ничью — 3, за проигрыш — 1. Сумма очков, набранная обоими мальчиками, оказалась равной 81. Сколько партий было сыграно вничью?

$\boxed{\textbf{7}}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\frac{\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{b^2}{9}}{\dfrac{a}{12} + \dfrac{b}{18}}$$

при $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{8}}$ *(1 балл)* Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна 12. Известно, что угол DCA в 5 раз больше угла BCA. Найдите расстояние от точки C до диагонали BD.

$\boxed{\textbf{9}}$ *(1 балл)* Черепаха и ежик начали двигаться одновременно навстречу друг другу. Они встретились через 50 мин после начала своего движения. Сколько времени потребовалось бы черепахе на весь путь, если известно, что ежик проделал бы этот путь на 4 ч быстрее черепахи? Ответ дайте в часах.

$\boxed{\textbf{10}}$ *(1,5 балла)* Вася нашел наименьшее натуральное число X такое, что произведение всех натуральных чисел от 1 до X делится на 2022. Какое число нашел Вася?

$\boxed{1}$ *(0,5 балла)* Решите уравнение

$$3\frac{1}{9} - x : 0,72 = 2\frac{7}{12}.$$

Решение.

$$\frac{28}{9} - x \cdot \frac{100}{72} = \frac{31}{12},$$
$$\frac{28}{9} - \frac{31}{12} = x \cdot \frac{25}{18},$$
$$\frac{19}{36} = x \cdot \frac{25}{18},$$
$$x = \frac{19}{36} \cdot \frac{18}{25},$$
$$x = 0,38.$$

Ответ: 0,38.

$\boxed{2}$ *(1 балл)* Иван Васильевич положил 65 000 руб. в банк на годовой вклад «Успешный». Через год после начисления процентов сумма на вкладе стала равна 74 100 руб. Какая сумма будет на вкладе Ивана Васильевича ещё через год? Ответ дайте в рублях.

Решение. За год вклад увеличился в $74\,100 : 6\,500 = 1{,}14$ раз, то есть на 14%. Так как никаких действий со вкладом не производится, то еще через год имеющаяся сумма опять увеличится на 14%:

$$74\,100 \cdot 1{,}14 = 84\,474.$$

Ответ: 84 474.

$\boxed{3}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{8}\right)^2 + \sqrt{0{,}15} \cdot \sqrt{240} - \left(-4\sqrt{0{,}3}\right)^2.$$

Решение. Выполним дейсвия:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{8})^2 = 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + 8 = 10 - 2 \cdot 4 = 2;$$

$$\sqrt{0{,}15} \cdot \sqrt{240} = \sqrt{0,15 \cdot 240} = \sqrt{36} = 6;$$

$$(-4\sqrt{0{,}3})^2 = 16 \cdot 0{,}3 = 4{,}8.$$

Тогда получим $2 + 6 - 4{,}8 = 3{,}2$.
Ответ: 3,2.

$\boxed{4}$ *(1 балл)* Сумма квадратов корней уравнения

$$2x^2 + 5x + c = 0$$

равна $9\frac{1}{4}$. Найдите c.

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни данного квадратного уравнения. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{2}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Используем формулу квадрата суммы и запишем

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Откуда

$$9\frac{1}{4} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2},$$

$$9\frac{1}{4} - \frac{25}{4} = -c,$$

$$9\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4} = -c,\ 3 = -c,\ c = -3.$$

Ответ: -3.

$\boxed{5}$ *(1 балл)* График линейной функции $y = kx + b$ не пересекается с прямой $y = 4x$, а с прямой MN пересекается в точке, лежащей на оси абсцисс. Найдите b, если $M(-4,\ -1)$ и $N(4,\ 3)$.

Решение. Найдем уравнение прямой MN: $y = k_1x + b_1$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} -1 = -4k_1 + b_1, \\ 3 = 4k_1 + b_1. \end{cases}$$

Получим, что $b_1 = 1, k_1 = \dfrac{1}{2}$. Уравнение прямой MN имеет вид: $y = \dfrac{x}{2} + 1$.

Если график некоторой линейной функции пересекается с MN на оси абсцисс, то абсциссу точки пересечения можно найти из уравнения $0 = \dfrac{x}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad x = -2$.

Если прямая не пересекает прямую $y = 4x$, то она ей параллельна. Значит, уравнение искомой прямой имеет вид: $y = 4x + b$.

Так как эта прямая проходит через точку с координатами $(-2,\ 0)$, то

$$0 = -2 \cdot 4 + b \quad \Rightarrow \quad b = 8.$$

Ответ: 8.

