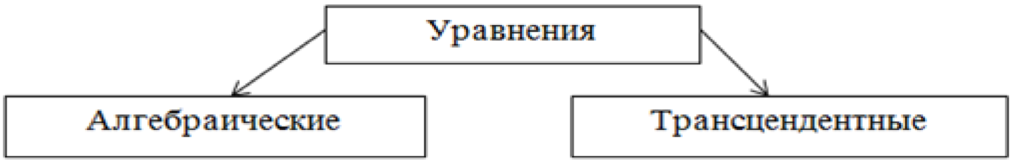
ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Известно, что *уравнением* называется аналитическая запись задачи об отыскании значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны.

Тригонометрическим уравнением называется равенство, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрической функции (одной или нескольких), и справедливое лишь при некоторых значениях неизвестной.

Все уравнения принято делить на две большие группы: алгебраические уравнения и трансцендентные уравнения.



Отличие трансцендентных уравнений от алгебраических состоит, главным образом, в том, что они не могут быть решены с помощью последовательного выполнения ряда арифметических и алгебраических действий над данными, входящими в их состав.

В школьном курсе математики к трансцендентным уравнениям кроме тригонометрических уравнений относят ещё показательные и логарифмические уравнения, которые традиционно изучаются после тригонометрических уравнений.

При решении тригонометрических уравнений часто приходится прибегать к различным соотношениям между тригонометрическими функциями, упрощать их к такому виду, чтобы можно было определить значения одной из тригонометрических функций искомого аргумента. После чего корни тригонометрического уравнения получают с помощью обратных тригонометрических функций.

Таким образом, решение большинства тригонометрических уравнений сопряжено с преобразованием их к простейшему виду с последующим применением известных формул.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения типа $\sin x=a$, $\cos x=a$, $tg\, x=a$, $ctg\, x=a$, где a – некоторое действительное число.

Решать эти уравнения можно разными способами:

1) с помощью единичной тригонометрической окружности;
2) графически;
3) с помощью формулы.

Наиболее распространённым способом решения простейших уравнений является способ, основанный на использовании формул.

Получим формулы для решения простейших тригонометрических уравнений трёх наиболее важных типов $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$.

1.1.1. Уравнение sin x = a

Для решения уравнения $\sin x = a$, отметим сначала на тригонометрической окружности (Рис. 1) все точки с ординатой a, т.е. точки пересечения единичной тригонометрической окружности и прямой $y = a$.

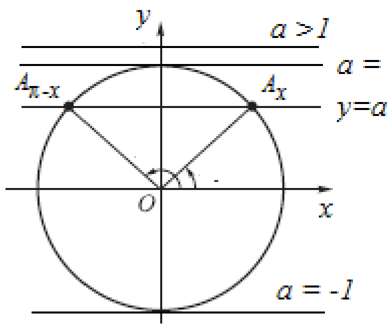


Рис. 1

Исходя из Рис. 1, видим, что при $|a| > 1$окружность и прямая $y = a$ общих точек не имеют, а значит, уравнение решений не имеет.

Если же $|a| = 1$, то прямая $y = a$ касается окружности, т.е. при $a=1$ и $a=-1$ окружность и прямая имеют одну общую точку.

Наконец, если $|a| < 1$, то тригонометрическая окружность и прямая $y = a$ всегда имеют две общие точки, симметричные относительно оси ординат Oy.

При этом надо учитывать, что каждой общей точке тригонометрической окружности с прямой $y = a$ соответствует не одно число x, а бесконечное множество чисел вида $x + 2\pi k$, $k \in Z$.

Очевидно, что все эти числа и будут решениями рассматриваемого уравнения.

Задача теперь состоит в том, чтобы записать эти решения. Поскольку точке A_x соответствует число $\arcsin a$, то одна из серий решений уравнения $\sin x = a$ записывается в виде

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Точка $A_{\pi - x}$ на Рис. 1 соответствует числу $\pi - \arcsin a$, поэтому вторая серия решений этого уравнения может быть записана в виде

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Нередко две полученные серии объединяют в одну, что позволяет сократить запись

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$$

Отметим, что сокращенная запись удобна лишь для записи ответа, для анализа полученного решения предпочтение следует отдавать записи решения в виде совокупности двух серий.

Заметим, что при значениях $n=2k$, $k \in Z$ из сокращенной записи следует первая серия решений, а при значениях $n=2k+1$, $k \in Z$ – вторая серия решений.

