ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой курса «Геометрия Лобачевского» послужили лекции, которые автор неоднократно читал для студентов и магистрантов математического факультета Московского педагогического государственного университета.

Автор поставил своей задачей дать систематическое, достаточно полное и строгое изложение геометрии Лобачевского на основе известных аксиом абсолютной геометрии и аксиомы Лобачевского. Метод изложения элементарно геометрический, синтетический, т. е. тот же, что и при изложении элементарной геометрии Евклида в книгах [1], [4], [11] и др.* В связи с этим в книге практически нет ссылок на проективную геометрию, на теорию групп и другие разделы высшей математики.

Настоящий курс состоит из двух частей. Первая часть посвящена планиметрии Лобачевского, а вторая часть — стереометрии. В последней главе второй части курса дается доказательство логической непротиворечивости трехмерной геометрии Лобачевского, приведены краткие исторические сведения об открытии геометрии Лобачевского и излагаются некоторые философские вопросы, связанные с применением геометрии Лобачевского к реальному пространству. Как первая, так и вторая части учебного пособия снабжены достаточным числом задач для самостоятельного решения (свыше 300 задач). Задачи помещены в конце каждой главы и соответствуют ее материалу. В конце книги даны краткие указания к решению многих задач, а также приложения со списком аксиом абсолютной планиметрии и аксиом стереометрии Лобачевского.

---

* Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы, помещенному на с. 456.

В заключение отметим, что в случае недостатка времени отдельные главы, например главы VI, VII, VIII части I и главы V, VI части II можно опустить без ущерба понимания материала последующих глав. Кроме того, некоторые утверждения и теоремы, которые доказываются сложно (например, содержание § 5, частично § 8, лемма I из § 14 и др.), можно дать без доказательства, опираясь на наглядно интуитивные соображения. Это особенно важно при изучении геометрии Лобачевского учащимися средней школы.

Книга будет полезна студентам физико-математических факультетов университетов и педагогических высших учебных заведений. Она может быть использована учителями и учащимися в классах общеобразовательных учреждений, особенно в школах (классах) с углубленным изучением математики, для проведения факультативных занятий, в работе математических кружков, а также для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими интерес к математике.

ЧАСТЬ I

ПЛАНИМЕТРИЯ

Глава 1

ОБЗОР ОСНОВНЫХ ФАКТОВ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Геометрия Лобачевского (или гиперболическая геометрия) основана на аксиомах абсолютной геометрии и на аксиоме Лобачевского, поэтому все понятия, определения и теоремы абсолютной геометрии имеют место и в геометрии Лобачевского.

В этой главе дан краткий обзор основных определений и следствий из аксиом абсолютной планиметрии, а сами аксиомы абсолютной планиметрии (аксиомы групп I–IV) приведены в приложении (см. с. 322).

§ 1. Обзор основных следствий и аксиом групп I–III абсолютной планиметрии

1. Простейшие фигуры на плоскости. Равенство фигур. Основными понятиями в планиметрии Лобачевского так же, как и в планиметрии Евклида, являются точки и прямые (основные объекты), принадлежность точки прямой, «лежать между» для трех точек одной прямой и наложение (основные отношения). Сформулируем аксиомы группы I, которые характеризуют взаимное расположение точек и прямых, и аксиомы группы II, которые характеризуют свойства понятия «лежать между». Если точка B лежит между точками A и C, то будем писать $A–B–C$. Если точка A не лежит между точками B и C, то будем писать $\overline{A}BC$.

Группа I. **Аксиомы принадлежности.**

I_1. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки*.

* Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три прямые», будем считать, что рассматриваемые точки и прямые различны.

I_2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Группа II. **Аксиомы порядка.**

II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C — три различные точки некоторой прямой и точка B лежит также между точкой C и точкой A.

II_2. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Фигура, состоящая из двух точек A и B и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком*, а точки A и B — его концами.

II_3. Каждая точка O, лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, на которые точка O делит остальные точки данной прямой, называется *лучом*, оба этих луча называются *дополнительными* лучами, а точка O — началом этих лучей.

Если точки A и B не принадлежат прямой a, то будем говорить, что они лежат по одну сторону от прямой a, если прямая a не имеет общих точек с отрезком AB. Обозначим это так: $A, B \mathrel{\ddot{-}} a$. Если точки A и B не принадлежат прямой a, то будем говорить, что они лежат по разные стороны от прямой a, если существует точка X, лежащая на отрезке AB и на прямой a. Обозначим это так: $A, B \div a$.

II_4. Каждая прямая a разделяет множество всех точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на два подмножества так, что любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от прямой a, а любые две точки одного и того же подмножества лежат по одну сторону от прямой a.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, указанных в аксиоме II_4, называется *полуплоскостью*, а прямая a — ее границей.

Пользуясь аксиомами групп I–II (см. приложение, с. 444), вводятся простейшие понятия планиметрии и доказывается ряд утверждений и теорем, которые имеют место как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского. Кроме понятий отрезка, луча, полуплоскости, вводятся понятия угла, внутренней области угла и доказываются утверждения о свойствах этих фигур (см. [1], § 1–4). Не останавливаясь подробно на этом, отметим лишь отдельные важные утверждения и теоремы, которые необходимы для дальнейшего изложения.

1.1°. (Предложение Паша.) Если прямая пересекает отрезок AB и не проходит через точку C, то она пересекает один из отрезков AC или BC и не имеет общих точек с другим отрезком.

Луч, который исходит из вершины неразвернутого угла и содержит хотя бы одну внутреннюю точку, целиком состоит из внутренних точек угла. Такой луч называется *внутренним лучом угла*.

1.2°. Внутренний луч неразвернутого угла пересекает отрезок, концы которого лежат на разных сторонах угла.

Говорят, что угол hk отложен от луча h в полуплоскость λ, если луч h принадлежит границе полуплоскости λ, а луч k — самой полуплоскости.

1.3°. Если углы hk_1 и hk_2 с общей стороной h отложены от этого луча в одну и ту же полуплоскость и лучи k_1 и k_2 не совпадают, то один и только один из лучей k_1 и k_2 является внутренним лучом угла, образованного лучом h и другим лучом.

Понятие равенства фигур в абсолютной геометрии мы вводим с помощью наложения, которое является основным отношением. Наложение — это отображение плоскости в себя. Свойства наложений выражены в аксиомах группы III. Фигура Ф называется *равной* фигуре Ф′, если существует наложение, при котором фигура Ф переходит в фигуру Ф′, т. е. каждая точка фигуры Ф переходит в некоторую точку фигуры Φ' и каждая точка фигуры Φ' имеет прообраз, принадлежащий фигуре Φ. Запись $\Phi = \Phi'$ означает, что фигура Φ равна фигуре Φ'.

Группа III. **Аксиомы наложения.**

III$_1$. Каждая фигура равна самой себе.

III$_2$. Если фигура Φ равна фигуре Φ', то фигура Φ' равна фигуре Φ.

III$_3$. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.

III$_4$. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка $A'B'$, то отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$.

III$_5$. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

III$_6$. Если hk — неразвернутый угол и $\angle hk = \angle h'k'$, то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', а луч k — в луч k'.

III$_7$. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

Из этих аксиом легко вывести ряд важных свойств наложений (см. [1], § 5). Отметим, в частности, что при наложении отрезок, луч, прямая, угол, полуплоскость отображаются соответственно на отрезок, луч, прямую, угол, полуплоскость.

Пользуясь аксиомами группы III, можно доказать следующее утверждение:

1.4°. Любое наложение является преобразованием полуплоскости, при котором три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

Из аксиом наложения непосредственно следует, что отношение равенства фигур является отношением эквивалентности.

2. Сравнение отрезков и углов. Пусть AB и CD — произвольные отрезки. Если на отрезке CD существует такая точка M, что $AB = CM$, то говорят, что отрезок AB меньше отрезка CD или отрезок CD больше отрезка AB, и пишут так: $AB < CD$, или $CD > AB$. Основные свойства сравнения отрезков заключаются в следующем:

а) если $AB < CD$, $CD = EF$ или $AB = CD$, $CD < EF$, то $AB < EF$;
б) если $AB < CD$, $CD < EF$, то $AB < EF$.

Аналогично вводится сравнение углов. Пусть hk и lm — данные неразвернутые углы. Если существует внутренний луч s угла lm, такой, что $\angle hk = \angle ls$, то говорят, что угол hk меньше угла lm или угол lm больше угла hk, и пишут так: $\angle hk < \angle lm$, или $\angle lm > \angle hk$. Если один из углов развернутый, а другой неразвернутый, то считают, что развернутый угол больше неразвернутого.

Основные свойства сравнения углов аналогичны основным свойствам сравнения отрезков:

а) если $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$ или $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$, то $\angle hk < \angle pq$;
б) если $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$, то $\angle hk < \angle pq$.

Свойства сравнения отрезков и углов доказываются на основании групп аксиом I–III (см. [1], § 6).

3. Смежные и вертикальные углы. Прямой угол. Напомним, что два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие стороны являются дополнительными лучами. Два неразвернутых угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются соответственно дополнительными лучами сторон другого угла. Пользуясь аксиомами групп I–III, нетрудно доказать, что если неразвернутые углы равны, то углы, соответственно смежные с ними, равны и что вертикальные углы равны (см. [1], § 7).

Угол называется *прямым*, если он равен одному из углов, смежных с ним. Ясно, что прямой угол равен каждому из своих смежных углов.

Нетрудно доказать, что угол, равный прямому, также является прямым и что любые два прямых угла равны друг другу (см. [1], § 7).

Угол, меньший прямого угла, называется *острым*, а неразвернутый угол, больший прямого угла, — *тупым*. Нетрудно доказать, что угол, смежный с острым углом, является тупым, а угол, смежный с тупым, — острым.

Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными* (или взаимно перпендикулярными), если они при пересечении образуют четыре прямых угла. Сформулируем теорему о перпендикулярных прямых (см. [1], § 8). Этой теоремой и ее следствиями мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем изложении.

Теорема. *Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.*

Следствие 1. *Две прямые, перпендикулярные к одной прямой, не пересекаются.*

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней; отрезок AH, соединяющий точку A с точкой H прямой a, называется *перпендикуляром, проведенным из точки* A *к прямой* a, если $AH \perp a$.

Следствие 2. *Из точки, не лежащей на прямой, можно провести один и только один перпендикуляр к этой прямой.*

§ 2. Треугольники

1. Признаки равенства треугольников. Понятие треугольника и определения элементов треугольника, известные читателю из курса геометрии средней школы, относятся к абсолютной геометрии, поэтому они являются также понятиями геометрии Лобачевского. Все теоремы и утверждения о треугольниках, которые в школьном курсе геометрии доказываются без помощи аксиомы параллельных прямых, т. е. используя только аксиомы абсолютной геометрии, имеют место также в геометрии Лобачевского. К этим теоремам относятся в первую очередь признаки равенства треугольников, в частности прямоугольных треугольников, и теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

Рассмотрим сначала три теоремы, выражающие основные признаки равенства треугольников. Доказательства этих признаков читатель найдет в учебном пособии [1] в главе II.

Теорема 1 (*первый признак равенства треугольников*). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 2 (*второй признак равенства треугольников*). *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 3 (*третий признак равенства треугольников*). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Так же как и в евклидовой геометрии, эти теоремы широко используются в геометрии Лобачевского. Ниже мы сформулируем и докажем еще два признака равенства треугольников в абсолютной геометрии.

2. Теорема о внешнем угле треугольника. Напомним, что прямая называется *секущей* по отношению к двум прямым, если она пересекает их в двух точках. При пересечении прямых AC и BD секущей AB образуются восемь неразвернутых углов, четыре из которых имеют общую вершину A, а другие четыре — общую вершину B. Если $C, D \div AB$, то углы CAB и DBA называются *накрест лежащими углами*. Если $C, D \overset{\cdot\cdot}{-} AB$, E и F — точки, такие, что $E–A–B$, $A–B–F$, то углы ABD и EAC, а также углы BAC и FBD называются *соответственными углами*. При пересечении двух прямых секущей образуются две пары накрест лежащих углов и четыре пары соответственных углов.

Докажем лемму о прямых, которые при пересечении с секущей образуют равные накрест лежащие или равные соответственные углы.

Лемма. *Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны или соответственные углы равны, то данные прямые не пересекаются.*

□ Пусть секущая AB пересекает прямые AC и BD, C, $D \div AB$ и $\angle BAC = \angle ABD$. Докажем, что прямые AC и BD не пересекаются (рис. 1, *а*). Допустим, что это не так, т. е. что прямые AC и BD имеют общую точку. Не нарушая общности, можно предположить, что этой точкой является точка C. Отложим на луче BD отрезок BC' равный отрезку AC (рис. 1, *б*). Треугольники ABC и BAC' равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $\angle ABC = \angle BAC'$. С другой стороны, так как $\angle ABD = \angle BAC$, то углы ABC и BAE, смежные с этими углами, также равны. Здесь AE — продолжение луча AC (см. рис. 1, *б*). Так как C', $E \mathrel{\ddot{-}} AB$, то по аксиоме III_7 лучи AC' и AE совпадают. Это невозможно, так как две прямые AC и BC не могут иметь две общие точки C и C'.

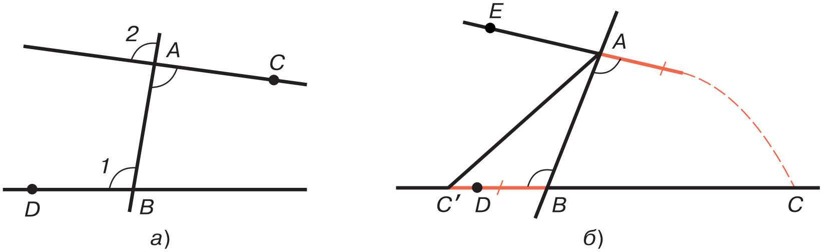

Рис. 1

Если при пересечении прямых AC и BD соответственные углы равны (например, углы 1 и 2 на рис. 1, *а*), то $\angle 2 = \angle BAC$, поэтому $\angle 1 = \angle BAC$, и по доказанному прямые AB и CD не пересекаются. ■

Пользуясь этой леммой, докажем следующую важную теорему абсолютной геометрии о внешнем угле треугольника. Эта теорема играет существенную роль в геометрии Лобачевского.

Теорема 4. *Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.*

□ Рассмотрим треугольник ABC и докажем, например, что $\angle BCD > \angle A$, где D — точка, такая, что $A–C–D$ (рис. 2, *а*).

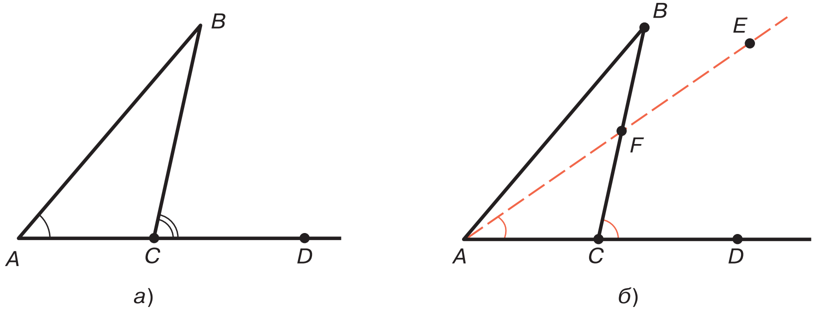

Рис. 2

Так как $\angle A$ и $\angle BCD$ являются соответственными углами при пересечении пересекающихся прямых AB и CB секущей AC, то по доказанной лемме $\angle BCD \neq \angle A$. Поэтому возможны два случая: а) $\angle BCD < \angle A$; б) $\angle BCD > \angle A$. Докажем методом от противного, что случай а) невозможен.

По предположению $\angle A > \angle BCD$, поэтому существует внутренний луч AE угла A, такой, что $\angle BCD = \angle EAC$ (рис. 2, *б*). По свойству 1.2° § 1 луч AE пересекает отрезок BC в некоторой точке F. Прямые AE и CB пересекаются и при пересечении с секущей AC образуют равные односторонние углы FAC и FCD. Этот вывод противоречит предыдущей лемме. Таким образом, $\angle BCD > \angle A$. ■

Следствие. *Если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то два других угла острые.*

□ Пусть в треугольнике ABC угол A прямой или тупой. Тогда смежный с ним угол прямой или острый. Этот угол являете внешним углом треугольника, поэтому углы B и C треугольника ABC острые. ■

3. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Напомним, что треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются боковые сторонами, а третья сторона — основанием равнобедренного треугольника. Равнобедренный треугольник является фигурой абсолютной геометрии и, следовательно, фигурой геометрии Лобачевского.

Следующая теорема о равнобедренном треугольнике доказывается на основе первого и второго признаков равенства треугольников. Ее доказательство читатель может найти в учебном пособии [1], § 10 (теорема 2).

Теорема 5. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.* Обратно: *если в треугольнике два угла равны, то стороны, противолежащие этим углам, равны, т. е. треугольник равнобедренный.*

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника, известная читателю из курса геометрии средней школы, является теоремой абсолютной геометрии.

Теорема 6. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.* Обратно: *против большего угла лежит большая сторона.*

Отрезок PQ называется суммой отрезков AB и CD, если на этом отрезке существует точка M, такая, что $AB = PM$, а $CD = MA$. Нетрудно доказать, что если PQ и $P'Q'$ являются суммами отрезков AB и CD, то $PQ = P'Q'$. Отсюда следует, что сумма двух отрезков AB и CD, которая обозначается через $AB + CD$, определяется с точностью равенства отрезков.

Теорема о неравенстве треугольника также является теоремой абсолютной геометрии.

Теорема 7. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.*

Доказательства теорем 6 и 7 читатель найдет в учебном пособии [1], § 16 (теоремы 1 и 2).

4. Четвертый и пятый признаки равенства треугольников.

Теорема 8 (*четвертый признак равенства треугольников*). *Если два угла и сторона, противолежащая одному из этих углов, одного треугольника соответственно равны двум углам и соответствующей стороне другого, то такие треугольники равны.*

□ Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AB = A_1B_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Принимая во внимание первый признак равенства треугольников, достаточно доказать, что $AC = A_1C_1$. Докажем это равенство методом от противного. Пусть, например, $AC < A_1C_1$. Тогда на отрезке A_1C_1, существует такая точка D_1, что $AC = A_1D_1$. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1D_1$, поэтому $\angle C = \angle B_1D_1A_1$. С другой стороны, по условию $\angle C = \angle C_1$, следовательно, $\angle B_1D_1A_1 = \angle C_1$. Мы пришли к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника: в треугольнике $B_1C_1D_1$ угол C_1, равен внешнему углу при вершине D_1. ■

Замечание. В геометрии Евклида теорема является непосредственным следствием второго признака равенства треугольников и теоремы о сумме углов треугольника. В самом деле, из теоремы о сумме углов треугольника следует, что $\angle B = \angle B_1$, поэтому треугольники ABC и AB_1C равны по стороне и двум прилежащим углам.

Теорема 9 (*пятый признак равенства треугольников*). *Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и угол одного треугольника, лежащий против большей из этих сторон, равен соответствующему углу другого, то такие треугольники равны.*

□ Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и в треугольнике ABC $AB < AC$. Тогда, очевидно, $A_1B_1 < A_1C_1$ (рис. 3). Теорема будет доказана, если мы докажем что $BC = B_1C_1$.

Допустим, что $BC \neq B_1C_1$, например, что $BC < B_1C_1$. Тогда на отрезке B_1C_1 существует такая точка C_2, что

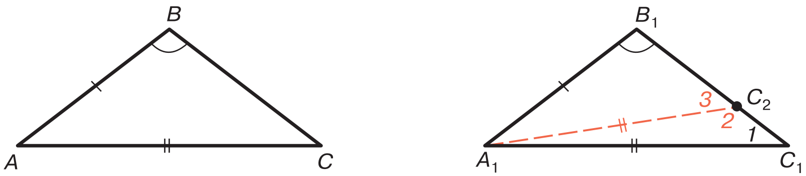

Рис. 3

$BC = B_1C_2$. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_2$, поэтому $AC = A_1C_2$. Отсюда следует, что $A_1C_1 = A_1C_2$, т. е. треугольник $A_1C_1C_2$ равнобедренный, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис. 3). По теореме о внешнем угле треугольника $\angle 3 > \angle 1$ и $\angle 2 > \angle B_1$. Из этих неравенств следует, что $\angle 3 > \angle B_1$.

Применив теорему 6 к треугольнику $A_1B_1C_2$, получим $A_1B_1 > A_1C_2$, но $A_1C_2 = A_1C_1$, поэтому $A_1B_1 > A_1C_1$. Мы пришли к противоречию. ■

5. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Из следствия теоремы 4 о внешнем угле треугольника непосредственно вытекает, что на плоскости Лобачевского, так же как и на евклидовой плоскости, в любом треугольнике либо все три угла острые (остроугольный треугольник), либо один угол прямой, а два других острые (прямоугольный треугольник), либо один угол тупой, а два других острые (тупоугольный треугольник). Из теоремы 6 мы заключаем, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза (т. е. сторона, лежащая против прямого угла) больше любого из его катетов (т. е. двух других его сторон).

Сформулируем теперь признаки равенства прямоугольны треугольников.

Теорема 10. *Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1, равны, если выполняется одно из условий:*

1°. $CA = C_1A_1$, $CB = C_1B_1$.
2°. $CA = C_1A_1$, $\angle A = \angle A_1$.
3°. $CA = C_1A_1$, $\angle B = \angle B_1$.
4°. $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.
5°. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

Эти признаки не требуют особого доказательства, так как они непосредственно следуют из соответствующих признаков равенства треугольников. В самом деле, признаки 1° и 2° следуют из теорем 1 и 2, признаки 3° и 4° — из теоремы 8, а признак 5° — из теоремы 9.

6. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Понятия середины отрезка и биссектрисы угла относятся к абсолютной геометрии, поэтому в геометрии Лобачевского эти понятия вводятся точно так же, как и в евклидовой геометрии.

Серединой отрезка AB называется такая точка C прямой AB, что $AC = CB$. *Биссектрисой* неразвернутого угла hk называется такой внутренний луч l этого угла, что $\angle hl = \angle lk$. Пользуясь признаками равенства треугольников, можно доказать, что каждый отрезок имеет одну и только одну середину, которая лежит на самом отрезке, и каждый неразвернутый угол имеет одну и только одну биссектрису (см. [1], § 11).

Таким образом, учитывая следствие 2 теоремы из § 1 о перпендикулярных прямых, мы приходим к выводу, что понятия медиан, биссектрис и высот треугольника относятся к абсолютной геометрии, поэтому в геометрии Лобачевского они вводятся точно так же, как и в геометрии Евклида. Каждый треугольник имеет три медианы, три биссектрисы и три высоты. Медиана, биссектриса и высота треугольника в геометрии Лобачевского обладают свойствами, которые в ряде случаев существенно отличаются от свойств этих отрезков на плоскости Евклида. В дальнейшем изложении мы подробно рассмотрим эти вопросы.

§ 3. Аксиомы непрерывности. Измерение отрезков и углов

1. Длина отрезка. Понятия длины отрезка и величины угла относятся к абсолютной геометрии, поэтому теория измерения отрезков и углов, известная читателю из курса оснований геометрии, полностью применима и в геометрии Лобачевского. Рассмотрим в обзорном порядке основы этой теории.

Говорят, что введено измерение отрезков, если установлено соответствие между отрезками и положительными числами так, что выполняются условия:

$Д_1$. Равным отрезкам соответствует одно и то же число.

$Д_2$. Если точка B лежит на отрезке AC и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число $a+b$.

$Д_3$. Некоторому произвольно выбранному отрезку PQ соответствует число 1.

Положительное число, указанным образом соответствующее отрезку, называется *длиной этого отрезка*. Отрезок PQ называется *единицей измерения* или единичным отрезком.

2. Аксиомы непрерывности. Существование соответствия, удовлетворяющего условиям $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$, невозможно установить, пользуясь аксиомами групп I–III. Для этого необходимо ввести новую аксиому, в качестве которой мы примем следующую аксиому существования длин отрезков.

IV_1. При произвольно выбранном единичном отрезке PQ существует соответствие, удовлетворяющее условиям $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$.

Пользуясь аксиомами групп I–III и аксиомой IV, можно доказать предложение Архимеда, которое в схеме Гильберта принято как аксиома.

Теорема 1 (***предложение Архимеда***). *Если AB и CD — произвольные отрезки, то на луче AB существует n точек, таких, что $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ и точка B лежит между точками A и A_1* (см. [1], § 14, теорема 1).

Важно отметить, что если выбран единичный отрезок PQ, то существует не более одного соответствия между отрезками и положительными числами, при котором удовлетворяются условия $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$ измерения отрезков (см. [1], § 14, теорема 2).

Длина отрезка зависит от выбора единицы измерения. При переходе от одной единицы измерения к другой длины всех отрезков умножаются на одно и то же число (см. [1], § 14, теорема 3).

Для полного обоснования теории измерения отрезков и углов необходимо принять еще одну аксиому — аксиому существования отрезка данной длины.

IV_2. Для любого положительного числа существует отрезок, длина которого при выбранном единичном отрезке равна данному числу.

Эта аксиома в дальнейшем неоднократно будет использована для доказательства ряда теорем и утверждений геометрии Лобачевского. Отметим, в частности, следующее утверждение абсолютной геометрии о делении отрезка на равные части (см. [1], § 14, теорема 4): на каждом отрезке существуют точки, которые делят его на n равных частей, где n — произвольное натуральное число, $n > 1$.

Аксиомы группы IV, состоящие из двух аксиом IV_1 и IV_2, называются *аксиомами непрерывности*.

Пользуясь аксиомами групп I–IV, можно доказать предложение Дедекинда (см. [2], теорема 50).

Теорема 2 (*предложение Дедекинда*). *Пусть все точки отрезка AB разбиты на два класса K_1 и K_2 так, что выполняются условия:* а) *каждая точка отрезка AB принадлежит одному и только одному из классов K_1 и K_2;* б) $A \in K_1$, $B \in K_2$. *Каждый из классов K_1 и K_2 содержит точки, отличные от A и B;* в) *каждая точка класса K_1, отличная от точки A, лежит между точкой A и любой точкой класса K_2. Тогда существует единственная точка C, лежащая на отрезке AB, такая, что любая точка, лежащая между точками A и C, принадлежит классу K_1, а любая точка, лежащая между точками C и B,— классу K_2.*

Интересно отметить, что аксиомы IV_1 и IV_2 при сохранении аксиом групп I–III эквивалентны предложению Дедекинда.

3. Мера угла. *Мера угла* определяется аналогично длине отрезка. Говорят, что введено измерение углов, если установлено

соответствие между углами и положительными числами так, что выполняются условия:

1. Равным углам соответствует одно и то же число.

2. Если l — внутренний луч* угла hk и углам hl и lk соответствуют числа α и β, то углу hk соответствует число $\alpha+\beta$.

3. Некоторому неразвернутому углу p_0q_0 соответствует число, равное единице.

Положительное число, указанным образом соответствующее данному углу, называется *мерой* этого угла. Угол p_0q_0 называется единицей измерения углов.

Пользуясь аксиомами групп I–IV, можно доказать, что если p_0q_0 — произвольный неразвернутый угол, то существует одно и только одно соответствие, удовлетворяющее условиям 1, 2 и 3 (см. [2], § 27–29).

Имеют место следующие свойства измерения углов:

3.1°. Если при некотором выборе единицы измерения углов прямой угол имеет меру d, то: а) сумма мер любых двух смежных углов равна $2d$; б) мера α любого неразвернутого угла заключена в пределах $0 < \alpha < 2d$, а мера развернутого угла равна $2d$.

3.2°. Каково бы ни было число α, такое, что $0 < \alpha \leqslant 2d$, существует угол, мера которого равна α.

3.3°. Для любого неразвернутого угла существует n лучей, которые делят его на $n+1$ равных частей, где n — любое натуральное число.

Пользуясь свойством 3.2°, вводится градусная мера угла. Для этого за единицу измерения углов принимают угол, который равен $\frac{1}{90}$ части прямого угла. Тогда, очевидно, прямой угол имеет градусную меру 90°, а из свойства 3.1° следует, что: а) сумма градусных мер двух смежных углов равна 180°; б) градусная мера развер-

* Если угол hk развернутый, то l — любой луч, исходящий из вершины угла hk и не совпадающий с лучами h и k.