

Посвящается Яньпин и Алисии

Содержание

От издательства	10
Предисловие	11
Схема взаимосвязи глав	13
Обозначения	14
Глава 1. Сумбур: так что же такое тензоры?	15
§1. Вопросы и заблуждения	15
§2. Кто изобрел тензор?	18
§3. Различные определения тензора	20
§4. Простые вещи с вычурными названиями тензоров	29
§5. Тензоры без названия – линейные преобразования	34
§6. Сравнение: различные определения вектора – конкретные системы против абстрактных систем	35
§7. Тензорное произведение и тензорные пространства	37
§8. Степень, ранг, порядок или размерность – какое название лучше?	38
*§9. Что такое псевдоскаляры, псевдовекторы и псевдотензоры?	40
§10. Что такое тензорный анализ? Связь с геометрией Римана	42
10.1. Векторный анализ	42
10.2. Тензорный анализ и геометрия Римана	43
Глава 2. Почему и как используются тензоры в машинном обучении?	45
§1. Как AlphaGo победила лучшего игрока в го благодаря глубокому обучению	45
§2. Структура данных тензора	48
2.1. AlphaGo	49
2.2. Изображения и видео	50
2.3. Приложения для работы с речью и аудио	50
§3. TensorFlow и тензорный процессор (TPU)	51
§4. Тензор в машинном обучении – это дань моде?	52
Глава 3. Прямая сумма пространств $U \oplus V$	54
§1. Элементы	54
§2. Операции	54
§3. Размерность $U \oplus V$	55

Глава 4. Диадика Гиббса	56
§1. Что такое диада?	56
§2. Когда две диады равны?	57
§3. Какие операции допустимы с диадами?	57
§4. Что такое диадик?	57
§5. Какие операции допустимы с диадиками?	58
§6. Когда два диадика равны?	58
§7. Матричное представление	59
§8. Изменение координат	60
§9. Каково назначение диадиков? Линейные преобразования и билинейные формы.....	61
§10. Что такое диадическое сопоставление?.....	63
 Глава 5. Тензорные пространства (тензорное произведение $U \otimes V$).....	64
§1. Билинейные отображения	64
§2. Отличия: билинейное отображение и линейное отображение	67
§3. Мультилинейные отображения.....	71
§4. Тензорное произведение двух векторных пространств	71
§5. Декомпозируемые тензоры.....	80
§6. Тензорное произведение линейных отображений.....	81
§7. Тензорное произведение нескольких векторных пространств.....	81
§8. Векторные тензоры – наиболее обобщенная модель	82
 Глава 6. Тензорные пространства (тензорная степень $V^{\otimes(p,q)}$).....	84
§1. Тензорные пространства (тензорные степени пространства)	84
§2. Изменение базиса	85
§3. Индуцированное внутреннее произведение.....	87
§4. Понижение и повышение индексов – изоморфизмы	87
 Глава 7. Тензорная алгебра.....	90
§1. Тензорное произведение тензоров	90
§2. Тензорная алгебра.....	91
§3. Свертывание тензоров	92
 Глава 8. Динамика: тензор инерции	94
§1. Момент импульса	94
§2. Вращение твердого тела вокруг фиксированной точки.....	97
§3. Вращение твердого тела вокруг фиксированной оси.....	101
§4. Теорема о параллельных осях и теорема о перпендикулярных осях	106
§5. Эллипсоид тензора.....	107
 Глава 9. Электродинамика: тензор электромагнитного поля.....	110
§1. Электродинамика в тензорной формулировке	110
§2. Электродинамика в рамках галилеева преобразования	112

2.1. Электромагнитное поле в виде контравариантного тензора $F^{\mu\nu}$	114
2.2. Электромагнитное поле в виде ковариантного тензора $F_{\mu\nu}$	116
2.3. Электромагнитное поле в виде сочетания $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$	117
2.4. Электромагнитное поле в виде сочетания $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$	118
§3. Электродинамика во вращающихся системах отсчета	119
*§4. Уравнения Максвелла в виде внешних дифференциальных форм	120
*§5. Предложение новой нотации $d\lambda$ для внешней производной	122