Итак, решение уравнения $sin\,x=a$ можно представлять следующим образом:

1) в виде совокупности двух серий точек:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = arcsin\,a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - arcsin\,a + 2\pi k,\ \ k \in Z; \end{array}\right. \qquad (1.1.1)$$

2) в сокращенном виде

$$x = (-1)^n arcsin\,a + \pi n, n \in Z. \qquad (1.1.2)$$

Особо следует сказать об уравнениях $sin\,x=-1$, $sin\,x=0$, $sin\,x=1$. Это так называемые частные случаи простейшего тригонометрического уравнения типа $sin\,x=a$. Сразу скажем, что формулы (1.1.1) и (1.1.2) для этих случаев неприменимы. Для этих уравнений позже мы составим специальную таблицу, в которой будут содержаться решения для всех частных случаев простейших тригонометрических уравнений, содержащих основные тригонометрические функции.

Заметим, что в случае, когда $a \in (-1;0)$ формула (1.1.2) приобретает вид

$$x = (-1)^{n+1} arcsin|a| + \pi n, n \in Z. \qquad (1.1.2^*)$$

Рассмотрим ещё один подход к поиску решений уравнения $sin\,x=a$.

Допустим, что мы нашли какой-либо корень x_1 этого уравнения. Тогда в силу периодичности функции $y=sin\,x$, имеем

$$sin(x_1 + 2\pi k) = sin\,x_1 = a$$

и числа вида $x_1 + 2\pi k$ также удовлетворяют этому уравнению.

Заметим ещё, что

$$sin(\pi - x_1) = sin\,x_1 = a,$$

тем самым, получается, что $\pi - x_1$ также удовлетворяет этому уравнению. Учитывая ранее отмеченное, можно утверждать, что и числа вида $\pi - x_1 + 2\pi k$ также ему удовлетворяют.

Следовательно, зная одно какое-то значение x_1, удовлетворяющее уравнению $sin\,x=a$ можно получить две серии значений аргумента, удовлетворяющих этому же уравнению:

$$x_1 + 2\pi k, k \in Z, \qquad (1.1.3)$$

$$(2k+1)\pi - x_1, k \in Z. \qquad (1.1.4)$$

Если в качестве x_1 взять $arcsin\,a$, то из формул (1.1.3) и (1.1.4) легко получается формула (1.1.1).

1.1.2. Уравнение cos x = a

Для решения уравнения $\cos x = a$, отметим сначала на тригонометрической окружности (Рис. 2) все точки с абсциссой a, т.е. точки пересечения единичной тригонометрической окружности и прямой $x = a$.

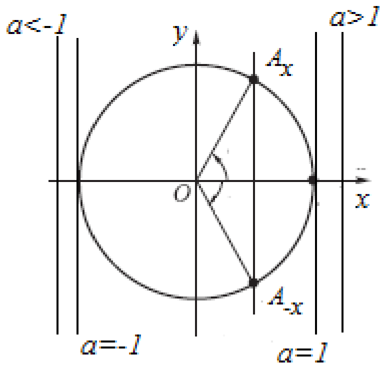


Рис. 2

Исходя из Рис. 2, видим, что при $|a| > 1$ окружность и прямая $x = a$ общих точек не имеют, и, следовательно, уравнение решений не имеет.

Если же $|a| = 1$, то прямая $x = a$ касается окружности, т.е. при $a=1$ и $a=-1$ окружность и прямая имеют одну общую точку.

Наконец, если $|a| < 1$, то тригонометрическая окружность и прямая $x = a$ всегда имеют две общие точки, симметричные относительно оси абсцисс Ox.

При этом здесь, как и в случае уравнения $\sin x = a$, надо учитывать, что каждой общей точке тригонометрической окружности и прямой $x = a$ соответствует не одно число x, а бесконечное множество чисел вида $x + 2\pi k$, $k \in Z$.

Эти числа и будут решениями этого уравнения. Остаётся только правильно записать сами решения.

Поскольку точке A_x на Рис. 2 соответствует число $\arccos a$, то одна из серий решений уравнения $\cos x = a$ записывается в виде

$$x_1 = \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Точка A_{-x} на Рис. 2 симметрична точке A_x относительно оси абсцисс, поэтому вторая серия решений этого уравнения может быть записана в виде

$$x_2 = -\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Нередко две полученные серии объединяют в одну, что позволяет сократить запись

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Итак, решение уравнения $\cos x = a$ можно представлять следующим образом:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (1.1.5)$$

Заметим также, что в случае, когда $a \in (-1;0)$ формула (1.1.5) приобретает вид

$$x = \pm(\pi - \arccos|a|) + 2\pi n, n \in Z. \qquad (1.1.5^*)$$

Также особо следует сказать об уравнениях $cos\,x=-1$, $cos\,x=0$, $cos\,x=1$. Это так называемые частные случаи простейшего тригонометрического уравнения типа $cos\,x=a$. Сразу скажем, что формула (1.1.5) для этих случаев неприменима.

