

Предисловие

Пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта и программы по алгебре для 8 класса общеобразовательной школы. В сборник включены задачи по всем разделам алгебры, изучаемым в 8 классе средней школы. Содержит более 450 задач трех уровней сложности. В уровень А включены простые задачи, предназначенные для отработки элементарных навыков решения задач. В уровне В представлены базовые задачи, соответствующие обязательному уровню программы. В уровень С входят задачи повышенной сложности, олимпиадные и конкурсные задачи. Как правило, представлены парные задачи, позволяющие отрабатывать пройденный материал в школе и закреплять его дома. В конце пособия приведены ответы, к наиболее сложным задачам даны и методические указания.

Все задачи данного сборника сгруппированы по темам:

I. Рациональные дроби.

1. Рациональные дроби и их свойства.
2. Сумма и разность дробей.
3. Произведение и частное дробей.

II. Квадратные корни.

4. Действительные числа.
5. Арифметический квадратный корень.
6. Свойства арифметического квадратного корня.
7. Применение свойств арифметического квадратного корня.

III. Квадратные уравнения.

8. Квадратное уравнение и его корни.
9. Дробные рациональные уравнения.

IV. Неравенства.

10. Числовые неравенства и их свойства.
11. Неравенства с одной переменной и их системы.

V. Степень с целым показателем. Элементы статистики.

12. Степень с целым показателем и ее свойства.
13. Элементы статистики.

Задачник предназначен для учеников и учителей общеобразовательных и профильных школ. Наличие в пособии задач разного уровня сложности позволяет использовать его для классной и домашней работы, проведения самостоятельных, контрольных и зачетных работ, подготовки к олимпиадам и ОГЭ. Сборник задач апробирован в общеобразовательных классах и в классах с углубленным изучением математики.

I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

1. Рациональные дроби и их свойства

Уровень А

1. Определите, при каких значениях переменной не имеет смысла дробь:

а) $\frac{3a}{a-2}$;

д) $\frac{2x^3+5}{(2x+3)(3x-8)}$;

б) $\frac{a+1}{2a+7}$;

е) $\frac{y^2-16}{(y+4)(2y-11)}$;

в) $\frac{3b^2}{b^2-4}$;

ж) $\frac{c^2-12}{(3c-5)(2c+9)}$;

г) $\frac{d^2-9}{(d-3)(d+4)}$;

з) $\frac{z^3-8}{z(z+3)}$.

2. Найдите все значения переменной, при которых определено выражение:

а) $x + \frac{2x-3}{x+1}$;

г) $\frac{5x+1}{x(2x+3)} - \frac{7}{x(x-1)}$;

б) $\frac{3x}{x-2} + \frac{6}{2-x}$;

д) $\frac{17}{y} + \frac{25y-2}{y+3}$;

в) $\frac{x^2-4}{12} - \frac{3x}{5}$;

е) $\frac{y^2-9}{11} + \frac{2y^3+16}{15}$.

3. Найдите все значения переменной, при которых значение дроби равно 0:

а) $\frac{2x+8}{3x-5}$;

в) $\frac{x(x+1)}{x^2-1}$;

д) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-9}$;

б) $\frac{3x-6}{x^2-12}$;

г) $\frac{x^2-5x}{x^2}$;

е) $\frac{x^2+7x}{x^2-3x}$.

4. Найдите значение дроби при заданных значениях переменных:

а) $\frac{2x+3y}{x^2}$ при $x=2, y=4$;

в) $\frac{3x+2}{x^2-5x}$ при $x=1$;

б) $\frac{x^2-5}{2y+1}$ при $x=4, y=2$;

г) $\frac{x(y^2+1)}{x+y^2}$ при $x=5, y=2$.

5. Является ли заданное равенство тождеством при всех допустимых значениях переменных:

а) $\frac{5a}{2a+3b} = \frac{5ac}{2ac+3bc}$;

в) $\frac{7ab+3}{11cd+3} = \frac{7ab}{11cd}$;

б) $\frac{2a^2+3b}{5a^2+3b} = \frac{2+3b}{5+3b}$;

г) $\frac{7a^2+a}{a^3b+3ab^2} = \frac{7a+1}{a^2b+3b^2}$?

6. Сократите дробь:

а) $\frac{15x^2y}{10x^3y^2}$;

в) $\frac{36a^5c^2}{48a^4c^5}$;

д) $\frac{-35a^5b^3}{49a^7b^2}$;

б) $\frac{12ab^3}{84b^7}$;

г) $\frac{27a^2x^3}{63ax^5}$;

е) $\frac{28x^{11}y^9}{35x^7y^{15}}$.

7. Сократите дробь и укажите, при каких значениях переменных это возможно:

а) $\frac{2x^2 - 4xy}{6xy^2 - 3x^2y}$;

в) $\frac{a^3 - 4a}{ab^2 + 2b^2}$;

б) $\frac{(3x + 2)(y - 1)}{(2x - 5)(y^2 - 1)}$;

г) $\frac{(a^2 - 9)(b + 7)}{(a - 3)(b^3 - 49b)}$.

8. Представьте частное в виде дроби и сократите ее:

а) $25a^2x^{11} : (45a^5x^7)$;

в) $33b^4z^8 : (24b^2z^{17})$;

б) $72y^{15}x^9z^7 : (162y^{17}x^{15})$;

г) $54a^7b^{12}c^5 : (42a^3b^{15}c^3)$.

9. Приведите заданные дроби к знаменателю $36a^3x^5y^2$:

а) $\frac{5ax^2}{3x^3y^2}$;

б) $\frac{7y^3}{12a^2x^3}$;

в) $\frac{84x^{12}y^4}{14a^3x^{17}y^6}$;

г) $\frac{32a^2xy^3}{72a^5x^4y^5}$.

10. Приведите заданные пары алгебраических дробей к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{2x}{3ax^2y^3}$ и $\frac{4ax^2}{20x^4y^5}$;

в) $\frac{ay^2}{9x^3y^7}$ и $\frac{2a^3x^2y}{36x^5y^6}$;

б) $\frac{3ab^2}{5b^3c^5}$ и $\frac{2ac^3}{45b^7c^9}$;

г) $\frac{b^2c}{24b^3c^5}$ и $\frac{3bc^2}{72b^4c^7}$.

11. Определите наименьший общий знаменатель заданных дробей:

а) $\frac{5}{12mn^2}$ и $\frac{7m^2}{4m^5n}$;

в) $\frac{3x^2 - 6x}{5x^2 - 20}$ и $\frac{5x + 1}{40x^2 + 8x}$;

б) $\frac{3mx}{14m^3x^5}$ и $\frac{2x^5}{7mx^9}$;

г) $\frac{2x^3 + 4x^2}{x^7 - 4x^5}$ и $\frac{3x}{4x^2 - 8x}$.