$\boxed{6}$ *(1 балл)* Петя и Коля устроили чемпионат по игре «крестики-нолики». Было проведено 15 партий, причем за победу давалось 4 очка, за ничью — 3, за проигрыш — 1. Сумма очков, набранная обоими мальчиками, оказалась равной 81. Сколько партий было сыграно вничью?

Решение. Пусть x — количество партий, сыгранных вничью. Тогда $15-x$ — количество остальных партий. За ничью мальчики в сумме получали 6 очков. Если в игре кто-то выигрывал, то в сумме они получали 5 очков.

Тогда $6x + 5(15 - x) = 81 \quad \Rightarrow \quad x = 6$.

Ответ: 6.

$\boxed{7}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\frac{\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{9}}{\frac{a}{12}+\frac{b}{18}}$$

при $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на 36. Тогда

$$\frac{9a^2-4b^2}{3a+2b}=\frac{(3a-2b)(3a+2b)}{3a+2b}=3a-2b.$$

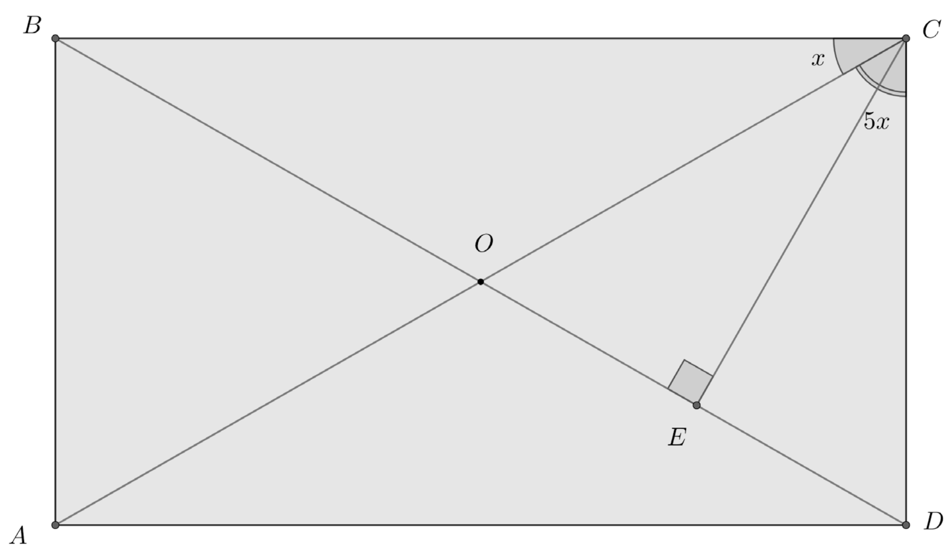
Подставим значения $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$:

$$3\cdot\frac{2}{3}-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2+1=3.$$

Ответ: 3.

$\boxed{8}$ *(1 балл)* Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна 12. Известно, что угол DCA в 5 раз больше угла BCA. Найдите расстояние от точки C до диагонали BD.

Решение. Выполним чертеж.



Обозначим $\angle BCA=x$, $\angle DCA=5x$. Тогда $6x=90^\circ\Rightarrow x=15^\circ$ и $\angle DCA=75^\circ$.

Пусть O – точка пересечения диагоналей. Тогда треугольник COD – равнобедренный, $\angle COD=180^\circ-2\cdot 75^\circ=30^\circ$.

Проведем высоту CE треугольника COD, это и будет искомое расстояние. В прямоугольном треугольнике COE катет CE лежит против угла 30°. Значит,

$$CE=\frac{OC}{2}=\frac{AC}{4}=3.$$

Высота CE и есть искомое расстояние от точки C до диагонали BD.

Ответ: 3.

$\boxed{9}$ *(1 балл)* Черепаха и ежик начали двигаться одновременно навстречу друг другу. Они встретились через 50 мин после начала своего движения. Сколько времени (в часах) потребовалось бы черепахе на весь путь, если известно, что ежик проделал бы этот путь на 4 ч быстрее черепахи?

Решение. Пусть t — время (в часах), которое черепаха потратила на весь путь. Тогда $t-4$ — время, потраченное ежом. Обозначим через S исходное расстояние между животными (в км). Тогда $\frac{S}{t}, \frac{S}{t-4}$ — скорости черепахи и ежа соответственно (в км/ч).