1.1.3. Уравнение tg x = a

Чтобы решить уравнение $tg\,x=a$, отметим сначала на тригонометрической окружности (Рис. 3) все точки, для которых отношение ординаты к абсциссе равно заданному числу a.

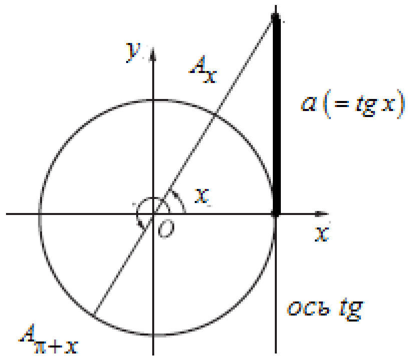


Рис. 3

Таких точек, очевидно, будет две. Они симметричны относительно центра окружности O и лежат на прямой, проходящей через точку O и отсекающей на оси тангенсов отрезок длин a.

Каждой точке соответствует бесконечное множество точек вида $x+2\pi k$, $k \in Z$.

Все эти числа являются решениями данного уравнения.

Поскольку точке A_x на Рис. 3 соответствует число $arc\,tg\,a$, то одна из серий решений уравнения $tg\,x=a$ записывается в виде

$$x_1 = arc\,tga + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Точка $A_{\pi+x}$ на Рис. 3 соответствует числу $arc\,tg\,a+\pi$, поэтому вторая серия решений этого уравнения может быть записана в виде

$$x_2 = \pi + arc\,tga + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Легко заметить, что точка $A_{\pi+x}$ и точка A_x расположены на развернутом угле, которому соответствует радианная мера π. Это позволяет объединить две полученные серии в одну.

Итак, решение уравнения $tg\,x=a$ можно представлять следующим образом:

$$x = arc\,tga + \pi m,\ m \in Z. \qquad (1.1.6)$$

Заметим также, что в случае, когда $a \in (-\infty;-1) \cup (-1;0)$ формула (1.1.6) приобретает вид

$$x = -arc\,tg|a| + \pi m,\ m \in Z. \qquad (1.1.6^*)$$

Также особо следует сказать об уравнениях $tg\,x=-1$, $tg\,x=0$, $tg\,x=1$. Это так называемые частные случаи простейшего тригонометрического уравнения типа $tg\,x=a$. Сразу скажем, что для этих случаев формулой (1.1.6) пользоваться не рекомендуется.

Представим сводку формул, необходимых для решения всех типов простейших тригонометрических уравнений, отразив в ней так называемые *частные случаи*:

a	$\in(-\infty;-1)$	$=-1$	$\in(-1;0)$	$=0$	$\in(0;1)$	$=1$	$\in(1;+\infty)$
$sinx=a$	$\varnothing$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$x=(-1)^{k+1}\cdot arcsin\lvert a\rvert+\pi k$	$x=\pi k$	$x=(-1)^{k}\cdot arcsin a+\pi k$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$\varnothing$
$cosx=a$	$\varnothing$	$x=\pi+2\pi n$	$x=\pm(\pi-arccos\lvert a\rvert)+2\pi k$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\pm arccos\, a+2\pi n$	$x=2\pi n$	$\varnothing$
$tgx=a$	[#]	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi l$	$x=-arctg\lvert a\rvert+\pi l$ [#]	$x=\pi l$	$x=arctga+\pi l$ [*]	$x=\frac{\pi}{4}+\pi l$	[*]
$ctgx=a$	[@]	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi t$	$x=-arcctga+\pi t$ [@]	$x=\frac{\pi}{2}+\pi t$	$x=arcctga+\pi t$ [$]	$x=\frac{\pi}{4}+\pi t$	[$]

Например, требуется решить уравнение $cos\, x=\frac{1}{2}$.

Согласно таблице: $x=\pm arccos\frac{1}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$ или $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Рассмотрим примеры решения простейших тригонометрических уравнений.

Пример 1.1.1. Решить уравнение $2sin4x = -1$.

Решение.

Уравнение легко преобразуется в виду

$$\sin 4x = -\frac{1}{2}.$$

По формуле (1.1.2*) имеем:

$$4x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Откуда

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$$

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$.

Пример 1.1.2. Решить уравнение $tg\frac{x}{2} = 2$.

Решение. Применим формулу (1.1.6):

$$\frac{x}{2} = arctg2 + \pi n, n \in Z.$$

Далее получаем

$$x = 2arctg2 + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = 2arctg2 + 2\pi n, n \in Z$.

Особый интерес представляют простейшие тригонометрические уравнения, в правой части которых содержится не конкретное число, а числовое выражение, содержащее какую-либо тригонометрическую функцию.

Пример 1.1.3. Решите уравнение $sin x = cos 1$.

Решение.

Здесь $a = cos1$. Так как $0 < cos1 < 1$, то уравнение имеет решение, которое можно записать по формуле (1.1.2), т.е. $x = (-1)^n arcsin(cos1) + \pi n, n \in \mathrm{Z}$.

Но так как

$$arcsin(cos1) = arcsin\left(sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 1, \text{ то}$$

$$x = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$$

Пример 1.1.4. Решите уравнение $\cos x=2\cos 6$.

Решение.

Здесь $a=2\cos 6$. Уравнение будет иметь решение, если $\left|2\cos 6\right|\le 1$.

Очевидно, имеет место двойное неравенства $\frac{11\pi}{6}<6<2\pi$. На интервале $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, которому принадлежат точки $\frac{11\pi}{6}$ и 6, функция $y=\cos x$ является монотонно возрастающей, и, следовательно,

$$\cos 6>\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда получаем, что $2\cos 6>2\cos\frac{11\pi}{6}=\sqrt{3}>1$, и поэтому данное уравнение не имеет решения.

§ 1.2. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители

Основными методами, используемыми при решении тригонометрических уравнений (впрочем, как и других типов уравнений), являются:

1) разложение на множители;
2) введение новой переменной (переменных).

В данном параграфе мы рассмотрим только метод разложения на множители.

Если в уравнении, приведенном к виду $f(x)=0$, его левая часть разлагается на множители, т.е. $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$, то следует каждый из этих множителей приравнять к нулю. Получится несколько отдельных уравнений (совокупность уравнений), корни каждого из которых будут корнями исходного уравнения, если только они входят в ОДЗ каждого из множителей левой части уравнения.

Рассмотрим пример, когда учет ОДЗ имеет существенное значение при решении тригонометрического уравнения.

Пример 1.2.1. Решите уравнение $\sin x\cdot \operatorname{ctg} 2x=0$.

Решение.

Так как в левой части уравнения присутствует множитель, содержащий функцию котангенс, которая, как известно, существует не при всех значениях x, то обязательной частью решения является либо нахождение ОДЗ, либо выполнение проверки найденных серий. Мы будем использовать ОДЗ:

$2x \neq \pi n$, т.е. $x \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathrm{Z}$.

Далее получаем совокупность, состоящую из двух простейших тригонометрических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ ctg\, 2x = 0. \end{array}\right.$$

Решая первое из уравнений совокупности, получаем $x = \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. Но полученная серия решений не удовлетворяет ОДЗ, т.к. при $k = \dfrac{n}{2}$ множитель $ctg\, 2x$ теряет смысл.

Далее переходим к решению второго уравнения совокупности. Ясно, $2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. Откуда получаем, что $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}$, $m \in \mathrm{Z}$. Полученная серия решений не противоречит ОДЗ.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}$, $m \in \mathrm{Z}$.

Рассмотрим теперь пример, когда необходимость нахождения ОДЗ не возникает.

<u>Пример 1.2.2</u>. Решите уравнение **1** $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, чтобы в дальнейшем разложить правую часть уравнения с помощью формулы разности квадратов, получим:

$$(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x;$$

$$(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \left(1 + \cos x\right)\left(1 - \cos x\right).$$

Далее перенесём выражение, стоящее в правой части, в левую часть уравнения, чтобы вынести повторяющийся множитель за скобки. Тем самым будет осуществлено разложение на множители. Будем иметь:

$$(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) - \left(1 + \cos x\right)\left(1 - \cos x\right) = 0;$$

$$(1 + \cos x)\left(2\sin x - 1\right) = 0.$$

В итоге получаем совокупность, состоящую из двух простейших тригонометрических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Очевидно, что

$$x_1 = \pi + 2\pi k, k \in Z; \quad x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ. $\pi + 2\pi k, k \in Z; \quad (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

При решении тригонометрических уравнений методом разложения на множители может возникнуть ещё один «чисто методический» нюанс. Он касается правильности оформления записи ответа.