Глава 10. Геометрия Римана и общая теория относительности

§1. Что такое «искривленное пространство»?	127
1.1. Внешний вид изогнутых поверхностей и изогнутых пространств.....	128
1.2. Взгляд изнутри на искривленные поверхности по Гауссу	130
1.3. Обобщение Римана по внутренней геометрии	133
§2. Что такое касательное пространство?.....	135
2.1. Внешнее наблюдение упрощает задачу	135
2.2. Взгляд изнутри более сложен.....	137
§3. Повторное обращение к законам преобразования тензоров	139
§4. Дифференцируемое многообразие и риманово многообразие: в чем разница?	141
§5. Применимость геометрии Римана в реальном мире – традиционализм	145
§6. Что такое общая теория относительности?.....	153
§7. Что такое время?.....	166

Приложение 1. Основные положения линейной алгебры

§1. Доказательство коммутативности сложения.....	183
§2. Ковекторы и двойственное пространство	184
§3. Внутреннее произведение	186
§4. Контравариантные и ковариантные компоненты векторов.....	188
4.1. Контравариантные координаты как параллельные проекции.....	190
4.2. Ковариантные координаты как перпендикулярные проекции.....	191
§5. Билинейные формы и квадратичные формы.....	192
§6. Свободные векторные пространства и свободные алгебры.....	193
6.1. Интуитивная идея.....	193
6.2. Формальное определение свободного векторного пространства.....	194
6.3. Свободные алгебры	195

Приложение 2. Математические структуры

§1. Математические структуры.....	197
§2. Дискретные структуры.....	199
2.1. Алгебраические структуры.....	199
2.2. Порядковые структуры	200
§3. Непрерывные структуры.....	200
3.1. Топологические структуры.....	200

3.2. Структуры меры	200
§4. Смешанные структуры	201

Приложение 3. Аксиоматические системы 202

§1. Неопределенные концепции и аксиомы	202
§2. Аксиоматические системы – от античности до наших дней	204
§3. Согласованность, независимость и целостность	214
3.1. Согласованность	214
3.2. Независимость	216
3.3. Целостность	217

Библиография..... 219

Предметный указатель..... 222

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Тензоры имеют широкое применение в физике и инженерии. При определении тензора в классическом представлении с использованием компонентного подхода зачастую возникает некоторая неопределенность. Тензор определяется как матрица, но с учетом законов преобразования. Он описывается в категориях компонентов объекта, без четкого определения самой сущности этого объекта. Это порождает двойственное впечатление матрицы и нематрицы, подобно смешению живого и мертвого состояний кошки Шредингера. Особенно запутывает студентов сосуществование старых и новых определений в специализированной литературе. Эти определения выглядят настолько по-разному, что студенты с трудом могут представить, что речь идет об одном и том же. Традиционное определение сложно понять, потому что оно не является строгим; современные определения сложно понять, потому что они точны, но при этом более абстрактны и менее интуитивны. Цель этой книги – разъяснить строгие определения тензора интуитивным способом, чтобы у студентов больше не возникала необходимость заучивать эти определения как попугаям.

Эта книга предназначена для аспирантов, студентов старших курсов, а также исследователей и специалистов в области физики и инженерии. Книга также может быть полезна студентам, изучающим математику, для формирования более глубокого понимания тензоров на интуитивном уровне. Необходимым условием для изучения этой книги является базовое знание линейной алгебры. Некоторые концепции линейной алгебры рассматриваются непосредственно перед их использованием. Более сложные темы линейной алгебры, такие как ко векторы и двойственные пространства, контравариантные и ковариантные компоненты векторов, билинейные формы и квадратичные формы, представлены в приложении 1. Концепция математических структур, предлагаемая Бурбаки, очень полезна при изучении современной математики, включая тензоры и геометрию Римана. Читатели, незнакомые с этой концепцией, могут ознакомиться с ней в приложении 2.