Так как встреча состоялась через 50 мин $= \frac{5}{6}$ ч, то

$$S = \left(\frac{S}{t} + \frac{S}{t-4}\right) \cdot \frac{5}{6}.$$

Разделим обе части равенства на $S \neq 0$.

$$\frac{6}{5} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t-4} \Rightarrow 3t^2 - 17t + 10 = 0, t \neq 0, t \neq 4.$$

Получаем, что $t = 5$ или $t = \frac{2}{3}$. Второе значение t не подходит, так как разность $t-4$ в этом случае будет отрицательной.

Ответ: 5.

$\boxed{10}$ *(1,5 балла)* Вася нашел наименьшее натуральное число X такое, что произведение всех натуральных чисел от 1 до X делится на 2022. Какое число нашел Вася?

Решение. Разложим число 2022 на простые множители:

$$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337.$$

Так как 337 — простое число, то среди чисел от 1 до X должно быть хотя бы одно число, кратное 337. Минимальное подходящее значение $X = 337$.

Среди чисел от 1 до 337 есть числа 2, 3. Значит, произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 337$ будет делиться на 2, 3, 337.

Ответ: 337.

Вступительные испытания 2-го этапа в 9-й класс

Задания по **математике 2024 демо**
Выполните задания (20 баллов)

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(3 балла)* Решите уравнение

$$4(2x^2+x)(x-2)=(x^2+1)^2.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(3 балла)* Андрей написал на доске натуральное четырехзначное число, последняя цифра которого ненулевая. Боря написал на доске число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Вася вычел из первого числа второе и получил 2277. Найдите наименьшее возможное число, которое мог написать Андрей.

$\boxed{\mathbf{3}}$ *(4 балла)* На заводе резервуар наполняют из двух кранов. Из первого крана поступает 77%-ный раствор соли, а из второго — 32%-ный раствор соли. Первый кран наполняет резервуар за 25 мин, а второй — за 15 мин. Начальник смены открыл сначала первый кран. Через сколько минут ему надо открыть второй кран, чтобы к моменту наполнения резервуара в нем получился 50%-ный раствор соли?

$\boxed{\mathbf{4}}$ *(5 баллов)* Дан остроугольный треугольник ABC, в котором провели высоту BH. Пусть K и L — основания перпендикуляров из точки H на стороны AB и CB соответственно. Известно, что $\angle BKC = 70^\circ$. Найдите градусную меру угла ALH.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *(5 баллов)* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x+3}{x-2}+\frac{2a^2-3a+5}{x^2-5x+6}=\frac{3a+1}{x-3}$$

имеет ровно одно решение.

$\boxed{1}$ *(3 балла)* Решите уравнение

$$4(2x^2+x)(x-2)=(x^2+1)^2.$$

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду

$$4(2x+1)(x^2-2x)=(x^2+1)^2$$

и сделаем замену: $a=2x+1$, $b=x^2-2x$. Тогда уравнение примет вид: $4ab=(a+b)^2$, откуда $(a-b)^2=0$. Получаем $x^2-4x-1=0$, откуда $x=2\pm\sqrt{5}$.

Ответ: $x=2\pm\sqrt{5}$.

$\boxed{2}$ *(3 балла)* Андрей написал на доске натуральное четырехзначное число, последняя цифра которого ненулевая. Боря написал на доске число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Вася вычел из первого числа второе и получил 2277. Найдите наименьшее возможное число, которое мог написать Андрей.

Решение. Представим число $\overline{abcd}$ в виде

$$1000a+100b+10c+d,$$

где a,b,c,d — целые числа такие, что

$$1\le a\le 9,\qquad 1\le d\le 9,\qquad 0\le b\le 9,\qquad 0\le c\le 9.$$

Тогда получим:

$$1000a+100b+10c+d-1000d-100c-10b-a=2277,$$
$$999(a-d)+90(b-c)=2277,$$
$$111(a-d)+10(b-c)=253.$$

Заметим, что $a-d$ при делении на 10 дает остаток 3.

Поскольку a и d — цифры, то $a-d=3$. Так как $d\neq 0$ и данное число наименьшее, то $a=4$, $d=1$. Тогда $b-c=-8$. Так как b, c — цифры и данное число наименьшее, $b=0$, $c=8$.

Следовательно, данное число 4081.

Ответ: 4081.

$\boxed{3}$ *(4 балла)* На заводе резервуар наполняют из двух кранов. Из первого крана поступает 77%-ный раствор соли, а из второго — 32%-ный раствор соли. Первый кран наполняет резервуар за 25 мин, а второй — за 15 мин. Начальник смены открыл сначала первый кран. Через сколько минут ему надо открыть второй кран, чтобы к моменту наполнения резервуара в нем получился 50%-ный раствор соли?