12. Сократите дробь:

а) $\frac{(2a - 5)^2}{(a + 1)(5 - 2a)^3}$;

д) $\frac{(3 - 3a)^2}{(9a^2 + 9)(a - 1)^3}$;

б) $\frac{a^2 - 6a + 9}{(a - 3)^2(a + 2)}$;

е) $\frac{b^2 - 36}{4b + 24}$;

в) $\frac{(b + 3)^4}{(b^2 - 9)(b^2 + 6b + 9)}$;

ж) $\frac{2ac^2 - 4ac}{(6 - 3c)^2 \cdot 4a^2}$;

г) $\frac{3a^2 - 30a + 75}{(9a - 45)(25 - a^2)}$;

з) $\frac{-15b^3d + 45b^2d}{(3b - 9)^3 \cdot 5d^2}$.

13. Постройте график функции:

а) $y = \frac{4 - x^2}{x + 2}$;	д) $y = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$;	и) $y = \frac{x^2 - 1}{ x - 1}$;
б) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$;	е) $y = \frac{x^3 + x^2}{x^2}$;	к) $y = \frac{x^2 - 1}{ x + 1}$;
в) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$;	ж) $y = \frac{x^3 + x}{x}$;	л) $y = \frac{4 - x^2}{ x + 2}$;
г) $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$;	з) $y = \frac{x - x^3}{x}$;	м) $y = \frac{9 - x^2}{ x - 3}$.

Уровень В

14. Определите, при каких значениях переменной не имеет смысла дробь:

а) $\frac{2x + 3}{2 x - 5}$;	г) $\frac{a^2 - 5}{2 - 3a + a(6a - 4)}$;
б) $\frac{x^2 - 4}{ x + 2 \cdot (x^2 - 9)}$;	д) $\frac{3y^2 + y}{y(y + 2) - 3y - 6}$;
в) $\frac{2x^3 - 5}{(x - 1)^2 (2x + 7)}$;	е) $\frac{x^2 + 7x}{x^2 + x }$.

15. Найдите все значения переменной, при которых значение дроби равно 0:

а) $\frac{(x - 2)(x + 3)}{x^2 - 9}$;	г) $\frac{(x + 2 - 3)(x - 5)}{2 - \frac{15}{x + 5}}$;
б) $\frac{x^2 - x }{2x + 2 - 3x(x + 1)}$;	д) $\frac{(x^2 - 2x)(x + 3)}{1 - \frac{2}{x}}$;
в) $\frac{x(3x + 6) - 5(x + 2)}{x^2 - 4}$;	е) $\frac{(x^2 - 9)(x + 1)}{\frac{4}{3 - x} - 1}$.

16. Сократите дробь:

а) $\frac{4a^2b + 2ab + b}{8a^3b^3 - b^3}$;	в) $\frac{a^3 - 8a^2 + 20a - 16}{a^3 - 6a^2 + 12a - 8}$;
б) $\frac{2c^3d^2 + 54d^2}{6d^3(c^2 - 3c + 9)}$;	г) $\frac{1 - 3a + 3a^2 - a^3}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}$.

17. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2^{12} \cdot 3^{15}}{9^7 \cdot 4^7}$;	в) $\frac{36^7 \cdot 49^8}{7^{16} \cdot 81^4 \cdot 2^{13}}$;
б) $\frac{12^{17} \cdot 5^{12}}{25^6 \cdot 9^9 \cdot 8^{11}}$;	г) $\frac{(1 + 2 \cdot 27 + 27^2)^3 \cdot 3^{12}}{49^3 \cdot 36^6 \cdot 17}$.

18. Найдите значение дроби при заданных значениях переменных:

а) $\frac{(9a^2 - 4b^2)(9ab - 6b^2)}{(6a + 4b)(9a^3 - 12a^2b + 4ab^2)}$ при $a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{1}{3}$;

б) $\frac{6x^2 + 10x - (3y - 2)(3x + 5)}{3y - 6y^2 + (2x + 2)(2y - 1)}$ при $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{5}{2}$.

19. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3a + 15b}{0,2a^2 - 5b^2}$, если $a - 5b = 0,4$;

б) $\frac{7a - 14b}{0,125a^2 - 0,5b^2}$, если $a + 2b = 14$;

в) $\frac{2x^3 - 6x + 3y(x^2 - 3)}{4x^2y - 12y}$, если $\frac{x}{y} = 0,5$;

г) $\frac{3x(2y^2 + 5) - 2y^3 - 5y}{4xy^2 + 10x}$, если $\frac{x}{y} = \frac{1}{7}$.

20. Докажите, что заданная функция является линейной:

а) $y = \frac{3x^3 + 4x - 15x^2 - 20}{3x^2 + 4}$;

б) $y = \frac{x^3 + 14x + 2x^2 + 28}{1,5x^2 + 21}$.

21. Сократите дробь ($n \in N$):

а) $\frac{(3^{n+1} + 3^{n-1})^2}{100 \cdot 3^{2n}}$;

б) $\frac{(2^{n+2} + 2^{n-1})^2}{81 \cdot 2^{2n}}$.

22. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то:

а) $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$;

б) $\frac{2a^2 + ab^2 + 3b^2}{2b^2 + b^2c + 3c^2} = \frac{a}{c}$.

Уровень С

23. Сократите дробь:

а) $\frac{a^4 + 4}{a^3 - 2a^2 + 2a}$;

в) $\frac{x^{14} + x^{13} + \dots + x + 1}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x}$;

б) $\frac{b^4 + b^2 + 1}{2b^3 + 2b^2 + 2b}$;

г) $\frac{x^{2013} + x^{2012} + \dots + x^{2008}}{x^{2014} + x^{2012} + x^{2010}}$.

24. Докажите, что значение дроби не зависит от n ($n \in N$):

а) $\frac{5 \cdot 81^n - 10 \cdot 27^n}{3^{3n}(2 - 3^n)}$;

б) $\frac{2(7^n - 5^n)(49^n - 25^n)}{3(7^n + 5^n)(7^{2n} - 2 \cdot 35^n + 5^{2n})}$.

25. Найдите значение выражения при заданном условии:

а) $\frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{5x^2 - y^2}$, если $\frac{x + 2y}{y} = 5$;

б) $\frac{2x^2 + 3y^2}{3x^2 + 2xy - 5y^2}$, если $\frac{2x + 3y}{y} = 9$.

26. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 25}{x + 5} - \frac{4x^2 - 12x + 9}{2x - 3}$;

б) $y = \frac{2x^2 - 32}{x + 4} - \frac{x^2 - 14x + 49}{x - 7}$.

27. Число $\frac{100!}{6^{100}}$ записали в виде несократимой дроби. Найдите ее знаменатель ($100! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100$).

28. Число $\frac{300!}{15^{300}}$ записали в виде несократимой дроби. На какое число сократили дробь?

29. Найдите такие значения a и b , при которых для всех допустимых значений x будет тождественно верным равенство:

а) $\frac{ax^2 + 2x + b}{x + 2} = 3x - 4$;

б) $\frac{ax^2 - x + b}{x - 3} = 2x + 5$.

30. Докажите, что если в дроби $\frac{2x^3 - 3y^3}{3x^3 + 2x^2y - 4xy^2}$ переменные x и y заменить соответственно на kx и ky , то получится дробь, тождественно равная данной ($k \neq 0$). Используя доказанное тождество, найдите значение дроби при:

а) $x = \frac{3}{119}$; $y = \frac{2}{119}$;

б) $x = 126$; $y = 87$.