Глава 1 представляет собой введение и обзор тензоров. Глава 3 – это короткий раздел о пространствах прямой суммы. Главы с 4 по 7 в основном посвящены тензорной алгебре. В главах 2, 8 и 9 рассматриваются прикладные аспекты в области машинного обучения и физики. В последней главе 10 представлен обзор геометрии Римана и общей теории относительности (см. схему взаимосвязи глав после оглавления). Более сложные темы, выходящие за рамки данной книги, отмечены звездочкой перед названием параграфа. В рамках приведены замечания, которые отходят от основной логической линии темы, большинство из которых являются историческими примечаниями и собственными философскими взглядами автора.

Благодарности

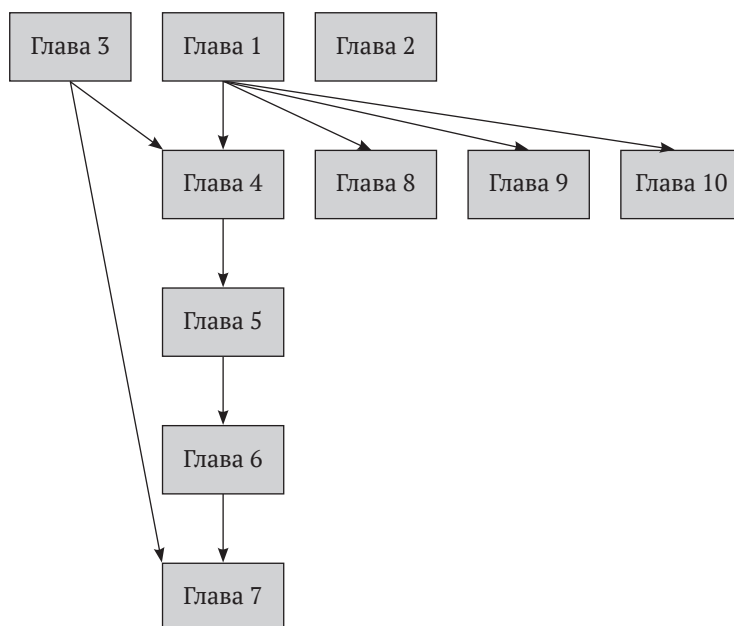
Следующие изображения взяты из Wikimedia Commons, по лицензии Creative Commons: рис. 1.3 – Томас Шульц (Thomas Schultz); рис. 1.4 – снимок 3D-реконструкции П. Хагманна (P. Hagmann) и др.; рис. 2.1 – Везалий (Wesalius); рис. 2.2 – Зинскауф (Zinskauf); рис. 10.7 – Стребе (Strebe), с изменениями. Я хотел бы выразить искреннюю благодарность этим авторам.

Я глубоко благодарен профессорам Рикардо Тейшейре (Ricardo Teixeira), Джерри Ху (Jerry Hu) и Али Догану (Ali Dogan), а также моим аспирантам Ву Фаму (Vu Pham) и Капилу Сурьяванши (Kapil Suryawanshi) из Университета Хьюстона – Виктория. Они уделили свое драгоценное время рецензированию чернового варианта рукописи и поиску ошибок. Я также благодарен профессорам Гуанмин Син (Guangming Xing) и Чжунхан Ся (Zhonghang Xia) из Университета Западного Кентукки за прочтение части рукописи и высказанные замечания. Я хотел бы поблагодарить сотрудников издательства World Scientific Publishing, особенно редактора Стивена Патта (Steven Patt), за помощь в подготовке этой книги. Особая благодарность Раджешу Бабу (Rajesh Babu), заместителю руководителя издательства, за помощь в решении технических вопросов при наборе текста в LATEX. Он является тем самым «мачо-программистом» TEX, о котором писал Лесли Лампорт (Leslie Lamport). Я глубоко впечатлен его способностью решать всевозможные сложные проблемы. И наконец, я хотел бы поблагодарить двух прекрасных и любящих женщин, мою жену и дочь, за их постоянную поддержку.