Решение. 1. Пусть x — часть объема резервуара, заполняемая первым краном (в наполненном резервуаре), а y — часть объема резервуара, заполняемая вторым краном. При этом $x+y=1$. Далее заполняем таблицу:

	Часть объема	%	Соль
1-й кран	x	77%	$0{,}77x$
2-й кран	y	32%	$0{,}32y$
Оба крана	$x+y$	50%	$0{,}77x+0{,}32y$

Из последней строки получаем, что

$$0{,}5(x+y)=0{,}77x+0{,}32y \;\; \Rightarrow \;\; \frac{x}{y}=\frac{2}{3}.$$

Поскольку $x+y=1$, то $x=\dfrac{2}{5}$ и $y=\dfrac{3}{5}$.

2. Пусть t_1 — время работы 1-го крана (мин), а t_2 — время работы 2-го крана (мин). Тогда

$$\frac{t_1}{25}=\frac{2}{5} \;\; \Rightarrow \;\; t_1=10\,(\text{мин});\;\; \frac{t_2}{15}=\frac{3}{5} \;\; \Rightarrow \;\; t_2=9\,(\text{мин}).$$

Поэтому второй кран нужно открыть через $10-9=1$ мин.

Ответ: через 1 мин.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *(5 баллов)* Дан остроугольный треугольник ABC, в котором провели высоту BH. Пусть K и L — основания перпендикуляров из точки H на стороны AB и CB соответственно. Известно, что $\angle BKC=70^\circ$. Найдите градусную меру угла ALH.

Решение. Заметим, что четырехугольник $HKBL$ вписанный, так как сумма противоположных углов HKB и HLB равна 180°. Тогда углы KLB и KHB равны — как вписанные, опирающиеся на одну дугу, а угол KHB равен углу KAH (поскольку они оба дополняют угол KBH до 90°). Значит, $\angle KAH=\angle KLB$. Тогда сумма углов KLC и KAH равна 180°, поэтому четырехугольник $AKLC$ вписанный. Углы AKC и ALC равны — как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Получается, что углы AKC и ALC равны 110° и угол ALH равен 20°.

Ответ: 20°.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *(5 баллов)* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x+3}{x-2}+\frac{2a^2-3a+5}{x^2-5x+6}=\frac{3a+1}{x-3}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

$$\frac{(x+3)(x-3)+2a^2-3a+5-(3a+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}=0,$$

$$\frac{x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2}{(x-2)(x-3)}=0.$$

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2=0,\\ (x-2)(x-3)\neq 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения системы равен:

$$D=(3a+1)^2-4(2a^2+3a-2)=(a-3)^2.$$

Найдем корни квадратного уравнения системы:

$$x_1=\frac{3a+1+a-3}{2}=2a-1, \quad x_2=\frac{3a+1-a+3}{2}=a+2.$$

Заметим, что при $a=3$ эти корни совпадают: $x_1=x_2=5$, при этом $(5-2)(5-3)\neq 0$. Значит, $x=5$ — единственное решение системы, а следовательно, и исходного уравнения.

Далее, при $a\neq 3$ исходное уравнение имеет ровно один корень, если $x_1\in\{2,\,3\}$ и $x_2\notin\{2,\,3\}$ либо $x_1\notin\{2,\,3\}$ и $x_2\in\{2,\,3\}$.

В силу того, что $a \neq 3$ и, следовательно, $x_1 \neq x_2$, остается рассмотреть следующие случаи:

$$\begin{cases} 2a - 1 = 2, \\ a + 2 \neq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 1 = 3, \\ a + 2 \neq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 1 \neq 3, \\ a + 2 = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 1 \neq 2, \\ a + 2 = 3, \end{cases}$$

Решив все четыре системы, получим $a \in \left\{0;\ 1;\ \dfrac{3}{2};\ 2\right\}$.

Ответ: $a \in \left\{0;\ 1;\ \dfrac{3}{2};\ 2;\ 3\right\}$.

Задачи для подготовки

1. Тождественные преобразования и вычисления

$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ \forall a, b > 0:$

1 $a^0 = 1.$

2 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$

3 $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$

4 $(a^x)^y = a^{xy}.$

5 $(ab)^x = a^x b^x.$

6 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}.$

7 $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}.$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$

8 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$

9 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

10 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

11 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$

12 $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$

13 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$

14 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$

$\forall a, b \geq 0:$

15 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$

16 $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0.$

17 $(\sqrt{a})^2 = a$ при $a \geq 0.$

18 $\sqrt{a^2} = |a|$ при любых $a \in \mathbb{R}.$

19 $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

20 Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$