2. Сумма и разность дробей

Уровень А

31. Выполните действия:

а) $\frac{a}{7} + \frac{2b}{7}$;

ж) $\frac{a+1}{2b} + \frac{3a}{2b}$;

б) $\frac{y+3}{5} + \frac{2y}{5}$;

з) $\frac{x}{y+3} + \frac{2x}{y+3}$;

в) $\frac{x+2a}{9} - \frac{3x-a}{9}$;

и) $\frac{b-2}{c-5} + \frac{b+3}{c-5}$;

г) $\frac{c+d}{3} - \frac{2c-3d}{3}$;

к) $\frac{3x+2}{y-2} - \frac{2x+3}{y-2}$;

д) $\frac{3a}{5} - \frac{2b+1}{5}$;

л) $\frac{2a-5}{3x+1} - \frac{4-a}{3x+1}$;

е) $\frac{a}{2} + \frac{3-2a}{2}$;

м) $\frac{7x}{2y-3} - \frac{2x+1}{2y-3}$.

32. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{3x-a}{6} + \frac{a}{6}$;

г) $\frac{7xy^2 - 5z}{12x^3} + \frac{5z - 3xy^2}{12x^3}$;

б) $\frac{2x+3a}{14} - \frac{3a}{14}$;

д) $\frac{5xy+3y}{15x^2} + \frac{2y}{15x^2}$;

в) $\frac{3y^2+2b}{5y} - \frac{2b}{5y}$;

е) $\frac{9a^2b-5ab}{6ab-12} - \frac{4ab}{6ab-12}$.

33. Упростите выражение:

а) $\frac{2a}{bc} + \frac{3a}{bc}$;

ж) $\frac{5xy + 3}{2x^2} + \frac{7xy - 3}{2x^2}$;

б) $\frac{a-2}{3c} + \frac{4}{3c}$;

з) $\frac{a^2 + 7a}{bc} - \frac{9a + 2a^2}{bc}$;

в) $\frac{p+7}{pq} - \frac{7+2p}{pq}$;

и) $\frac{4}{a^2b} + \frac{3b-4}{a^2b}$;

г) $\frac{x^2 + 4}{3xy} - \frac{4}{3xy}$;

к) $\frac{m^2n - 3}{2mn^2} - \frac{4m^2n - 3}{2mn^2}$;

д) $\frac{5m^3}{2n^2} - \frac{3m^3}{2n^2}$;

л) $\frac{7x^3}{5y^2} + \frac{3x^3}{5y^2}$;

е) $\frac{6b^4}{5ac} - \frac{3b^4 - 2}{5ac}$;

м) $\frac{3ab + 1}{4c} - \frac{2ab}{4c}$.

34. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3a-2}{a^2} + \frac{2-a}{a^2}$ при $a = \frac{1}{7}$;

б) $\frac{2a+3}{4b^2(a-7)} - \frac{17}{4b^2(a-7)}$ при $a = 2$; $b = \frac{1}{3}$;

в) $\frac{3b^2+5a}{4ab^3} + \frac{3a-3b^2}{4ab^3}$ при $a = \frac{1}{7}$; $b = 2$;

г) $\frac{cd^2-3d}{5c^2} - \frac{3cd^2-3d}{5c^2}$ при $c = \frac{1}{5}$; $d = \frac{1}{3}$;

д) $\frac{4xy-5y^2}{2x+y} + \frac{3y^2-8xy}{2x+y}$ при $x = \frac{1}{17}$; $y = \frac{3}{8}$.

35. Упростите выражение:

а) $\frac{a-3}{15a-35} - \frac{1-a}{15a-35} + \frac{a-3}{15a-35}$;

б) $\frac{2b+1}{c(5b-6)} + \frac{7b-3}{c(5b-6)} + \frac{b-10}{c(5b-6)}$;

в) $\frac{2x^2+3}{b(x+7)^2} - \frac{x^2-12x}{b(x+7)^2} + \frac{2x+46}{b(x+7)^2}$;

г) $\frac{3y^2-5y}{a(y-3)^2} - \frac{y^2+4y}{a(y-3)^2} + \frac{18-3y}{a(y-3)^2}$;

д) $\frac{x+3y}{7x-2y} - \frac{3x-y}{7x-2y} - \frac{5x+2y}{7x-2y}$.

36. Преобразуйте выражение, представив его в виде дроби:

а) $\frac{2}{3xy+4} - \frac{xy+3x}{3xy+4} - \frac{2xy-3x}{3xy+4}$;

в) $\frac{3p+7}{p^2-3p} + \frac{4p-5}{p^2-3p} - \frac{2p+2}{p^2-3p}$;

б) $\frac{3a^2}{2a-5} + \frac{a-a^2}{2a-5} + \frac{3a-2a^2}{2a-5}$;

г) $\frac{4p^2-3q}{2q^2+7q} - \frac{p^2+q}{2q^2+7q} + \frac{5q-3p^2}{2q^2+7q}$.

37. Докажите, что значение выражения не зависит от a при всех допустимых значениях переменной и укажите значение выражения:

а) $\frac{3a}{3a-2} - \frac{2}{3a-2}$;

г) $\frac{a^2-5}{9-2a^2} + \frac{a^2-4}{9-2a^2}$;

б) $\frac{7a+1}{5a+3} - \frac{2a-2}{5a+3}$;

д) $\frac{2a+5}{14a-8} - \frac{9a+1}{14a-8}$;

в) $\frac{6+a^2}{3+2a^2} + \frac{3a^2}{3+2a^2}$;

е) $\frac{3a^2+2}{10a^2-5} - \frac{a^2+3}{10a^2-5}$.

38. Представьте дробь в виде суммы или разности дробей:

а) $\frac{3a+2b}{7y}$;

в) $\frac{4ab^2-3ab^3}{5a^3b}$;

д) $\frac{2a+3b^3}{c^2}$;

б) $\frac{5c-3d}{2x}$;

г) $\frac{7x^2+3y^2}{x^2y^2}$;

е) $\frac{4m^2-2n^2}{3p^3}$.

39. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{7}$;

в) $\frac{a^2}{12} - \frac{3a^2}{16}$

д) $\frac{a^2}{3b} + \frac{2a}{9b}$;

б) $\frac{3y}{5} + \frac{2y}{6}$;

г) $\frac{2b^2}{35} + \frac{3b^2}{49}$;

е) $\frac{x}{15y^2} - \frac{2x^2}{9y}$.

40. Выполните действия:

а) $\frac{2x^2}{21y} + \frac{5x^2}{28y}$;

е) $\frac{3x}{27by^3} + \frac{7x}{36b^2y^2}$;

б) $\frac{3ab}{20c^2} - \frac{7ab}{25c^2}$;

ж) $\frac{3b+1}{14a^2b} - \frac{2b-3}{42ab^2}$;

в) $\frac{5a^3}{18bc^2} - \frac{7a^3}{12b^2c}$;

з) $\frac{5x+y}{15x^2y} + \frac{3x-2y}{12xy^2}$;

г) $\frac{2x^3}{15yz} + \frac{3x^2}{25yz^2}$;

и) $\frac{3x^2}{20ab} - \frac{5x^2}{12bc}$;

д) $\frac{5mn^2}{4p^3} - \frac{8mn^2}{9p^3}$;

к) $\frac{y^3}{51bc^2} + \frac{3y^3}{34b^2c}$.

41. Представьте выражение в виде дроби:

а) $x + \frac{x}{3a} - \frac{x}{12a^2}$;

г) $x + 1 + \frac{2x^2}{x-1} + \frac{3}{4x-4}$;

б) $2 + \frac{3}{4x} + \frac{1}{16x^2}$;

д) $2a - \frac{3a}{a^2-2} - \frac{4}{5a^2-10}$;

в) $1 - \frac{2a}{3b^2} - \frac{5}{4b}$;

е) $b - \frac{5b^2}{2b+3} + \frac{3b}{4b+6}$.

42. Упростите выражение:

а) $\frac{3(x^2-1)}{2ax^3} - \frac{3(a^2+1)}{2a^3x}$;

в) $\frac{2}{3x-2} + \frac{3}{2x+3}$;

б) $\frac{a+b}{ab^3} - \frac{a^2-2b}{a^3b^2}$;

г) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x}$;

$$д) \frac{3a}{y-5} - \frac{2a}{y+5};$$

$$з) \frac{2x}{x-3} + \frac{3x}{x+3};$$

$$е) \frac{2c}{b+3} + \frac{c}{b-2};$$

$$и) \frac{b^2}{3c-2} - \frac{2b^2}{c+1};$$

$$ж) \frac{a}{2b+8} - \frac{2a}{3b+12};$$

$$к) \frac{3m}{n(m+2)} - \frac{2n}{m(m+2)}.$$

43. Выполните действия:

$$а) \frac{2}{3x^2} + \frac{1}{6x} - \frac{4}{9x^3};$$

$$г) \frac{a+b}{bc} - \frac{a-b}{ac} + \frac{b-c}{ab};$$

$$б) \frac{x+1}{2x^2} - \frac{3}{4x^3} - \frac{2}{3x};$$

$$д) \frac{5a+3}{ab} - \frac{2a}{b^2} - \frac{3a+3}{ab};$$

$$в) \frac{2a}{a+1} - \frac{3a}{a-1} + \frac{3}{2a-2};$$

$$е) \frac{2m+2}{n(m-2)} + \frac{n-3}{m(m-2)} - \frac{2}{mn}.$$

44. Преобразуйте в дробь выражение:

$$а) \frac{2ax-3}{x^2} - \frac{4}{ax};$$

$$г) \frac{3x}{(x-2)(2x+3)} - \frac{3}{4x+6};$$

$$б) \frac{b-2}{5b^2+3b} - \frac{3b}{10b+6};$$

$$д) \frac{z}{(2z-1)^2} + \frac{3}{2z-1};$$

$$в) \frac{-8m+1}{2m^2-8} - \frac{2m}{m+2};$$

$$е) \frac{2}{x^2-y^2} - \frac{5}{2x^2-2xy}.$$

45. Выполните действия:

$$а) \frac{2a+5}{a^2+6a+9} + \frac{3}{a+3};$$

$$г) \frac{2t+1}{(t-3)(t+2)} - \frac{3}{2t^2-8};$$

$$б) \frac{3a-2}{a^2-9} + \frac{5}{a^2-6a+9};$$

$$д) \frac{t^2-2t-1}{(2t+1)(t^2-3t)} - \frac{t^2+5}{4t^3-t};$$

$$в) \frac{4y+7}{2y^2+16y+32} - \frac{9}{y^2-16};$$

$$е) \frac{x+2}{3x(x-1)(x+3)} + \frac{4}{(1-x)5x}.$$

46. Постройте график функции, неравенства, уравнения:

$$а) y = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3};$$

$$з) y = \frac{x^2-x^3}{x} + x - 1;$$

$$б) y = \frac{(3-x)(x+2)}{x+2};$$

$$и) y \geq \frac{x^3-x^2}{x^2} + 2x;$$

$$в) y = \frac{x^2-5x+6}{x-2};$$

$$к) y \leq \frac{x^3+x^2}{x^2} - 2x;$$

$$г) y = \frac{5x-6-x^2}{x+3};$$

$$л) y \leq \frac{(|x|-1)(x+3)}{x+3};$$

$$д) y = \frac{x^2-x+6}{x-3} + x - 1;$$

$$м) y \geq \frac{(|x|+1)(x-2)}{x-2};$$

$$е) y = \frac{x-6-x^2}{x+2} - x + 1;$$

$$н) |y| = \frac{x^2-4x+3}{x-1};$$

$$ж) y = \frac{x^3-x^2}{x} + x + 1;$$

$$о) |y| = \frac{4x-x^2-3}{x-3}.$$

47. Упростите выражение и найдите его значение при заданных значениях переменных:

а) $\frac{x^2}{y^2 - xy} + \frac{y}{x - y}$ при $x = \frac{2}{7}, y = \frac{5}{7}$;

б) $\frac{a - 81}{9a - 81} - \frac{7a + 9}{9a - a^2}$ при $a = \frac{2}{9}$;

в) $\frac{m}{7n^2 - mn} + \frac{49n}{m^2 - 7mn}$ при $m = \frac{7}{9}, n = \frac{3}{7}$;

г) $\frac{16a}{9b^2 + 4ab} - \frac{81b}{9ab + 4a^2}$ при $a = \frac{3}{16}, b = \frac{4}{9}$.

Уровень В

48. Выполните действия:

а) $\frac{7a - 8b}{4a} - \frac{5a + 7b}{4a} + \frac{3b - 2a}{4a}$;

б) $\frac{9x - 7y}{5x} - \frac{2x - 5y}{5x} - \frac{7x - 12y}{5x}$;

в) $\frac{98m^2 - 5}{36m - 15} + \frac{12 - 40m^2}{15 - 36m} + \frac{6m^2 - 8}{36m - 15}$;

г) $\frac{2p^2 - q^2}{6p^2 - 4pq} - \frac{3p^2 - 2q^2}{4pq - 6p^2} + \frac{4p^2 - q^2}{6p^2 - 4pq}$.

49. Упростите выражение:

а) $\frac{b^2}{a(5b + 7)} + \frac{4b^2 + 3b}{a(5b + 7)} + \frac{4b}{a(5b + 7)}$;

б) $\frac{2c^2}{x^2(5c^2 - 3)} - \frac{7c^4 + 4c^2}{x^2(5c^2 - 3)} + \frac{2c^4 + 5c^2}{x^2(5c^2 - 3)}$;

в) $\frac{5mn + 3n}{11m^3 - 2m^2} + \frac{2mn + 5n}{11m^3 - 2m^2} - \frac{4mn - 10n}{2m^2 - 11m^3}$;

г) $\frac{x^2y + 3x}{5xy^2 + 7y^2} - \frac{4x^2y + 2x}{5xy^2 + 7y^2} - \frac{2x^2y + 7xy + x}{y^2(5x + 7)}$.

50. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{3}{(2x - 1)(x + 5)} - \frac{x + 2}{(1 - 2x)(x + 5)}$;

б) $\frac{4a^2 + b^2}{(2a - b)^2} + \frac{6ab^2 - b^2}{(b - 2a)^2} + \frac{6ab^2 + b^2}{4ab - 4a^2 - b^2}$;

в) $\frac{8y^2 - 3y - 2}{4y^2 - 4y + 1} - \frac{5y + 7}{4y^2 - 4y + 1} + \frac{4y + 9}{(2y - 1)^2}$;

г) $\frac{25x^2}{25x^2 - 9} - \frac{22x + 5}{(3 - 5x)(5x + 3)} - \frac{8x + 4}{9 - 25x^2}$.

51. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3 + a}{2ab - 5b} - \frac{5a - 18}{5b - 2ab}$ при $a = \frac{11}{19}, b = \frac{6}{17}$;

$$\text{б) } \frac{2ac - c}{6ab - 8b} - \frac{abc - 3bc}{8b^2 - 6ab^2} \text{ при } a = \frac{13}{29}, b = \frac{3}{14}, c = \frac{15}{28};$$

$$\text{в) } \frac{4x^2 + x + 7}{8x^3 - 27} - \frac{5x + 2}{27 - 8x^3} \text{ при } x = \frac{12}{7};$$

$$\text{г) } \frac{27y^2 + 11y}{125y^3 - 8} - \frac{48y^2 + 19y + 12}{8 - 125y^3} \text{ при } y = \frac{2}{35}.$$

52. Выполните действие:

$$\text{а) } \frac{2b + 3}{4b^2 - 4b} - \frac{2b - 3}{10b - 10} + \frac{2b + 2}{10b};$$

$$\text{б) } \frac{3x + 2}{x^2 - 10x + 25} - \frac{12}{x^2 - 25} - \frac{3x - 2}{x^2 + 10x + 25};$$

$$\text{в) } \frac{y + 2}{y^2 + 2y + 4} - \frac{1}{y - 2} + \frac{2y^3 + 2y - 8}{y^3 - 8};$$

$$\text{г) } \frac{2b^3 + 6b^2 + 9,5b + 1}{b^3 - 8} + \frac{b^2 + 1}{8 + 4b + 2b^2} + \frac{2b}{2 - b}.$$

53. Докажите тождество:

$$\text{а) } \frac{xyz - x^3}{x^2y} + \frac{xyz - y^3}{y^2z} + \frac{xyz - z^3}{z^2x} = 0;$$

$$\text{б) } \frac{a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a - 2b}{a^2 - b^2} + \frac{2b^2}{(a + b)(a^2 - b^2)} = \frac{2b}{a^2 - b^2}.$$

54. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{a + 5}{a} + \frac{a}{a - 5} + \frac{25}{a^2 - 5a};$$

$$\text{г) } \frac{6n}{9n^2 - 1} - \frac{3n + 1}{9n - 3} + \frac{3n - 1}{6n + 2};$$

$$\text{б) } \frac{3}{2x^2 + 2x} + \frac{2x - 1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x};$$

$$\text{д) } \frac{a}{3x - 5} + \frac{2a}{5a + 10 - 3ax - 6x};$$

$$\text{в) } \frac{2c - 1}{4c + 2} + \frac{2c + 1}{3 - 6c} + \frac{10c - 1}{12c^2 - 3};$$

$$\text{е) } \frac{2b^2 - 3b}{6by - 21y - 4b + 14} + \frac{b}{2 - 3y}.$$

55. Преобразуйте в дробь выражение:

$$\text{а) } \frac{3ab - 2b^2}{9a^2b - 12ab^2 + 4b^3} + \frac{3a^2 + 2ab}{9a^3 + 12a^2b + 4ab^2};$$

$$\text{б) } \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{8x^3 - 4x^2y - 2xy^2 + y^3} - \frac{4x^2 + 4xy + y^2}{8x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - y^3}.$$

56. Замените A таким выражением, чтобы получилось равенство, тождественно верное при любых допустимых значениях переменной:

$$\text{а) } \frac{A}{3 - 2a} + \frac{5a - 3}{3 - 2a} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{A}{4b + 5} - \frac{2b - 7}{4b + 5} = -1.$$

57. Упростите выражение и найдите его значение:

$$\text{а) } \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{1 - x} \text{ при } x = 1,5;$$

$$\text{б) } \frac{2a^2 + 7}{a^2 + 3a + 9} - \frac{a}{3 - a} - \frac{3a^3 - 2a^2 + 19a - 12}{a^3 - 27} \text{ при } a = \frac{14}{5}.$$

58. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{2x-3}{x}; & \text{в) } \frac{a^2+3a+1}{a}; & \text{д) } \frac{x^2-5x+7}{x-3}; \\ \text{б) } \frac{3x-5}{x-2}; & \text{г) } \frac{3y^2-2y+5}{y}; & \text{е) } \frac{2y^2+5y-4}{y+2}. \end{array}$$

Уровень С

59. Докажите, что при любых допустимых значениях переменной выражение принимает только положительные значения:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{x^2-2x-2}{(x-3)^4} - \frac{5x-6}{(x-3)^4} + \frac{x+5}{(x-3)^4}; \\ \text{б) } \frac{27y^3+9y}{3y+2} - \frac{27y^2-42y+16}{9y^2-4} + 6y. \end{array}$$

60. Докажите, что при любых допустимых значениях переменной выражение принимает только отрицательные значения:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{8a-4a^2-2}{(2a-5)^4} - \frac{17-10a}{(2a-5)^4} - \frac{6-2a}{(2a-5)^4}; \\ \text{б) } 2z + \frac{8z^2+6z+1}{4z^2-1} - \frac{8z^3+4z}{2z-1}. \end{array}$$

61. Вычислите значение выражения при заданных условиях:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ если } \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5; \\ \text{б) } \frac{3a+2b}{5a-5b} + \frac{2a-3b}{5a+5b}, \text{ если } \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{2}{11}; \\ \text{в) } \frac{3a^2+3b^2}{a^2-b^2} + \frac{2a^2-2b^2}{a^2+b^2}, \text{ если } \frac{a+2b}{3a-3b} - \frac{b-2a}{3a+3b} = \frac{8}{3}; \\ \text{г) } \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}, \text{ если } xyz = 1. \end{array}$$

62. Докажите тождества:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}; \\ \text{б) } \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}. \end{array}$$

63. Найдите значения a и b , при которых равенства являются тождествами:

$$\text{а) } \frac{2x-25}{(x+5)(x-2)} = \frac{a}{x+5} + \frac{b}{x-2}; \quad \text{б) } \frac{7x+1}{(2x-4)(x+3)} = \frac{a}{2x-4} + \frac{b}{x+3}.$$

64. Найдите все целые значения n , при которых значение дроби является целым числом:

$$\text{а) } \frac{2n^3-7n^2+48}{n^2}; \quad \text{б) } \frac{12n-6}{4n+3}; \quad \text{в) } \frac{n^2-5n+11}{n-2}; \quad \text{г) } \frac{n^2+n-9}{n+3}.$$

3. Произведение и частное дробей

Уровень А

65. Выполните умножение:

а) $\frac{2}{7a} \cdot \frac{ab}{6}$;

в) $\frac{4}{11a} \cdot \frac{3b}{7}$;

д) $\frac{4ax^2}{25b^3} \cdot \frac{7b}{16x^4}$;

б) $\frac{3b}{5a} \cdot \frac{8c}{27}$;

г) $\frac{x^2y}{15z^2} \cdot \frac{3z}{xy^3}$;

е) $\frac{33cy^2}{65x^3} \cdot \frac{52y^3}{55c^2x}$.

66. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{3a}{28b^2} \cdot \frac{16a}{9b^3}$;

в) $\frac{8xy}{45} \cdot \frac{35}{32x^2y^5}$;

д) $\frac{4x}{15y^2} \cdot \frac{3y}{16x^2}$;

б) $\frac{5cd^2}{51x^3} \cdot \frac{34x}{15c^2a}$;

г) $\frac{1}{2az^6} \cdot \frac{36z}{25a^7}$;

е) $\frac{75m^2}{128mn^3} \cdot \frac{32n}{125m^4}$.

67. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $4x^3 \cdot \frac{7a}{48x^5}$;

в) $18m^2n \cdot \frac{4m}{27n^3}$;

д) $\frac{14m^3}{25n^4} \cdot \frac{15n^2}{49m^5}$;

б) $9a^2 \cdot \frac{11a}{25y^5}$;

г) $45z^5 \cdot \frac{3z^2}{20y^3}$;

е) $\frac{5a^7}{36b^5} \cdot \frac{54b^3}{85a^8}$.

68. Возведите дробь в степень:

а) $\left(\frac{2m}{3n^2}\right)^4$;

в) $\left(-\frac{x}{3y^4}\right)^4$;

д) $\left(\frac{2a^3}{5b^6}\right)^3$;

б) $\left(-\frac{ab}{2c^3}\right)^7$;

г) $\left(\frac{3x^2}{2y^6}\right)^3$;

е) $\left(-\frac{3m^5}{4n^3}\right)^3$.

69. Упростите выражение:

а) $\frac{3ab^2}{16c^5} \cdot \frac{15ac^3}{8b^5} \cdot \frac{64b}{27a^5}$;

в) $\frac{21m}{32n^5} \cdot \frac{24n^2}{49m^3} \cdot \frac{14mn}{9n^7}$;

б) $\frac{2x^7}{9y^5} \cdot \frac{54y^2}{5x^9} \cdot \frac{x^3}{8y^7}$;

г) $\frac{az^2}{5y^3} \cdot \frac{15y^2}{32z^4} \cdot \frac{4yz}{3a^2}$.

70. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5a^5}{(a+b)^3} \cdot \frac{2(a+b)^3}{35a^6}$ при $a = \frac{4}{7}$, $b = \frac{3}{19}$;

б) $\frac{4x^2y^3}{(3x+2y)^2} \cdot \frac{9x^2+12xy+4y^2}{30x^3y^2}$ при $x = \frac{8}{15}$, $y = \frac{7}{16}$;

в) $\frac{2mn^5}{9(n+3m)^4} \cdot \frac{7(n+3m)^4}{10m^2n^6}$ при $m = \frac{5}{27}$, $n = \frac{4}{25}$;

г) $\frac{3cx^9}{20y^7} \cdot \frac{28y^6}{9c^2x^9}$ при $c = \frac{7}{15}$, $x = \frac{5}{11}$, $y = \frac{3}{8}$.

71. Выполните деление:

а) $\frac{15a^2b^3}{38c^5} : \frac{45b^6}{76a^3c^4}$;

г) $\frac{4x^{11}}{25y^9} : \frac{8x^7}{35y^{12}}$;

б) $\frac{7m^3n}{36p^7} : \frac{49m^4n^3}{54p^8}$;

д) $\frac{7p^8}{36q^{14}} : \frac{28p^6}{81q^{12}}$;

в) $\frac{3a^9}{16b^7} : \frac{9a^8}{32b^9}$;

е) $\frac{5x^3}{16y^9} : \frac{15x^4}{64y^7}$.

72. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{4x^2}{51y^5} : \frac{8x^3}{17y^6}$;

г) $\frac{8x^3}{11y^5z^7} : \frac{16x^5}{33y^4z^8}$;

б) $\frac{3ab^3}{8c^5} : \frac{9a^3b}{40c^6}$;

д) $\frac{12ax^5}{35b^3y^7} : \frac{36a^3x^4}{49b^4y^5}$;

в) $\frac{5m^7}{27n^8} : \frac{25m^9}{36n^7}$;

е) $\frac{21p^3}{32q^4x^5} : \frac{14p^5}{72q^3x^6}$.

73. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{2ax^5}{9b^7} : \left(-\frac{8a^3x^2}{27b^9} \right)$;

г) $\frac{23a^5b^4}{36y^5} : \frac{69a^4b^7}{72y^8}$;

б) $(-51a^3b^7) : \left(-\frac{34a^5b^3}{25c^6} \right)$;

д) $\frac{12x^5}{85y^4z^7} : \frac{36x^3}{17y^8z^5}$;

в) $4m^2n^3 : \frac{18m^3n^2}{35p^7}$;

е) $\frac{5m^7q^8}{3n^9} : \left(\frac{-10m^8q^9}{9n^{10}} \right)$.

74. Запишите выражение в виде дроби и сократите ее:

а) $(35x^4(4y^2 - 9)) : (42x^5(3 - 2y)^2)$;

г) $(36m^2n^7) : (45m^3n^9)$;

б) $(18x^7y^3) : (-72x^9y^2)$;

д) $(3a^2 - 18a + 27) : (16a^3(a - 3)^2)$;

в) $(4a^5(a^6 - 16)) : (12a^7(4 + a^3))$;

е) $(-27a^3(-b)^8) : (72a^5b^9)$.

75. Упростите выражение:

а) $\frac{3a^2b^3 - 27a^2b}{4b^8} : \frac{5(b - 3)^2}{16a^2b^7}$;

в) $\frac{5x^2y^3}{3x^5 + 2xy^4} : \frac{9x^3y^2}{15x^6 + 10x^2y^4}$;

б) $\frac{2np + 5n^2p^3}{14m^7} : \frac{6 + 15np^2}{-7m^8}$;

г) $\frac{7c^2d^3}{(2d - 5)^2} : \frac{35c^3}{42(5 - 2d)^2}$.

76. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2a^7b^3}{(3a - 4b)^2} : \frac{6a^8b^3}{16b^4 - 24ab + 9a^2}$ при $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{27}{35}$;

б) $\frac{5x^3y^7}{(2y^3 - x^2)^3} : \frac{25x^4y^6}{(2x^2 - 4y^3)^3}$ при $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{9}$;

в) $\frac{3m^2n^5}{2m^4 - 8} : \frac{5m^3n^4}{12 - 3m^4}$ при $m = -\frac{3}{4}$, $n = \frac{7}{9}$;

г) $\frac{21x^3y}{(x - 5y)^4} : \frac{9xy^3}{7(5y - x)^4}$ при $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{1}{2}$.

77. Выполните действия:

$$а) \frac{2x^2}{x^2 - 4} : \frac{3x}{x - 2} + \frac{5x - 1}{3x + 6};$$

$$в) \frac{x + 3y}{x - 3y} \cdot \frac{2x}{x^2 - 9y^2} + \frac{3x}{(x - 3y)^2};$$

$$б) \left(\frac{1}{m} - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{m^2 n}{(n - 2m)^2} + \frac{3m}{2m - n};$$

$$г) \frac{(2 - 5a)^2}{33a^2} : \frac{4 - 10a}{9a} - \frac{4 + a}{55a}.$$

78. Упростите выражение:

$$а) \frac{3a^2}{a^2 - 25} : \frac{2a}{a + 5} + \frac{a - 20}{2a - 10};$$

$$в) \frac{2x + y}{x^2 + 3xy} \cdot \frac{x^2}{10x + 5y} - \frac{2x + 3y}{5x + 15y};$$

$$б) \frac{m + 3n}{4mn^2} \cdot \frac{5m^2 n}{(m + 3n)^2} - \frac{2m - 9n}{4n(m + 3n)};$$

$$г) \frac{2x - 15y}{15x^3 y^2} : \frac{1}{3x^3 y} + \frac{3x - y}{4x^5} \cdot 4x^4.$$

79. Докажите тождество:

$$а) \frac{(5n + 3)(n - 1)}{2(n^2 - 1)} - \frac{6n + 3}{3n + 3} = \frac{1}{2};$$

$$б) \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{x - y}{x + y}\right) \cdot \frac{x - y}{xy} = \frac{2}{x + y};$$

$$в) (2a^2 - 1) \left(\frac{a}{1 - a} + \frac{1 + a}{a}\right) = \frac{a}{1 - a} - \frac{1 + a}{a};$$

$$г) \frac{b + 5}{b^2 + 25} \cdot \left(\frac{b + 5}{b - 5} + \frac{b - 5}{b + 5}\right) = \frac{2}{b - 5}.$$

80. Упростите выражение и найдите его значение:

$$а) \frac{x^2 y}{2x + y} : \frac{2xy^2}{6x + 3y} - \frac{4x^3 y^2}{3x - y} \cdot \frac{3x - y}{2x^2 y^3} \text{ при } x = \frac{3}{7}, y = \frac{5}{7};$$

$$б) \frac{3ab^3}{(2a + 5b)^2} \cdot \frac{(4a + 10b)^2}{3a^2 b^3} + \frac{2ab^2}{a + 3b} : \frac{4a^2 b^2}{(a + 3b) \cdot 5} \text{ при } a = \frac{1}{8}, b = \frac{4}{11};$$

$$в) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{2xy^2}{x + y} - \frac{3x^2}{x - y} \cdot \frac{y - x}{6x^3} \text{ при } x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{4};$$

$$г) \frac{5m + 2n}{2mn^2} \cdot \frac{m^2 n}{5m + 2n} + \frac{3m - n}{3m^2 n^3} : \frac{3m - n}{m^3 n^2} \text{ при } m = \frac{12}{17}, n = \frac{5}{17}.$$

81. Постройте график функции, являющейся обратной пропорциональностью, если известно, что графику принадлежит точка с координатами:

$$а) A\left(\frac{3}{7}; \frac{14}{3}\right); \quad б) A\left(\frac{2}{11}; -\frac{11}{2}\right); \quad в) A\left(\frac{5}{3}; -\frac{6}{5}\right); \quad г) A\left(-\frac{12}{5}; -\frac{5}{4}\right).$$

82. Укажите среди заданных точек те, которые не принадлежат графику данной функции:

$$а) y = \frac{5}{3x}, A\left(\frac{12}{7}; \frac{35}{4}\right), B\left(-\frac{15}{4}; -\frac{4}{9}\right), C\left(\frac{6}{11}; \frac{33}{30}\right);$$

$$б) y = \frac{3}{2x}, A\left(\frac{5}{7}; \frac{14}{15}\right), B\left(-2; -\frac{3}{4}\right), C\left(\frac{7}{4}; \frac{6}{7}\right).$$

Уровень В

83. Выполните умножение:

$$а) \frac{9a^3x^2 - 4a^3}{9x^2 - 12x + 4} \cdot \frac{15x - 10}{27a^2x^2 + 36a^2x + 12a^2};$$

$$б) \frac{(3m - 6)^3}{28m^2n^3} \cdot \frac{7mn^2}{m^2 - 4m + 4};$$

$$в) \frac{x^2 - 2xy - 6y^2 + 3xy}{x^2 + 6xy + 9y^2} \cdot \frac{4x + 12y}{3x^2 - 12xy + 12y^2};$$

$$г) \frac{(2x - 10)^4}{36x^3y^5} \cdot \frac{9x^5 + 90x^4 + 225x^3}{(x^2 - 25)^2(x - 5)^3};$$

$$д) \frac{a^2c^2 - 9c^2}{2a + 10} \cdot \frac{3a + 15}{4ac^2 + 12c^2};$$

$$е) \frac{a^3 - 8}{27a^2b^3} \cdot \frac{9ab^3 + 18b^3}{a^3 + 2a^2 + 4a}.$$

84. Представьте выражение в виде дроби:

$$а) (3a^2)^5 \frac{(2a - 7)^2(a + 1)}{27a^2 + 54a + 27} \cdot \frac{4a^2 - 4}{a^8 \cdot (7 - 2a)^3};$$

$$б) \frac{3m^2 + 12m + 12}{5m^2 - 20} \cdot \frac{35m - 70}{9mn + 18n - 9m - 18};$$

$$в) \left(\frac{2z^2}{3y^5}\right)^4 \cdot \left(\frac{3z - 6}{4z^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{y^2}{2 - z}\right)^3;$$

$$г) \left(-\frac{3c^4}{5d^3}\right)^6 \cdot \left(\frac{25d^2}{-7c^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{35d^3}{27c^3 + 54c^2}\right)^3.$$

85. Упростите выражение:

$$а) \frac{4 - 9x^2}{5x^2 - 15x + 45} \cdot \frac{x^3 - 27}{9x^2 - 12x + 4};$$

$$г) \frac{4x^4 - 1}{6x^3y^2 - 3xy^2} \cdot \frac{2x^2y}{5 + 10x^2};$$

$$б) \frac{ac + bc}{3a^2 - 6ab + 3b^2} \cdot \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2 + 2ab + b^2};$$

$$д) \frac{a^{12} - b^{15}}{2a^{10} - 8b^{14}} \cdot \frac{3a^5 + 6b^7}{7a^8 + 7a^4b^5 + 7b^{10}}.$$

$$в) \frac{8m^3 - 1}{3m^2 - 18m + 27} \cdot \frac{m^2 - 3m}{8m^2 + 4m + 2};$$

86. Выполните деление:

$$а) \frac{(2b - 4)^3}{5ab^2 + 10b^2} : \frac{3b^2 - 12b + 12}{7ab^3 + 14b^3};$$

$$б) \frac{3c^4 - 48}{7a^3c^2 - 28a^3} : \frac{3ac^2 + 12a}{21a^3 + 42a^2};$$

$$в) \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - mn - 5m + 5n} : \frac{m^2 - mn + 5m - 5n}{m^3 - 25m};$$

$$г) \frac{8y^3 + 12y^2 + 6y + 1}{4y^2z - z} : \frac{4y^2 + 4y + 1}{3 - 6y}.$$

87. Преобразуйте в дробь выражение:

$$а) \left(\frac{x^3(x-y)^2}{z^5(z-y)} \right)^3 : \left(\frac{x^2(x-y)}{z^3(y-z)} \right)^6;$$

$$б) \left(-\frac{2m^2+mn}{mn^2-2n^3} \right)^4 : \left(\frac{4m^2+4mn+n^2}{2n-m} \right)^2;$$

$$в) \frac{2p^2-3pq+4p-6q}{(3p-2q)^2(9p^2+12pq+4q^2)} : \frac{(p+2)^2}{(9p^2-4q^2)^2};$$

$$г) \frac{ab+b^3-3a-3b^2}{7a^4-7b^2} : \frac{5a+5b^2}{(2a^2-2b)(3a^2+3b)}.$$

88. Упростите выражение:

$$а) \frac{27a^3-125b^3}{(6a-10b)^2} : \frac{27a^2+45ab+7b^2}{25b^2-9a^2};$$

$$б) \frac{c^6-d^6}{5c^2+10cd+5d^2} : \frac{3c^4+3c^2d^2+3d^4}{c^2+cd-2cd-2d^2};$$

$$в) \left(\frac{m^3(m-2n)}{p^4(m+p)^3} \right)^6 : \left(\frac{m^4(2n-m)}{2p^5(m+p)^3} \right)^5;$$

$$г) \left(\frac{(p^2-4pq+4q^2)^3 p^2}{q^3(p+3q)} \right)^4 : \left(\frac{2p^3(p-2q)^4}{q^4(3p+9q)} \right)^3.$$

89. Выполните действия:

$$а) \frac{x^2-49}{x+5} \cdot \frac{1}{x^2+7x} - \frac{x+7}{x^2-5x};$$

$$б) \left(\frac{3p}{4q^2-6pq} + \frac{2q}{9p^2-6pq} \right) \cdot \frac{6pq}{3p+2q};$$

$$в) \left(\frac{4x^2}{2x-5y} - \frac{8x^3}{4x^2-20xy+25y^2} \right) : \left(\frac{2x}{2x-5y} - \frac{4x^2}{4x^2-25y^2} \right);$$

$$г) \left(\frac{3a}{12ab-4b^2} - \frac{18b}{18a^2-6ab} \right) : \frac{36b^2-9a^2}{12ab^2-36a^2b}.$$

90. Упростите выражение и найдите его значение:

$$а) \left(\frac{x+3}{3x-1} + \frac{x+3}{x+1} \right) : \frac{x^2+3x}{1-3x} + \frac{x^2+3}{x+1} \text{ при } x = \frac{19}{17};$$

$$б) \left(\frac{y-5}{7y-4} - \frac{y-5}{y-4} \right) \cdot \frac{7y-4}{15y-3y^2} + \frac{y^2-14}{4-y} \text{ при } y = -\frac{17}{4};$$

$$в) \left(\frac{2}{6m-n} + \frac{6n}{n^2-36m^2} - \frac{4}{6m+n} \right) : \left(1 + \frac{36m^2+n^2}{36m^2-n^2} \right) \text{ при } m = \frac{5}{42}, n = \frac{1}{11};$$

$$г) \frac{3c-2}{45c^2+60c+20} : \left(\frac{3c}{6c-4} - \frac{9c^2+4}{18c^2-8} - \frac{2}{9c^2+6c} \right) \text{ при } c = \frac{2}{3}.$$

91. Докажите тождество:

$$\text{а) } \frac{a^3 - 8}{a^3 + 8} \cdot \left(3 + \frac{(a+2)^2}{(a-2)^2} \right) : \left(3 + \frac{(a-2)^2}{(a+2)^2} \right) = \frac{a+2}{a-2};$$

$$\text{б) } \left(3(x-y) + \frac{x^3 - y^3}{xy} \right) : \left(\frac{x+y}{xy} - \frac{4}{x+y} \right) = x^2 - y^2.$$

92. Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \left(x + \frac{x}{3} \right) \cdot \frac{3}{x^2};$$

$$\text{д) } y = \frac{x^2 - 4x + 4}{|2 - x|};$$

$$\text{б) } y = \left(\frac{x}{5} - \frac{x}{3} \right) \cdot \frac{15}{x^2};$$

$$\text{е) } y = \frac{x^2 - 6x + 9}{|3 - x|};$$

$$\text{в) } y = \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} + \frac{4x^2 - 6x}{x};$$

$$\text{ж) } y = \frac{x - 3}{x^2 - 3x};$$

$$\text{г) } y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + \frac{3x^2 - 4x}{x};$$

$$\text{з) } y = \frac{x + 2}{x^2 + 2x}.$$

Уровень С

93. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{a^{n+5} \cdot b^{n-3}}{(c^{2n-1})^3} : \frac{a^{n-2} \cdot b^{n+4}}{(c^{3n+1})^2}, \text{ где } n \in N, n \geq 3;$$

$$\text{б) } \frac{(p^n + q^n)^2 - 4p^n q^n}{p^3 + q^3} \cdot \frac{(p^n - q^n)^2 + 4p^n q^n}{(p^{2n} - q^{2n})^2}, \text{ где } n \in N.$$

94. Докажите тождество:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{2a+1} - \frac{3}{8a^3+1} + \frac{3}{4a^2-2a+1} \right) \cdot \left(2a - \frac{4a-1}{2a+1} \right) = 1;$$

$$\text{б) } \frac{m^2 - 2m + 5}{4m - 4} - \frac{m - 4n}{m^2 + 2} \cdot \left(\frac{3m^2}{m^2 - 4mn - m + 4n} - \frac{2m + 2}{m - 4n} \right) = \frac{m - 1}{4};$$

$$\text{в) } \left(\frac{a^2}{b^2} - 2 + \frac{b^2}{a^2} \right) \cdot \frac{a^4 b^4}{ab + b^2} \cdot \frac{\frac{a}{b} - 1 + \frac{b}{a}}{a^3 - 2a^2 b + ab^2} = a^3 + b^3;$$

$$\text{г) } \left(1 + \frac{a-b}{a+b} \right) \left(1 + \frac{b-c}{b+c} \right) \left(1 + \frac{c-a}{a+c} \right) = \left(1 - \frac{a-b}{a+b} \right) \left(1 - \frac{b-c}{b+c} \right) \cdot \left(1 - \frac{c-a}{a+c} \right).$$

95. Докажите тождество $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} = \frac{m}{n(n+m)}$. Используя это тождество, вычислите сумму дробей:

$$\text{а) } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 101};$$

$$\text{б) } \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{96 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 100};$$

$$\text{в) } \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 105};$$

$$\text{г) } \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{92 \cdot 97} + \frac{1}{97 \cdot 102}.$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru