

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ .....</b>	<b>4</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....</b>	<b>6</b>
1.1. Принятые соглашения .....	6
1.2. Функции Грина для балок.....	6
1.3. Общее уравнение для изгибающих моментов.....	10
1.4. Общее уравнение для поперечных сил .....	10
1.5. Линейные перемещения от изгибающих моментов.....	11
1.6. Угловые перемещения от изгибающих моментов .....	13
1.7. О некоторых свойствах опорных связей балок .....	14
1.8. Замечания по главе 1.....	15
<b>ГЛАВА 2. ФУНКЦИИ ГРИНА</b> <b>ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ БАЛОК.....</b>	<b>17</b>
2.1. Общие замечания .....	17
2.2. Балка на двух опорах.....	18
2.3. Балка консольная с опорой справа.....	19
2.4. Балка консольная с опорой слева .....	20
2.5. Балка на двух опорах с консолями .....	20
2.6. Замечания по главе 2.....	26
<b>ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА.</b> <b>ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ.....</b>	<b>28</b>
3.1. Постановка задачи .....	28
3.2. Применяемые обозначения и пояснения к ним .....	28
3.3. О программных средствах решения прямой задачи.....	30
3.4. Статически определимые балки .....	31
3.5. Статически неопределимые многоопорные балки.....	41
3.6. Замечания по главе 3.....	51
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>52</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>53</b>
Приложение 1. О построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в сопротивлении материалов .....	54
П1.1. Вводные замечания.....	54
П1.2. О внешних и внутренних усилиях .....	54
П1.3. Правила знаков для внешних сил .....	55
П1.4. Правила знаков для внутренних сил.....	55
П1.4.1. Правило знаков для изгибающих моментов .....	56
П1.4.2. Правило знаков для поперечных сил .....	57
П1.5. Пример .....	57
Приложение 2. Алгоритмы поворота кривых .....	60
Приложение 3. Алгоритм для сокращения времени вычислений интегралов с участием распределенной нагрузки .....	63
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>64</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта небольшая книга предназначена для ученых и инженеров-механиков, а также преподавателей, аспирантов и студентов высших *технических* учебных заведений. Ее цель — привлечение внимания к эффективному и ранее не излагавшемуся в курсах «Сопротивление материалов» методу решения задач с помощью функций Грина.

Осмысленные замечания, конструктивная критика, предложения по развитию и запросы на предоставление прилагаемого программного обеспечения принимаются автором по адресу: [vs51@bk.ru](mailto:vs51@bk.ru).

Предложения о сотрудничестве рассматриваются.

## ВВЕДЕНИЕ

В существующих курсах по «Сопротивлению материалов» традиционно большое внимание уделяется изложению основ теории изгиба балок. Это один из основных разделов таких курсов, формирующих профессиональный облик инженера-механика. Практическое применение теории изгиба обычно начинается с анализа внутренних усилий (изгибающих моментов и поперечных сил) в сечениях балки и их перемещений (линейных и угловых) под воздействием известных нагрузок. При этом *каждая* задача такого рода требует составления *своих* уравнений, пригодных *только* для этой задачи. Можно, однако, построить некоторые *общие* уравнения, *одинаковые для всех* возможных задач. Такие уравнения строятся на основе функций Грина. Они полностью меняют существующий порядок решения задач изгиба балок и позволяют быстро и без ошибок получать результат.

В научной литературе функции Грина связывают с именем английского математика Джорджа Грина (George Green, 1793–1841).

В настоящей работе на простых примерах показаны возможности применения функций Грина для решения задач сопротивления материалов. Нам хотелось продемонстрировать простой и хорошо работающий инструмент, который может быть успешно использован в инженерном деле. На наш взгляд, аппарат функций Грина позволяет реализовать эту идею.

Развитие темы применения этих функций в различных задачах сопротивления материалов, строительной механики и прочности находится в начальной стадии. Мы же излагаем здесь лишь малую часть имеющихся у нас наработок по этой теме, стремясь привлечь к ней внимание.

# ГЛАВА 1

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 1.1. Принятые соглашения

1. *Объекты рассмотрения.* Применение функций Грина в сопротивлении материалов рассматривается на примерах различных балок при их работе в условиях поперечного изгиба. Однако все изложенное аналогичным образом можно распространить и на другие расчетные схемы сопротивления материалов и строительной механики.

2. *О внешних силах и внутренних усилиях и правилах знаков для них.* В учебной литературе по сопротивлению материалов нет единого правила. Нам представляется, что в этом вопросе требуется обоснованная определенность. Точка зрения автора по этой теме изложена в Приложении 1 и используется здесь. Мы рекомендуем ознакомиться с этим перед продолжением чтения данной работы.

3. *Правила знаков, применяемые нами для нагрузок и внутренних усилий (изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ ), показаны на рис. 1.1А, 1.1В и 1.1С соответственно.*

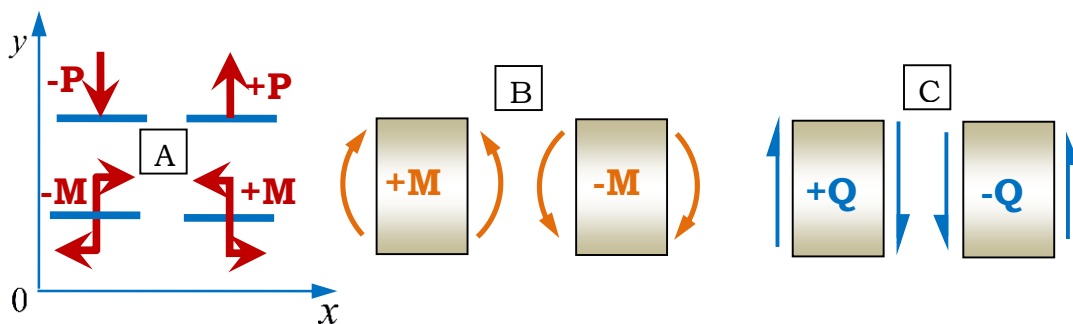


Рис. 1.1

4. Правила знаков для прогибов и углов поворота сечений те же, что и для сосредоточенных нагрузок (рис. 1.1А).

### 1.2. Функции Грина для балок

#### 1. Общие замечания

В настоящее время в научной литературе, применительно к балкам, функции Грина вводятся посредством решения дифференциального уравнения  $EIy^{(IV)} \approx q(x)$  с учетом граничных условий [1], [2]. При этом представляемые результаты, на наш взгляд, не доведены до уровня практического применения, а изложение темы выполняется на языке, более близком математикам, чем инженерам.

Для инженерных применений нам представляется более удобным альтернативное построение функций Грина при помощи интеграла Мора. При таком подходе нужные и полезные результаты получаются просто и на языке, хорошо знакомом инженерам, изучавшим курс «Сопротивление материалов». В этом состоит как сама суть предлагаемой здесь концепции автора, так и ее научная новизна.

## 2. О построении обозначений функций Грина

Начнем с рассмотрения простого примера, показанного на рис. 1.2.

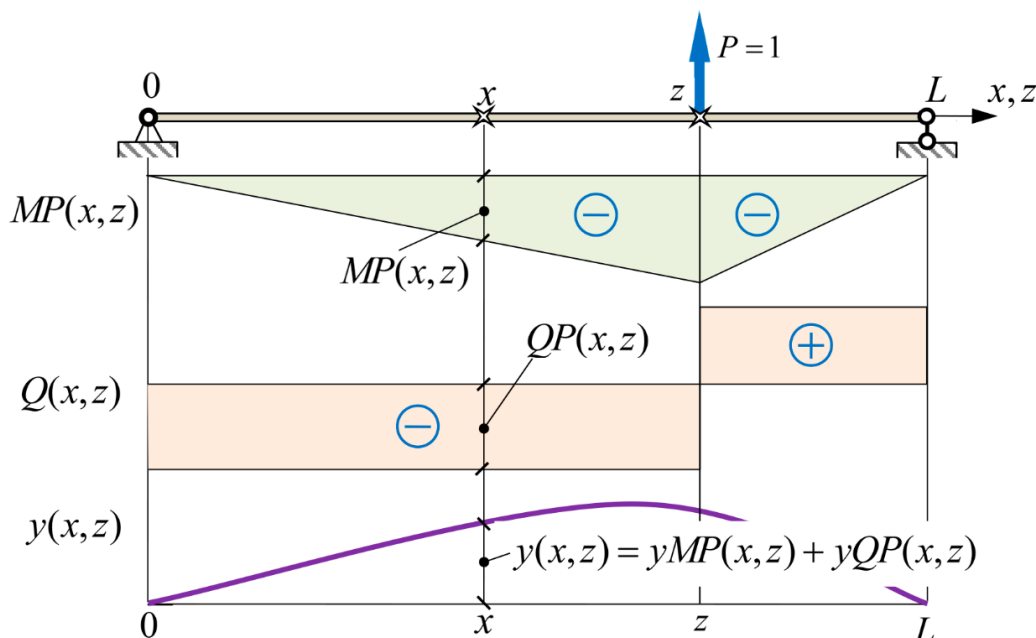


Рис. 1.2

На нем показана балка, нагруженная силой  $P = 1$  с абсциссой  $z$ . Далее на этом же рисунке показаны:

- $MP(x, z)$  — изгибающий момент  $M$  в сечении с абсциссой  $x$  от воздействия силы  $P = 1$  с абсциссой  $z$ ;
- $QP(x, z)$  — поперечная сила  $Q$  в сечении с абсциссой  $x$  от воздействия той же силы  $P = 1$  с абсциссой  $z$ ;
- $yMP(x, z)$  — прогиб  $y$  оси балки в точке с абсциссой  $x$  от  $MP(x, z)$ ;
- $yQP(x, z)$  — прогиб  $y$  оси балки в точке с абсциссой  $x$  от  $QP(x, z)$ .

Все перечисленные здесь функции могут быть описаны как функции Грина. Из этого примера вырисовывается идея построения их обозначений. Применительно к балкам нами принят следующий формат обозначений этих функций, показанный на рис. 1.3.

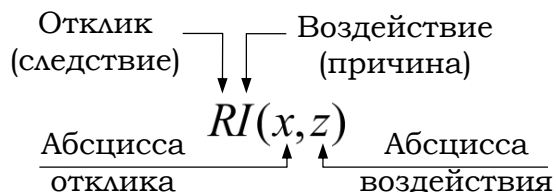


Рис. 1.3

Обозначение  $RI(x, z)$  следует читать так: функция отклика  $R$  (Response) в сечении балки с абсциссой  $x$  на единичное воздействие  $I$  (Impact) с абсциссой  $z$ . Или, сокращенно, *функция  $R$  от  $I$* . Более подробно это поясняется далее, при определении конкретных функций такого рода.

Рассматриваются *три типа воздействий*: *сосредоточенные силы, действующие перпендикулярно оси балки, сосредоточенные моменты*

и *распределенные нагрузки*, также действующие перпендикулярно оси балки.

Рассматриваются *четыре типа откликов: изгибающие моменты и поперечные силы* в сечениях балки, а также *прогибы* оси балки и *углы поворота* ее сечений.

На *одно и то же* воздействие можно рассматривать несколько *разных* видов откликов. Соответственно, каждый из них будет описываться *разными* функциями Грина.

*Единичные воздействия* относятся к *внешним* усилиям и представляют собой разновидность *нагрузок* (Приложение 1). Они могут быть *двух* видов: *единичные силы* и *единичные изгибающие моменты*. Воздействия *распределенных* нагрузок и отклики на них описываются через воздействия *единичных сил*. Как это делается — показано ниже.

### 3. Определения функций Грина

#### Первичные функции изгибающих моментов.

- $MP(x, z)$  — функция отклика в виде изгибающего момента  $M$  в сечении с абсциссой  $x$  на воздействие силы  $P = 1$  с абсциссой  $z$ . Сокращенно, это функция « $M$  от  $P$ ».

- $MM(x, z)$  — функция отклика в виде изгибающего момента  $M$  в сечении с абсциссой  $x$  от воздействия момента  $M = 1$  с абсциссой  $z$ . Сокращенно, это функция « $M$  от  $M$ ».

Далее нам понадобятся еще *шесть* функций Грина (1.1)–(1.6), которые выражаются через *первичные* и потому условно называются *вторичными*.

#### Вторичные функции поперечных сил.

- $QP(x, z)$  — функция отклика в виде поперечной силы  $Q$  в сечении с абсциссой  $x$  от воздействия силы  $P = 1$  с абсциссой  $z$ . Сокращенно, это функция типа « $Q$  от  $P$ ». Поскольку  $Q = dM/dx$ , то:

$$QP(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} MP(x, z) \quad (1.1)$$

- $QM(x, z)$  — функция отклика в виде поперечной силы  $Q$  в сечении с абсциссой  $x$  от воздействия момента  $M = 1$  с абсциссой  $z$ . Сокращенно это функция типа « $Q$  от  $M$ ». Здесь, как и для (1.1):

$$QM(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} MM(x, z) \quad (1.2)$$

Как видно из (1.1) и (1.2), *вторичные* функции  $QP(x, z)$  и  $QM(x, z)$  являются *производными* от *первичных* функций  $MP(x, z)$  и  $MM(x, z)$ .

#### Вторичные функции перемещений от изгибающих моментов.

Далее определяются *вторичные* функции *перемещений*, а именно: *прогибы* оси балки и *углы поворота* ее сечений от *единичных* нагрузок. Формулы, *определяющие* эти функции, записываются естественным образом в соответствии с известным из курса «Сопротивление материалов» понятием интеграла Мора.

*Замечание.* Последующие вторичные функции получаются путем операций с функциями Грина при помощи интеграла Мора. Вероятно, с точки зрения исторической и научной добросовестности было бы пра-

вильным называть их функциями Грина — Мора. Возможно, такое их название будет принято научным сообществом.

- *Прогиб* с абсциссой  $x$  от *изгибающих моментов*, создаваемых *единичной силой*  $P = 1$  с абсциссой  $z$ .

$$yMP(x, z) = \int_L \frac{MP(u, x) \cdot MP(u, z)}{E \cdot I} du \quad (1.3)$$

- *Прогиб* с абсциссой  $x$  от *изгибающих моментов*, создаваемых *единичным моментом*  $M = 1$  с абсциссой  $z$ .

$$yMM(x, z) = \int_L \frac{MP(u, x) \cdot MM(u, z)}{E \cdot I} du \quad (1.4)$$

- *Угол поворота сечения* с абсциссой  $x$  от *изгибающих моментов*, создаваемых *единичной силой*  $P = 1$  с абсциссой  $z$ .

$$\Theta MP(x, z) = \int_L \frac{MM(u, x) \cdot MP(u, z)}{E \cdot I} du \quad (1.5)$$

- *Угол поворота сечения* с абсциссой  $x$  от *изгибающих моментов*, создаваемых *единичным моментом*  $M = 1$  с абсциссой  $z$ .

$$\Theta MM(x, z) = \int_L \frac{MM(u, x) \cdot MM(u, z)}{E \cdot I} du \quad (1.6)$$

В формулах (1.3)–(1.6)  $MP(u, x)$  и  $MM(u, x)$  — *первичные* функции изгибающих моментов, уже описанные на предыдущей странице.

*Примечание.* Аналогичным образом можно ввести понятия *вторичных функций перемещений* от *поперечных сил*. Однако здесь это не делается по *двум* причинам. *Во-первых*, как известно, эти перемещения часто *малы* по сравнению с перемещениями от изгибающих моментов и потому в первом приближении ими можно пренебречь. *Во-вторых*, их введение заметно усложняет изложение темы функций Грина в сопротивлении материалов, что при первоначальном с ней ознакомлении, на наш взгляд, нежелательно. Тем не менее такая работа выполнена, но ее результаты здесь не представлены. Мы намерены изложить их в более полной версии описания этой темы, когда для этого будут соответствующие условия.

Все рассматриваемые нами функции Грина являются функциями *двух* переменных:  $x$  и  $z$ . Применительно к балкам это *абсциссы* некоторых *двух* точек (воздействия и отклика) на одной и той же координатной оси  $u$ , проходящей вдоль балки. При этом из представленных здесь *вторичных функций* только *две*:  $yMP(x, z)$  (1.3) и  $\Theta MM(x, z)$  (1.6) *всегда* являются *симметричными* (в том смысле, что они остаются *неизменными* при *перестановке* аргументов).

Что касается *первичных функций*, а также производных от них *вторичных* — то они *могут быть* симметричными для отдельных задач. В каждом конкретном случае этот вопрос должен изучаться отдельно.

В любом случае формат функций Грина, показанный на рис. 1.3, должен строго выдерживаться, поскольку перестановка их аргументов может приводить к ошибкам.

Конкретный вид *первичных* функций  $MP(x, z)$  и  $MM(x, z)$ , а также производных от них *вторичных* функций  $QP(x, z)$  (1.1) и  $QM(x, z)$  (1.2) определяется для каждого вида балок *один раз*. То, как это делается, описано в главе 2. Далее эти функции в неизменном виде, в одних и тех же общих уравнениях используются при решении самых разнообразных задач. Примеры показаны в главе 3.

### **1.3. Общее уравнение для изгибающих моментов**

Используя функции, описанные в разделе 1.2, можно записать следующие *общие* уравнения.

**1. Изгибающий момент** в сечении с абсциссой  $x$  от нагружения несколькими сосредоточенными силами  $P_i$  с абсциссами  $zP_i$ :

$$M_P(x) = \sum_i MP(x, zP_i) \cdot P_i. \quad (1.7)$$

**2. Изгибающий момент** в сечении с абсциссой  $x$  от *распределенной* нагрузки  $q(z)$ . Как это следует из (1.7),  $dM_q(x) = MP(x, z) \cdot q(z) \cdot dz$ . Тогда

$$M_q(x) = \int_L MP(x, z) \cdot q(z) \cdot dz. \quad (1.8)$$

**3. Изгибающий момент** в сечении с абсциссой  $x$  от нагружения несколькими сосредоточенными моментами  $M_j$  с абсциссами  $zM_j$ :

$$M_M(x) = \sum_j MM(x, zM_j) \cdot M_j. \quad (1.9)$$

**4. Суммарный изгибающий момент** в сечении с абсциссой  $x$  от всех нагрузок (*общее уравнение* эпюры *изгибающих моментов*):

$$M(x) = M_P(x) + M_q(x) + M_M(x), \quad (1.10)$$

где  $M_P(x) \rightarrow (1.7)$ ,  $M_q(x) \rightarrow (1.8)$ ,  $M_M(x) \rightarrow (1.9)$ .

### **1.4. Общее уравнение для поперечных сил**

Как известно:  $Q(x) = \frac{d}{dx} M(x)$ . Подстановка сюда  $M(x)$  из (1.10) дает:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{d}{dx} M_P(x) + \\ &+ \frac{d}{dx} M_q(x) + \frac{d}{dx} M_M(x) = \\ &= Q_P(x) + Q_q(x) + Q_M(x). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (1.11).

**1. Поперечная сила** в сечении с абсциссой  $x$  от нагружения несколькими сосредоточенными силами  $P_i$  с абсциссами  $zP_i$ . Дифференцируя  $M_P(x)$  (1.7) и используя вторичную функцию  $QP(x, z)$  (1.1), получим



$$\begin{aligned}
Q_P(x) &= \frac{d}{dx} M_P(x) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_i MP(x, zP_i) \cdot P_i = \sum_i \frac{\partial}{\partial x} MP(x, zP_i) \cdot P_i = \sum_i QP(x, zP_i) \cdot P_i \\
Q_P(x) &= \sum_i QP(x, zP_i) \cdot P_i.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

**2. Поперечная сила** в сечении с абсциссой  $x$  от *распределенной нагрузки*  $q(z)$ . Производная от  $M_q(x)$  (1.8) с подстановкой вторичной функции  $QP(x, z)$  из (1.1) дает:

$$\begin{aligned}
Q_q(x) &= \frac{d}{dx} M_q(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_L MP(x, z) \cdot q(z) \cdot dz = \\
&= \int_L \frac{\partial}{\partial x} MP(x, z) \cdot q(z) \cdot dz = \int_L QP(x, z) \cdot q(z) \cdot dz, \\
Q_q(x) &= \int_L QP(x, z) \cdot q(z) \cdot dz.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

**3. Поперечная сила** в сечении с абсциссой  $x$  от нагружения несколькими сосредоточенными *моментами*  $M_j$  с абсциссами  $zM_j$ . Дифференцируя  $M_M(x)$  (1.9) и подставляя вторичную функцию  $QM(x, z)$  из (1.2), получим:

$$\begin{aligned}
Q_M(x) &= \frac{d}{dx} M_M(x) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_j MM(x, zM_j) \cdot M_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial x} MM(x, zM_j) \cdot M_j \\
Q_M(x) &= \sum_j QM(x, zM_j) \cdot M_j.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

**4. Поперечная сила** в сечении с абсциссой  $x$  от *всех нагрузок* (*общее уравнение эпюры поперечных сил*):

$$Q(x) = Q_P(x) + Q_q(x) + Q_M(x), \tag{1.15}$$

где  $Q_P(x) \rightarrow (1.12)$ ,  $Q_q(x) \rightarrow (1.13)$ ,  $Q_M(x) \rightarrow (1.14)$ .

## 1.5. Линейные перемещения от изгибающих моментов

Перемещение  $y_M(z)$  точки оси балки с абсциссой  $z$  от изгибающих моментов:

$$y_M(z) = \int_L \frac{M(x) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx. \tag{1.16}$$

*Примечание.* Здесь и далее наличие индекса «М» в обозначениях указывает на то, что индексируемая величина определяется воздействиями изгибающих моментов  $M$ .

Подстановка в (1.16)  $M(x)$  из (1.10) дает:

$$\begin{aligned}
y_M(z) &= \int_L \frac{[M_P(x) + M_q(x) + M_M(x)] \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx = \\
&= \int_L \frac{M_P(x) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx + \int_L \frac{M_q(x) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx + \int_L \frac{M_M(x) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx = \\
&= y_{MP}(z) + y_{Mq}(z) + y_{MM}(z).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Первый интеграл в (1.17) физически представляет собой прогиб оси балки в точке с абсциссой  $z$  от *изгибающих моментов*, создаваемых *сосредоточенными* нагрузками — *силами*. Он преобразуется путем подстановки в него  $M_P(x)$  из (1.7) и далее  $y_{MP}(x, z)$  из (1.3). Это дает:

$$\begin{aligned} y_{MP}(z) &= \int_L \frac{M_P(x) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx = \int_L \left[ \sum_i MP(x, zP_i) \cdot P_i \right] \cdot \frac{MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx = \\ &= \sum_i P_i \cdot \int_L \frac{MP(x, zP_i) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx = \sum_i y_{MP}(z, zP_i) \cdot P_i. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Второй интеграл в (1.17) физически представляет собой прогиб оси балки в точке с абсциссой  $z$  от *изгибающих моментов*, создаваемых *распределенными* нагрузками. Он выглядит так:

$$y_{Mq}(z) = \int_L \frac{M_q(x) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx, \quad (1.19)$$

где  $M_q(x) \rightarrow (1.8)$ ,  $MP(x, z) \rightarrow$  раздел 1.2, п. 3.

*Примечание.* Можно построить *альтернативную* формулу для вычислений  $y_{Mq}(z)$  следующим образом. Если воспользоваться вторичной функцией  $y_{MP}(x, z)$  (1.3), то  $dy_{Mq}(x, z) = y_{MP}(x, z) \cdot q(z) \cdot dz$ . Тогда

$$y_{Mq}(x) = \int_L y_{MP}(x, z) \cdot q(z) \cdot dz. \quad (1.20)$$

Естественно, что обе формулы (1.19) и (1.20) дают *одинаковые* результаты. Однако вычисления по формуле (1.20) значительно проще и потому быстрее.

Третий интеграл в (1.17) физически представляет собой прогиб оси балки в точке с абсциссой  $z$  от *изгибающих моментов*, создаваемых *сосредоточенными* нагрузками — *моментами*. Он преобразуется путем подстановки в него  $M_M(x)$  из (1.9) и далее  $y_{MM}(x, z)$  из (1.4). Это дает:

$$\begin{aligned} y_{MM}(z) &= \int_L \frac{M_M(x) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx = \\ &= \int_L \left[ \sum_j MM(x, zM_j) \cdot M_j \right] \cdot \frac{MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx = \\ &= \sum_j M_j \cdot \int_L \frac{MM(x, zM_j) \cdot MP(x, z)}{E \cdot I} \cdot dx = \\ &= \sum_j M_j \cdot \int_L \frac{MP(x, z) \cdot MM(x, zM_j)}{E \cdot I} \cdot dx = \\ &= \sum_j M_j \cdot y_{MM}(z, zM_j). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Прогиб  $y(z)$  оси балки в точке с абсциссой  $z$  от *всех* нагрузок (*общее уравнение прогибов* или *упругой линии балки*) выглядит так:

$$y_M(z) = y_{MP}(z) + y_{Mq}(z) + y_{MM}(z), \quad (1.22)$$

где  $y_{MP}(z) \rightarrow (1.18)$ ,  $y_{Mq}(z) \rightarrow (1.19)$  или (1.20),  $y_{MM}(z) \rightarrow (1.21)$ .

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)