Так как при решении тригонометрических уравнений методом разложения на множители приходится, в конечном счёте, решать совокупность простейших тригонометрических уравнений, то это означает, что после решения всех уравнений совоупности найденные множества решений следует объединить. Объединеняя семейства решений, часто получают более компактную запись ответа.

Объединение решений удобнее всего выполнять с помощью единичной тригонометрической окружности, на которую наносят семейства решений соответсвующей совокупности уравнений.

Рассмотрим на примере, как это надо делать.

<u>Пример 1.2.3.</u> Решите уравнение $\mathbf{2}\,sin\,3x = cos\,2x$.

Решение.

Сначала воспользуемся формулой приведения, с помощью которой функцию косинус преобразуем в синус.

Действительно, так как $cos\,2x = sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$, то исходное уравнение примет вид

$$sin\,3x = sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

Перенося слагаемое в левую часть уравнения, получим возможность воспользоваться формулой разности синусов. Действительно,

$$sin\,3x - sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

или

$$2\,sin\frac{3x - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} \cdot cos\frac{3x + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} = 0.$$

Далее получаем

$$sin\frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot cos\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

После этого получаем совокупность двух тригонометрических уравнений, относящихся к частным случаям (см. стр. 8):

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0. \end{array}\right.$$

Ясно, что

$$\left[\begin{array}{l} \frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi k, k\in Z \\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Далее имеем

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k, k\in Z \\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Построим точки каждой из полученных серий на единичной тригонометрической окружности (см. Рис. 4). Очевидно, что серии x_1 будут соответствовать пять «основных» точек, каждая из которых с учётом периода определяет остальные точки этой серии.

В серию же x_2 входит лишь одна точка, которая с учётом своего периода также определяет все остальные точки этой серии. Но, как мы видим, точки серии $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ явно присутствуют в серии x_1.

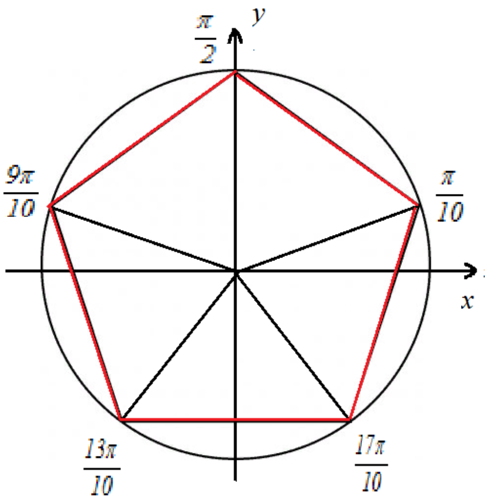


Рис. 4

Таким образом, при объединении серий x_1 и x_2 остается лишь ода серия решений, а именно $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2}{5}\pi k,\, k\in Z.$ Наличие второй серии в ответе можно трактовать как ошибку (методическую неточность).

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2}{5}\pi k,\, k\in Z.$

§ 1.3. Решение тригонометрических уравнений вида $sin(\alpha x)=sin(\beta x)$, $cos(\alpha x)=cos(\beta x)$, $tg(\alpha x)=tg(\beta x)$

Рассмотренный в предыдущем параграфе **<u>Пример 1.2.3</u>** представляет интерес с другой точки зрения.

Его можно воспринимать как уравнение, относящееся к специальной группе уравнений вида $sin(\alpha x)=sin(\beta x)$.

Рассмотрим общий способ решения таких уравнений. Сначала представим его в несколько ином виде

$$sin(\alpha x)-sin(\beta x)=0.$$

Очевидно, что можно применить формулу разности синусов:

$$2\,sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x\right)=0.$$

Откуда получаем

$$sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x\right)=0 \text{ или } cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x\right)=0.$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x=\pi k,\, k\in Z\,; \qquad \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\, n\in Z\,.$$

В итоге получаем формулы:

$$\left[\begin{aligned} x_1&=\frac{2\pi k}{\alpha-\beta},\, k\in Z\\ x_2&=\frac{\pi(2n+1)}{\alpha+\beta},\, n\in Z.\end{aligned}\right. \tag{1.3.1}$$

Знание формул (1.3.1) существенно укорачивает решение уравнений, входящих в рассмотренную группу. Рассмотрим это на примере.

<u>Пример 1.3.1.</u> Решите уравнение $sin\,5x=sin\,3x$.

Решение.

У нас $\alpha=5$, $\beta=3$. Применяя формулы (1.3.1), получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\pi k}{5-3}, k\in Z \\ x_2=\dfrac{\pi(2n+1)}{5+3}, n\in Z. \end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\pi k, k\in Z \\ x_2=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi k, k\in Z, \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z.$

Теоретическое обоснование приведенного метода решения уравнений подобного вида можно осуществить иным способом.

Этот способ основан на использовании соотношений между двумя дугами, имеющими одинаковое значение данной тригонометрической функции.

Теорема 1.3.1. Какова бы ни была система двух действительных чисел (u,v), где $u^2+v^2=1$ существует единственная дуга $0\le\alpha\le 2\pi$ (т.е. в пределах единичной окружности), *косинус* и *синус* которой имеют данные значения u и v, т.е.

$$\cos\alpha=u, \sin\alpha=v. \tag{1.3.2}$$

Доказательство: на плоскости существует единственная точка M с абсциссой u и ординатой v, точка M лежит на единичной окружности т.к. $\rho(O,M)=|OM|=\sqrt{u^2+v^2}=1$. Радиус OM определяет единственный угол α в промежутке от 0 до 2π, для которого *косинус* и *синус* имеют данные значения u и v.

В поле R существует бесконечное множество значений аргументов, удовлетворяющих соотношению (1.3.2), каждое из этих значений отличается от α на слагаемое $2\pi\kappa, \kappa\in Z$.

Следствие. Какова бы ни была система действительных чисел u, v, w, z взятых при условиях $u^2+v^2=1, z=\dfrac{v}{u}, w=\dfrac{u}{v}$, в промежутке от 0 до 2π существует единственное значение аргумента α, при котором

$$\cos\alpha=u, \sin\alpha=v, tg\alpha=z, ctg\alpha=w.$$

Теорема 1.3.2. Необходимым и достаточным условием того что:

1) две дуги u и v имели одинаковый *синус*, т.е. $\sin u=\sin v$ является наличие соотношения: $u=(-1)^n v+\pi n, n\in Z$;

2) две дуги u и v имели одинаковый *косинус,* т.е. $\cos u=\cos v$ является наличие соотношения: $u=\pm v+2\pi k, k\in Z$;

3) дуги u и v, отличные от дуг вида $\frac{2k+1}{2}$, имели одинаковый *тангенс*, является наличие соотношения: $u = v + \pi n, n \in Z$.

<u>Доказательство:</u> докажем только справедливость первого утверждения теоремы.

1) <u>достаточность условия</u>.

Если имеет место соотношение $u = (-1)^n v + \pi n$, то в зависимости от четности или нечетности числа n имеем:

$$sin\, u = sin \begin{cases} v + 2\pi k \\ \pi - v + 2\pi k \end{cases}$$

в обоих случаях $sin\, u = sin\, v$.

2) <u>необходимость условия</u>.

Пусть $sin\, u = sin\, v$. Обозначим через m общее значение синуса двух дуг u и v:

$$sin\, u = m, sin\, v = m .$$

Рассмотрим множество всех дуг, у которых синус равен m:

$$(-1)^n arcsin\, m + \pi n,$$

каждая из дуг u и v:содержится в этом выражении при некотором значении n:

$$\begin{aligned} u &= (-1)^{n1} arcsin\, m + \pi n_1, \\ v &= (-1)^{n2} arcsin\, m + \pi n_2 . \end{aligned} \qquad (1.3.3)$$

Если числа n_1 и n_2 одинаковой чётности (т.е. оба чётные или нечётные), то вычтем почленно соотношения (1.3.3):

$$u - v = (n_1 - n_2)\pi = 2\pi k.$$

Если же числа n_1 и n_2 различной чётности, то сложим почленно соотношения (1.3.3):

$$u + v = (n_1 + n_2)\pi = (2k+1)\pi.$$

Итак, если дуги u и v имеют одинаковые значения синуса, то либо их разность равна целому числу периодов $2\pi k$, либо их сумма равна нечётному числу полупериодов $(2k+1)\pi$.

Следовательно,

$$u = \begin{cases} v + 2\pi k \\ -v + (2k+1)\pi \end{cases} = (-1)^n v + \pi n.$$

Перейдём теперь к рассмотрению способа решения тригонометрических уравнений вида $cos(\alpha x) = cos(\beta x)$.

Очевидно, что в таком случае можно применить формулу разности косинусов: