ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие состоит из 6 разделов. В конце каждого раздела приводятся решения типовых примеров, задачи и вопросы для самоконтроля.

В основу изложения раздела «Теория погрешностей» положен учебник профессора Ю.В. Кемница «Теория ошибок измерений», «Недра», Москва, 1967 год. Однако в раздел пришлось внести ряд изменений и дополнений.

Раздел «Теория погрешностей» в настоящее время излагается на основе дисциплин «Теория вероятностей» и «Математическая статистика». Поэтому представляется уместным поместить в начале разделы «Справочные сведения из теории вероятностей» (Раздел I) и «Справочные сведения из математической статистики» (Раздел II). Целый ряд понятий, таких как «математическое ожидание», «дисперсия», «оценка параметра» и прочие, связанных с указанными математическими дисциплинами, вводится без каких-либо дополнительных пояснений или определений.

Объединены разделы «Математическая обработка ряда равноточных результатов измерений» и «Математическая обработка ряда неравноточных результатов измерений», традиционно помещаемых раздельно во всех учебниках по теории погрешностей. При совместном рассмотрении этих разделов равноточные измерения рассматриваются как частный случай неравноточных измерений, и все формулы для этого случая легко вытекают из общего случая.

В предлагаемом учебном пособии свойства случайных погрешностей сформулированы в виде аксиом. Доказательства теорем теории погрешностей результатов геодезических измерений выполнены на базе соответствующих положений математической статистики. Приведены примеры использования методов теории погрешностей и дисперсионного анализа при исследовании геодезических приборов. Уточнены в соответствии с ГОСТами многие определения. Рассмотрены некоторые приемы априорной оценки точности.

Дополнительно введен раздел «Теория погрешностей зависимых результатов измерений» с примерами обработки GPS-измерений и раздел по основополагающим принципам метода наименьших квадратов в применении к уравниванию геодезических сетей и составлению эмпирических формул.

Авторы выражают большую благодарность всем, кто в той или иной форме принял участие в создании настоящего учебного пособия. Прежде всего это заведующий кафедрой геодезии и геоинформатики ГУЗа профессор Владимир Николаевич Баранов и профессор кафедры геодезии и геоинформатики ГУЗа Михаил Исаакович Перский, сделавшие много замечаний и предложений, учет которых значительно повлиял на качество пособия.

***

Александр Борисович Беликов был видным ученым в области геодезии, землеустройства и кадастров, профессором Государственного университета по землеустройству.

Имея огромный опыт преподавания таких дисциплин, как теория вероятностей, математическая статистика и теория погрешностей измерений, А.Б. Беликов решил отразить его в учебном пособии, позволяющем в целом лучше освоить материал данных курсов.

К сожалению, Александр Борисович не успел в полной мере это осуществить. Являясь его учеником, я посчитал своим долгом продолжить эту работу и подготовить учебное пособие к изданию.

Доц., к.т.н. В.В.Симонян

Раздел I . СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Основные понятия

Исходным пунктом построения теории вероятностей как любой теоретической науки являются экспериментальные факты, на основе которых формируются соответствующие абстрактные понятия. Чтобы разобраться в таких фактах, введем некоторые термины и определения.

Будем называть *опытом* любую реализацию некоего фиксированного комплекса условий S, который должен строго повторяться при повторении одного и того же опыта.

Результаты опыта можно характеризовать качественно и количественно.

Качественная характеристика опыта состоит в регистрации какого-нибудь факта. Любой такой факт называется *событием.* При этом говорят, что «событие появилось (произошло)» или «событие не появилось (не произошло)» в результате опыта. Будем обозначать события прописными латинскими буквами A, B, C.

Два события A и B называют *равными* ($A = B$), если осуществление одного из них, неважно, какого, влечет за собой наступление другого.

События A и B называются *несовместными*, если осуществление одного из них, неважно, какого, исключает наступление другого. События A и B будут *совместными*, если осуществление одного из них, неважно какого, не исключает наступление другого.

Событие $\bar{A}$ называется противоположным (дополнительным) событию A, если его осуществление означает неосуществление события A.

Объединением (*суммой*) событий A и B называется событие C, означающее осуществление хотя бы одного из событий A и B. С помощью специального знака объединения $\cup$ можно написать $C = A \cup B$. Объединяться может и большее число событий, например, объединением событий $A_1, A_2, ..., A_n$ будет событие

$$A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Совмещением (*пересечением, произведением*) событий A и B называется событие C, означающее наступление и события A, и события B. С помощью знака совмещения $\cap$ можно написать $C = A \cap B$. Совмещаться может и большее число событий, например, совмещением событий $A_1, A_2, ..., A_n$ будет событие

$$A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Разностью событий A и B называется событие C, означающее, что происходит событие A, но не происходит событие B. Это обычно записывают как $C = A \setminus B$.

Если при испытании событие A должно наступить обязательно, с неизбежностью, то такое событие называют *достоверным.* В противоположном случае, когда событие A при испытании не должно осуществиться, оно называется *невозможным.*

Событие будет *случайным,* если при испытании оно может наступить, но может и не наступить. Ясно, что случайное событие занимает промежуточное положение между событиями достоверным и невозможным.

Анализируя комплекс условий S, осуществляемый при проведении испытаний, можно выделить так называемое *множество* Ω *элементарных исходов* ω. Это множество включает в себя единственно возможные и попарно несовместные элементарные исходы. Например, пусть испытание состоит в фиксации числа очков, выпавших на грани игральной кости. Здесь множество Ω состоит из 6 единственно возможных и несовместимых элементарных исходов, соответствующих граням кости, помеченным в соответствии с цифрами 1, 2, …, 6.

Рассмотрим некоторое случайное событие A, которое при испытании, порождающем множеством элементарных исходов Ω, может наступить лишь в случае, когда реализуется какой-либо элементарный исход ω, принадлежащий подмножеству Ω_A множества $\Omega(\omega \in \Omega_A \subseteq \Omega)$. Например, пусть событие A заключается в выпадении на грани игральной кости четного числа очков. Тогда $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$, и реализация любого из трех элементарных исходов, являющихся элементами этого множества, влечет за собой наступление случайного события A. В подобных случаях случайное событие A можно формально отождествить с множеством Ω_A, т.е. записать, что $A = \Omega_A$.

Если $A = \Omega$, то событие A будет достоверным. Если же $A = \varnothing$, где $\varnothing$ — символ пустого множества, то событие A будет невозможным.

Говорят, что случайное событие A влечет за собой наступление события B, когда A содержится в B, т.е. $A \subseteq B$. Например, пусть событие A есть выпадение на грани игральной кости 2 очков, а событие B — выпадение на грани не менее 4 очков. Тогда $A \subset B$.

1.2. Частость и вероятность случайного события

Пусть при неизмененном комплексе условий S проведена серия из n испытаний и при каждом из них фиксировалось появление или не появление случайного события A. Допустим, что случайное событие A осуществилось при этом m раз. Тогда говорят, что частота этого события равна A, а частость

$$H(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Пусть при неизмененном комплексе условий S осуществлено значительное число таких серий испытаний достаточно большой длины и при этом оказалось, что частости $H(A)$, вычисленные для всех серий испытаний, будут числами, близкими одно к другому. Тогда говорят, что случайное событие A обладает *устойчивой частостью* (или просто *устойчивой частотой*). Число, около которого колеблется устойчивая частость, называется *вероятностью* случайного события A и обозначается через $P(A)$.

Вероятность численно выражает степень объективной возможности наступления случайного события и является абстрактным отражением его устойчивой частоты. Соотношение между $H(A)$ и $P(A)$ аналогично соотношению между физическими объектами и их математическим образом. Например, между физическими точками (прямыми), поставленными или проведенными на доске мелом или на бумаге карандашом, и их абстрактными геометрическими образами — математическими точками (прямыми). Как операции с абстрактными геометрическими образами отражают свойства реального физического пространства, так и операции с вероятностями случайных событий должны отражать свойства устойчивых частот этих случайных событий. Поэтому $H(A)$ часто называют *статической вероятностью* в отличие от близкой к ней величины — математической вероятности $P(A)$.

Из самого определения $H(A)$, задаваемого формулой (1.1), следует, что $0 \leq H(A) \leq 1$. Поэтому и на $P(A)$ целесообразно наложить условие

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{1.2}$$

Если событие достоверно, то при всех испытаниях оно неизбежно осуществится, и потому согласно (1.1) его частость будет равна 1.

Поэтому полагают

$$P(\Omega) = 1. \tag{1.3}$$

Если случайные события A и B несовместные, то при надлежаще исполненной серии испытаний можно подсчитать, что $H(A \cup B) = H(A) + H(B)$. Потому для несовместных случайных событий A и B принимают, что

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.4}$$

Наложенные требования (1.2) — (1.4) на вероятности случайных событий можно рассматривать как систему аксиом, лежащих в основе теории вероятностей.

С помощью приведенных аксиом можно доказать следующие положения.

1. Вероятность случайного события $\bar{A}$, противоположного событию A, равна дополнению $P(A)$ до единицы, т.е.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{1.5}$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.

$$P(\varnothing) = 0. \tag{1.6}$$

3. Вероятность разности событий A и B равна

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B). \tag{1.7}$$

4. Если случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны, то

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.8}$$

5. Если случайные события A и B совместны, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.9}$$

1.3. Классическое определение вероятности

Пусть при данном комплексе условий конечное множество Ω состоит из n равновероятных элементарных исходов ω. Далее положим, что случайное событие A наступает тогда, когда из всех n элементарных исходов реализуется любой из m элементарных исходов, принадлежащих множеству $\Omega_A \subset \Omega$. Элементы множества Ω_A называют элементарными исходами, благоприятствующими наступлению события A. Тогда вероятность наступления события A определится как отношение

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.10}$$

т.е. будет равна отношению числа благоприятствующих элементарных исходов к общему числу единственно возможных равновероятных элементарных исходов.

Например, событие A есть выпадение четной цифры при бросании игральной кости. Если кость представляет собой правильный куб с изотропным распределением массы в его теле, то существует уверенность, что при ее бросании может с одинаковой возможностью выпасть любая из цифр от 1 до 6. Тогда полагаем $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$, $n = 6$, $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$, $m = 3$, и поэтому $P(A) = 1/2$.

Так определялась вероятность случайного события с момента возникновения теории вероятности как науки. В дальнейшем оказалось, что такое определение вероятности недостаточно общее, и потому формула (1.10) не всегда применима. Действительно, решающим этапом в применении этой формулы является анализ комплекса условий, приводящий к выделению множеств Ω и Ω_A.

Однако этот анализ не всегда приводит к желаемым результатам. В примере с игральной костью такое выделение множеств Ω и Ω_A не удастся провести, если распределение масс в ее теле не будет изотропно и центр тяжести кости будет смещен относительно геометрического центра. Несмотря на это, классическое определение вероятности при решении практических задач часто позволяет получать приемлемые результаты.

1.4. Связь между случайными событиями. Условная вероятность

Случайные события A и B называются *независимыми*, если осуществление одного из них никак не повлияет на то, что появится или нет второе; в противном случае они будут *зависимыми.*

Пусть $P(A)$ и $P(B)$ — вероятности осуществления случайных событий A и B, посчитанные еще до испытания; их называют *безусловными.* Если события A и B зависимы и, например, событие A уже произошло, то вероятность наступления события B уже изменится; обозначим ее через $P(B/A)$. Эту вероятность называют *условной,* и обозначение $P(B/A)$ читают так: вероятность события B, рассчитанная при условии, что событие A произошло.

Проводя испытания над зависимыми случайными событиями и вычисляя частости их появления, можно установить закономерности, которые в абстрактной форме найдут отражение в виде формул:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ и } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{1.11}$$

которые и определяют условные вероятности зависимых случайных событий.

Из (1.11) вытекает правило подсчета вероятности совмещения двух зависимых случайных событий:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B). \tag{1.12}$$

Для того чтобы два события A и B были независимы, необходимо и достаточно, чтобы вероятность их совмещения была произведением их безусловных вероятностей, т.е.

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B). \tag{1.13}$$

Условные вероятности обладают следующими свойствами.

1. $0 \le P(A/B) \le 1$.
2. Если A и B несовместны, т.е. $A \cap B = \varnothing$, то $P(A/B) = 0$.
3. $P(\Omega/A) = 1$.
4. $P(A/A) = 1$.
5. Если $B \cap C = \varnothing$, то $P(B \cup C/A) = P(B/A) + P(C/A)$.
6. Если $B \subseteq A$, то $P(A/B) = 1$.

Если случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместимы, а B — некоторое произвольное случайное событие, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A / B\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i / B\right). \quad (1.14)$$

Если совмещаются случайные события, число которых более двух, то формула (1.12) принимает более обобщенный вид

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2) \ldots P(A_n / A_1A_2 \ldots A_{n-1}), \quad (1.15)$$

где под Р $(A_n / A_1A_2 \ldots A_{n-1})$ следует понимать условную вероятность события A_n, вычисленную в предположении, что события $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ уже произошли.

При расчетах вероятностей случайных событий большое значение имеет такая схема.

Пусть A — некоторое случайное событие, $B_1, B_2, ..., B_n$ — попарно несовместимые случайные события, т.е.

$$B_i \cap B_j = \varnothing \; (i, j = 1, 2, ... n; \; i \ne j),$$

такие, что $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, и известны безусловные вероятности $P(B_i)$ и условные вероятности $P(A/B_i)$ ($i = 1, 2, ..., n$). Тогда справедливы следующие две формулы:

формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A/B_i); \quad (1.16)$$

формула Байеса

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}, \; \left(j = 1, \; 2, \; \ldots, \; n\right). \quad (1.17)$$

1.5. Схемы повторения испытаний

Схема Бернулли. Пусть в неизменном комплексе условий S проводится серия из n независимых испытаний и в результате каждого испытания фиксируется появление некоторого случайного события A. При этом положим, что вероятность осуществления события A при каждом отдельном испытании остается неизменной и равной p. Тогда вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит ровно k раз, будет равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1.18}$$

где $q = 1 - p$ — вероятность события $\bar{A}$.

Здесь предполагается, что число испытаний n фиксировано.

При увеличении k от 0 до n вероятность $P_n(k)$ сначала монотонно возрастает, а достигнув некоторого максимального значения $P_n(k_0)$, далее монотонно убывает. Число k_0 называется наивероятнейшим числом наступления случайного события A. Оно может быть найдено с помощью неравенств

$$np - q \le k_0 \le np + q \tag{1.19}$$

как единственное целое число, заключенное в указанных пределах.

Если число испытаний n велико, а вероятность p, наоборот, мала и произведение $\lambda = np$ не мало, но и не велико, то в таком случае может быть использована приближенная формула Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{1.20}$$

Если же число n велико и не мала вероятность p, то можно воспользоваться другим приближением, вытекающим из так называемой локальной теоремы Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k), \tag{1.21}$$

где $\varphi(x_k)$ по заранее вычисленной величине

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \tag{1.22}$$

выбирается из помещенной в Приложении 1 таблицы значений функции

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (1.23)$$

Полиномиальная схема. В схеме испытаний Бернулли при каждом испытании было два возможных исхода: либо событие A наступит, либо, наоборот, не наступит. В рассматриваемой схеме испытаний возможны $r > 2$ исходов B_1 , B_2 , ..., B_r соответственно с вероятностями p_i (i = 1, 2, ..., r), причем

$$p_1+\ p_2+...\,p_r=1. \qquad (1.24)$$

Тогда вероятность того, что при n независимых испытаниях исход B_1 наступит k_1 раз, исход B_2 — k_2 раз, …, исход B_r — k_r раз, причем

$$k_1+\ k_2+...+k_r=n, \qquad (1.25)$$

будет равна

$$P_n\left(k_1,\ k_2,\ldots,\ k_r\right)=\frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \ldots\ k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}. \qquad (1.26)$$

Название рассматриваемой схемы испытаний объясняется тем, что правая часть равенства (1.26) есть общий член разложения n-й степени полинома, стоящего в левой части равенства (1.24). При r = 2 полиномиальная схема обращается в схему Бернулли.

В случае использования формулы (1.26) при больших n приходится вычислять $n!$, что прямым путем затруднительно. Для этого можно воспользоваться приближенной формулой Стирлинга $n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+0,5}e^{-n}$.

Схема Пуассона. Пусть в неизменном комплексе условий S проводится достаточно большая серия испытаний n независимых испытаний. В результате каждого испытания фиксируется, произошло или нет некоторое событие A. Но теперь, в отличие от схемы Бернулли, будем считать, что при каждом испытании вероятность осуществления события A не остается постоянной, а от испытания к испытанию уменьшается в соответствии с формулой

$$p = \frac{\lambda}{n}, \qquad (1.27)$$

где λ — некоторая константа.

Тогда вероятность, что при n испытаниях событие A наступит k раз, будет равна

$$p(k,\ \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ ...). \qquad (1.28)$$

1.6. Примеры решения типовых задач

Пример 1.1

В ящике имеется a синих и b красных шаров. Вычислить вероятность того, что наугад вынутый шар окажется красным.

Решение

Пусть A — событие, состоящее в том, что вынут красный шар. Пространство элементарных исходов состоит из $a+b$ событий, каждое из которых заключается в вытаскивании одного из шаров. Событию A соответствует b благоприятных исходов, следовательно

$$P(A) = \frac{b}{a+b}.$$

Пример 1.2

В партии из n изделий k бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу m изделий ровно l изделий окажется бракованными.

Решение

Число возможных способов выбрать m изделий из n равно C_n^m. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа k бракованных изделий взято ровно l, что можно сделать C_k^l способами, а остальные m—l изделий не бракованные. Они должны быть выбраны из оставшихся n—k стандартных деталей. Число вариантов такого отбора равно C_{n-k}^{m-l}. Общее число благоприятных исходов в этом случае будет равно произведению двух рассмотренных уже вариантов отбора $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$, так как каждому возможному выбору бракованных изделий может соответствовать C_{n-k}^{m-l} вариантов выбора стандартных деталей. Тогда искомая вероятность будет равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу возможных исходов, т.е. верно равенство $p=\dfrac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$.

1.7. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает четное число очков.

1.2. Замок с «секретом» имеет пять дисков, каждый из которых разделен на 6 дисков с нанесенными цифрами от 0 до 5. Замок открывается при определенном положении цифр относительно указателей. Определить вероятность того, что при произвольной установке цифр на дисках относительно указателей замок откроется.

1.3. В партии из 1000 деталей 10 бракованных. Наудачу выбирают 40 деталей. Определить вероятность того, что среди выбранных деталей будет ровно 4 бракованных.

1.4. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета.

1.5. При измерении 20 линий теодолитного хода в 3 из них были допущены грубые промахи. Наудачу выбраны 5 линий. Какова вероятность того, что 2 из них содержат грубые промахи.

1.6. Точка *A* появляется внутри эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Найти вероятность того, что она окажется внутри эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=k^2 \ (|k|<1)$, считая, что вероятность появления точки в некоторой области пропорциональна площади этой области и не зависит от места ее расположения внутри начального эллипса.

1.7. Имеется *2n* невязок в треугольниках сети триангуляции. Все невязки произвольно разбивают на две группы одинакового объема. Найти вероятность того, что две самые большие по абсолютной величине невязки окажутся: а) в одной группе; б) в разных группах. Как проконтролировать правильность вычисления искомых вероятностей?

Вопросы для самопроверки

1. Что называется случайным событием?
2. Какие бывают виды случайных событий?
3. Что такое вероятность случайного события? Каково классическое определение вероятности и в чем его ограниченность?
4. Что называют условной вероятностью?
5. Какой вид имеет формула полной вероятности?
6. Как вычислить вероятность появления ровно k событий при n испытаниях, если вероятность появления этого события в одном испытании равна p?

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Основные понятия. Функция и плотность распределения

Случайной величиной называют такую переменную, значения которой могут меняться в зависимости от случая. Она вполне определена, если, во-первых, известно множество ее возможных значений, или, как часто говорят, множество ее реализаций, во-вторых, известны вероятности, с которыми она принимает свои возможные значения.

Итак, *случайной величиной называют переменную, каждое возможное значение которой появляется с определенной вероятностью.*

Различают два основных вида случайных величин: *случайные дискретные величины*, реализации которых отличаются друг от друга на конечные интервалы, и *случайные непрерывные величины*, реализации которых могут принимать все значения в заданных конечных или бесконечных промежутках.

Пусть случайная величина X дискретна. Тогда ее закон распределения вероятностей может быть задан, например, табл. 2.1.

Таблица 2.1

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

В верхней строке приведены возможные реализации x_i случайной величины X, в нижней — вероятности p_i этих реализаций, причем должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (2.1)$$

В данном случае приведен пример случайной дискретной величины с конечным множеством реализаций. Но существуют случайные дискретные величины с бесконечными, но счетными множествами реализаций. Бесконечное множество считается счетным, если все его элементы можно занумеровать натуральными числами. Уже в этом случае не всегда удается задать случайную величину в виде табл. 2.1, а при случайной непрерывной величине табличный метод ее задания вообще невозможен.

Попытаемся реализовать иной метод задания случайной величины, который мог бы полностью описать любую случайную величину.

Пусть имеется произвольная случайная величина X. Зафиксируем произвольное число x_i и рассмотрим случайное событие A_i, состоящее в том, что случайная величина X примет значение, меньшее фиксированного x_i, т.е. A_i: $X<x_i$. Пусть вероятность этого события равна $F(x_i) = P\,(X<x_i) = p_i$. Разумеется, что при изменении x_i меняется величина $F(x_i)$, т.е. эта величина есть функция от x. Тогда запишем

$$F(x) = P\,(X<x). \qquad (2.2)$$

Назовем выражение (2.2) *функцией распределения вероятностей случайной величины X*, или просто *функцией распределения*. Она представляет собой *вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее фиксированного x*. Геометрически это факт можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что *случайная величина X примет значение левее точки x*.

Такой метод задания случайной величины является универсальным и пригоден для задания случайных величин любого вида.

Функция распределения случайной величины, принимающей значения на интервале (a, b), обладает следующими свойствами.

1. $0 \le F(x) \le 1$, так как ее значения являются вероятностями;

2. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le a; \\ 1 \text{ при } x \ge b. \end{cases}$

3. Свойство монотонного возрастания: $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Пример графика функции распределения дискретной случайной величины приведен на рис. 2.1, *а*, а непрерывной случайной величины — на рис. 2.1, *б*.

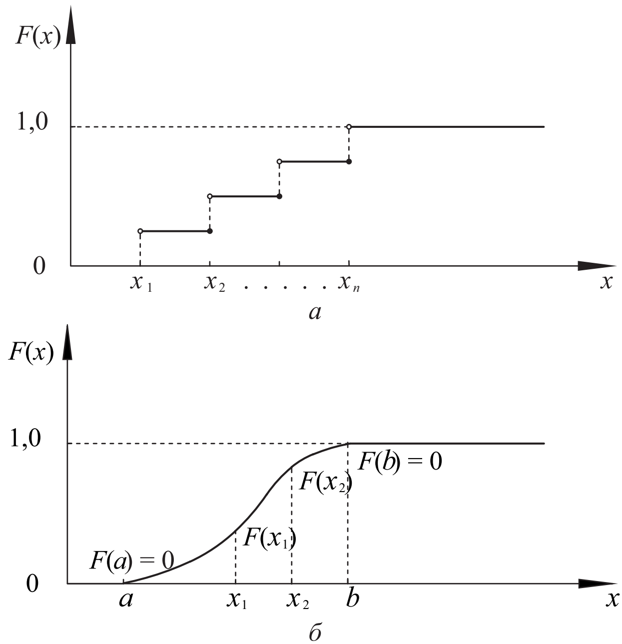

Рис. 2.1

С помощью функции распределения вероятность попадания случайной величины X в некоторый интервал от x_1 до x_2 выражается формулой

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \tag{2.3}$$

из которой, в частности, легко усмотреть, что вероятность попадания случайной непрерывной величины «в точку» равна нулю. Иначе говоря, в отличие от случайной дискретной величины, для случайной непрерывной величины бессмысленый вопрос о вероятности, что она станет равной такому-то числу; эта вероятность всегда равна нулю.

Заметим, что множество возможных реализаций случайной непрерывной величины может быть и всей числовой осью, т.е. $a \to -\infty$; $b \to \infty$.

Если функция распределения $F(x)$ дифференцируема, то ее первая производная $f(x)$, называется *плотностью распределения случайной величины* X. Она также используется для задания закона распределения вероятностей последней. Имеем

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x). \tag{2.4}$$

Как первая производная от $F(x)$, эта функция обладает следующими свойствами:

$$1)\ f(x) \geq 0;\ \ 2) \int_a^b f(x)dx = 1. \tag{2.5}$$

Из первого свойства вытекает, что плотность распределения есть всегда неотрицательная функция; из второго — что площадь под кривой, изображающей эту функцию на графике, равна единице.

В качестве примера рассмотрим кривую, изображенную на рис. 2.2. В данном случае $a = 0$, а $b \to \infty$, т.е. множество реализаций этой величины является все множество неотрицательных действительных чисел.

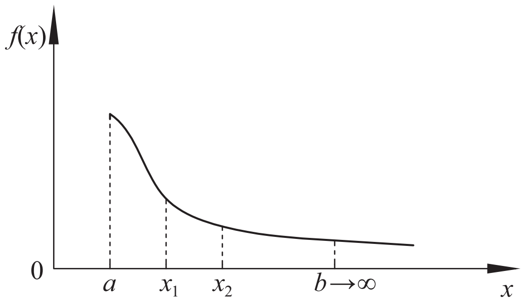

Рис. 2.2

С помощью плотности распределения формуле (2.3) можно придать такой вид