Хьюстон, май 2021 г.
guoh@uhv.edu

Го Хунъюй

Схема взаимосвязи глав



Обозначения

Обозначение	Значение
$\equiv$	равный по определению
$\forall$	для всех
$\exists$	существует
$\exists!$	существует единственный
$\circ$	составление отображения
$(u, v) \mapsto u + v$	инфиксный оператор $+$ помещается в $()$
$(u, v) \mapsto uv$	инфиксный оператор опускается
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
n	n -мерное вещественное векторное пространство
n	n -мерное евклидово пространство
$\text{Im } \varphi$	образ отображения φ
$\det A$	определитель матрицы A
$\text{rank } A$	ранг матрицы A
A^t	транспонированная матрица A
$\dim V$	размерность V
или $\text{Span}(S)$	линейное подпространство, порожденное множеством S
$\cdot$	внутреннее произведение или скалярное произведение
$\oplus$	прямая сумма
$\otimes$	тензорное произведение
$T_q^p(V)$	тензорное пространство типа (p, q) над V
$T_0^2(V) \rightarrow T_1^1(V)$	понижение одного индекса тензора
$T_0^2(V) \rightarrow T_2^0(V)$	понижение двух индексов тензора
$T_1^1(V) \rightarrow T_0^2(V)$	повышение одного индекса тензора
$T_2^0(V) \rightarrow T_0^2(V)$	повышение двух индексов тензора
∂x	частная производная, сокращение от
$\wedge$	внешнее произведение или клиновидное произведение
$d\wedge$	внешняя производная

Глава 1

Сумбур: так что же такое тензоры?

Одним из способов узнать многое о математике является чтение первых глав из множества книг.

– Пол Р. Халмос

Тензоры широко применяются в физике, информатике, инженерии, машинном обучении, интеллектуальном анализе данных, медицине (диффузионная тензорная визуализация) и других областях. В этой главе представлен общий обзор тензоров. Вы можете столкнуться с использованием терминов, которым еще не были даны определения. Цель заключается в том, чтобы составить общее представление.

Если первая глава будет для вас полезна, может быть, стоит прочитать и последующие. Логическое изложение материала начинается в главе 3.

§1. Вопросы и заблуждения

Для многих студентов сама по себе концепция тензора является предметом непонимания. Поиск в интернете выдает множество запросов, связанных с тензорами. Например:

- Является ли тензор просто матрицей (высшего порядка)?
- Как давно существуют тензоры и почему они внезапно стали так востребованы в машинном обучении?
- Являются ли тензоры в машинном обучении тем же, что и тензоры в математике и физике?
- Являются ли тензоры в машинном обучении контравариантными или ковариантными? Что такое метрический тензор?
- Почему тензор инерции является тензором (в большинстве книг он определяется как матрица)?

- Что является примером величины, которая имеет нужное количество компонентов, но не является тензором?
- Какова связь между тензором и тензорным произведением? Каково физическое значение тензора?
- Можно ли сложить компоненты контравариантного тензора и ковариантного тензора?
- Интересуются ли математики-теоретики тензорным анализом? Какие открытые проблемы существуют в тензорном анализе?
- Имеет ли тензорный анализ отношение к глубокому обучению?

В интернете можно найти множество ответов и объяснений. Однако вместо раскрытия тайн многие из них только добавляют еще больше путаницы в и без того запутанные умы студентов. Вот несколько таких примеров:

- «Тензор – это просто n -мерный массив с n индексами»;
- «Тензоры – это просто математические объекты, которые можно использовать для описания физических свойств»;
- «Тензоры – это обобщения скаляров и векторов»;
- «По сути, тензоры – это векторы, которые не имеют одного направления, а указывают во всех направлениях»;
- «Если я спрошу вас, что такое вектор, вы, возможно, ответите, что это элемент векторного пространства, так что тензор – это элемент тензорного пространства»;
- «Тензоры обладают свойствами как векторов, так и скаляров, такими как площадь, напряжение и т. д.»;
- «Тензор – это не скаляр, не вектор и не что-то еще. Это просто абстрактная величина, подчиняющаяся закону преобразования координат. Все, что удовлетворяет этому закону, является тензором. Вот и все!»;
- «В математике тензоры – это геометрические объекты, которые описывают линейные отношения между геометрическими, числовыми и другими тензорными векторами»;
- «Самый простой способ представить тензор – это вектор в пространстве произведения. Каждый индекс обозначает фактор пространства произведения, в котором находится тензор, и может быть повышен или понижен в зависимости от изменения соответствующего фактора при смене базиса. Количество индексов определяет порядок тензора. Таким образом, тензоры по сути являются просто обобщением векторов. Их компоненты (в определенном базисе) представляют собой многомерные массивы. Тензор – это больше, чем просто многомерный массив, по той же причине, по которой вектор – это не просто список его компонентов»;
- «Говоря не совсем техническим языком, тензоры представляют собой линейный оператор других тензоров. Каждый раз, когда вы применяете тензор к другому тензору, пропадает набор совпадающих индексов»;
- «Тензор – это многолинейная функция»;

- «Тензор со множеством индексов, как ковариантных, так и контравариантных, выглядит как многомерные данные в 0, 1, 2, 3 и более вы-соких измерениях»;
- «В простейшей форме: величины, имеющие величину, направление и плоскость действия, называются тензорными величинами»;
- «Тензор – это элемент тензорного произведения двух или более век-торных пространств»;
- «Тензор – это тензорное произведение двух векторов»;
- «Тензор – это те физические величины, которые могут иметь эффекты, подобные напряжению».

Каждое из этих определений содержит долю правды о тензорах, но в них также отражено множество противоречий. Это напоминает мне забавные ответы маленьких детей на вопрос «Что такое любовь?».

Сравнение: что общего между любовью и тензором?

«Что такое любовь?»

- «Любовь – это когда девочка наносит духи, а мальчик – одеколон после бритья и они выходят на улицу и нюхают друг друга» (5 лет).
- «Любовь – это когда ты говоришь парню, что тебе нравится его рубашка, и он носит ее каждый день» (7 лет).
- «Если ты хочешь научиться лучше любить, начни с друга, которого ты ненави-дишь» (6 лет).
- «Любовь – это когда мама видит папу потного и пахнущего, но все равно говорит, что он красивее Роберта Редфорда» (8 лет).
- «Любовь – это когда твой щенок лижет тебе лицо, даже если ты оставил его одно-го на целый день» (4 года).
- «Любовь – это когда вы целуетесь все время. А когда вы устаете целоваться, вы все равно хотите быть вместе и больше разговариваете» (8 лет).
- «Я знаю, что моя старшая сестра любит меня, потому что она отдает мне всю свою старую одежду и вынуждена покупать новую» (4 года).
- «Я позволяю старшей сестре дразнить меня, потому что мама говорит, что она дразнит меня только потому, что любит меня. Поэтому я дразню свою младшую сестру, потому что люблю ее» (4 года).

Каждый из этих ответов, безусловно, отражает какой-то аспект правды.

Что общего между любовью и тензором? Любовь между сестрами такая же, как между мамой и папой, между подростками, которые встречаются, и между соба-ками и людьми? Сравните с вопросом: тензор в машинном обучении такой же, как в математике и физике?

Понятие любви абстрактно и сложно, и оно никогда не поддавалось строгому опре-делению. Тензор также абстрактен и сложен. В прошлом он не был четко определен. Существуют строгие современные определения, но они более абстрактны и менее интуитивны. Таким образом, старое определение трудно понять, потому что оно не является строгим; современное определение трудно понять, потому что оно явля-ется строгим. Цель этой книги – объяснить строгие определения тензора в инту-итивной форме, чтобы студентам больше не приходилось заучивать эти определения как попугаам.

Ответы на эти вопросы будут даны в нашей книге. После прочтения книги читатель сможет самостоятельно оценить достоверность приведенных выше ответов. Однако перед тем, как приступить к чтению книги, большинство читателей хотели бы получить краткие ответы на эти вопросы. Именно для этой цели и предназначена данная глава.

§2. Кто изобрел тензор?

В этом параграфе приведена краткая история концепции тензора. Это позволяет ответить на вопрос, как давно появились тензоры. Также дается ответ на вопрос «почему тензоры вызывают путаницу» с определенной точки зрения: они имеют разное происхождение и представляют собой слияние различных исторических направлений. В следующем параграфе приводится ответ на этот вопрос с другой точки зрения: в современной литературе существует много, казалось бы, разных определений тензора.

В конце 1800-х и начале 1900-х годов в развитии теории тензоров было несколько направлений, представленных Риччи, Гиббсом, Фойгтом и Уитни. Большинство современных авторов приписывают концепцию тензора Риччи, поскольку ранние учебники, особенно по физике, в основном следовали его определениям. Риччи не использовал в своем определении термин «тензор» (tensor), заменив его словом «система» (system). В физике термин «тензор» используется в определении Риччи. Хотя это и называют «тензором», определение Риччи на самом деле описывает тензорное поле. Это вызывает наибольшую путаницу у новых исследователей. Гиббс, Фойгт и Уитни давали определение тензора в алгебраическом контексте.

1. Г. Риччи (G. Ricci) [(1892)]: ковариантные и контравариантные системы, но он называл их «системами», а не «тензорами» (то, что он определил, является тензорным полем в современном смысле; подробнее см. в §3).
2. Дж. У. Гиббс (J. W. Gibbs) [(1884)]: диадики и полиадики (на самом деле это тензоры в современном смысле, только носят другие названия; подробнее см. в главе 4).
3. В. Фойгт (W. Voigt) [(1898)]: придумал название «тензор» – в более узком смысле симметричных тензоров для изучения упругости кристаллов.
4. Х. Уитни (H. Whitney) [(1937)]: тензорное произведение (подробнее см. в главе 5).

Гиббс признан одним из основателей векторной алгебры и векторного анализа. Он сыграл важную роль в отделении векторов от кватернионов Гамильтона. Однако его значительный вклад в развитие тензорной алгебры и тензорного анализа (в евклидовом пространстве) зачастую остается недооцененным. Гиббс разработал концепцию диадиков и полиадиков.

На самом деле это тензоры в их современном понимании, только с другими названиями¹. Его диадическое произведение – это именно тензорное произведение в современном понимании, за исключением того, что его обозначение представляет собой сопоставление двух векторов uv , в отличие от современного обозначения $u \otimes v$.

В. Фойгт [(1898)] ввел термин «тензор» в своем исследовании напряжений и деформаций кристаллов в книге «*Фундаментальные физические свойства кристаллов*» (*Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystallen*). Слово «тензор» происходит от латинского «*tensus*», что означает «растяжение» или «напряжение». Тензоры напряжений и деформаций являются симметричными тензорами второго порядка и имеют по шесть компонентов. Фойгт описывает их в виде 6-мерного вектора. Такая запись известна как нотация Фойгта (*Voigt notation*). Термин «тензор» был принят физиками Максом Абрахамом (*Max Abraham*, 1904), Арнольдом Зоммерфельдом (*Arnold Sommerfeld*, 1910) и Максом фон Лауэ (*Max von Laue*, 1911). Эйнштейн (*Einstein*) и Гроссман (*Grossmann*) [(1913)]² использовали определение Риччи, но с названием «тензор» вместо термина «система», предложенного Риччи.

Уитни [(1937)] дал определение тензорному произведению. Фактически это более точная формулировка концепции диадиков Гиббса. Существуют и другие направления, связанные с развитием тензоров. Грассман разработал внешнюю алгебру в 1862 году. Хотя внешняя алгебра может быть построена независимо от теории тензоров, между ними все же существует связь. Внешний вектор фактически является антисимметричным тензором. Х. Минковский (*H. Minkowski*) [(1908)] впервые ввел концепцию электромагнитного тензора, который является антисимметричным тензором, хотя он назвал его «вектором второго рода» (6-мерным, чтобы отличить его от «вектора первого рода» с 4 измерениями). Позже А. Зоммерфельд (*A. Sommerfeld*) назвал его 6-мерным вектором. Сравним его с тензором силы напряжения Фойгта, который также выражается как 6-мерный вектор. Тензор Фойгта является симметричным тензором над трехмерным векторным пространством, в то время как тензор электромагнитного поля является антисимметричным тензором над четырехмерным векторным пространством.

Тензор электромагнитного поля обсуждается в главе 9.

¹ Термин «тензор» действительно встречался в книге Гиббса, но использовался для обозначения особого типа тензоров (а именно особого типа линейных преобразований). У. Р. Гамильтон также использовал термин «тензор», но в значении модуля кватерниона, что совершенно не связано с нашей теорией тензоров. Термин «тензор» в понимании Гамильтона сегодня больше не используется. Вместо него используется термин «модуль» или «норма кватерниона».

² Эта статья состоит из двух частей: Эйнштейн является единственным автором части, посвященной физике, а Гроссман – единственным автором части, посвященной математике.

Философский взгляд: математика изобретена или открыта?

– Мнение автора: и то, и другое.

Мы поставили вопрос «кто изобрел тензор». Тензор был изобретен или открыт? Существует вековая философская проблема: «математика изобретена или открыта?»

Мы задаемся вопросом «что такое тензор». На самом деле тензор – это то, как мы его определяем. Мы действительно имеем право свободно давать определения. И в этом смысле математика является изобретением. Шерман Стейн (Sherman Stein) [(2010)] написал книгу «Математика: рукотворная вселенная» (*Mathematics: the Man-made Universe*). И именно эту точку зрения отражает название его книги. Конечно, другие люди утверждают, что математика – это научное открытие, и эта тема до сих пор остается предметом горячих споров.

Мнение автора: и то, и другое. В математике мы сначала изобретаем эту рукотворную вселенную. Затем мы делаем открытия внутри нее. Эта рукотворная вселенная может быть чрезвычайно сложной, и открытия в ней отнюдь не являются чем-то обыденным. Например, создание неевклидовой геометрии является изобретением, но ее интерпретации (или модели) являются открытиями, которые раскрывают связь между неевклидовой и евклидовой геометриями. Возьмем группу в качестве другого примера. Определение группы занимает всего несколько строк текста, что можно рассматривать как изобретение. Кульминационный результат в теории групп, классификация конечных простых групп, является открытием, о котором написаны десятки тысяч страниц в нескольких сотнях статей, созданных более чем 100 авторами и опубликованных в основном в период с 1955 по 2004 год. Еще одним примером может служить риманово многообразие. Его определение также состоит всего из нескольких строк текста. Теорема вложения Нэша – это великое открытие, которое показывает, что хотя риманово многообразие определено само по себе, оно всегда изоморфно некоторому подмногообразию, вложенному в евклидово пространство более высокой размерности.

Я интерпретировал открытие как открытие в рукотворной вселенной самой математики. Является ли математика открытием в природе? Мой ответ – да и нет: нет в том смысле, что современная математика в своей абстрактной форме освобождена от обязанности открывать истину в природе, но да в том смысле, что математика может быть частью процесса открытия природы, когда она применяется в науке. В прошлом задача математики заключалась в непосредственном открытии истины в природе, но в наши дни ее участие в открытии является косвенным. Абстрактная математика может быть применена к реальному миру, если мы найдем физическую модель абстрактной математической структуры (см. приложение 2).

§3. Различные определения тензора

Почему концепция тензора вызывает путаницу? Это же просто определение, не так ли? Подумайте об определении равносостороннего треугольника. Ни у кого не возникнет трудностей с этим.

Понимание концепции могут затруднять некоторые факторы:

1. Сама концепция является достаточно сложной.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru