ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель дисциплины – ознакомление студентов с основными математическими понятиями и методами, использующимися в биологии, формирование навыков использования, полученных знаний для решения профессиональных задач в соответствии с формируемыми компетенциями.

Задачи дисциплины:

- ознакомление с биологическими исследованиями, в которых получение и понимание результатов базировалось на математическом моделировании;
- формирование у студентов системного представления об особенностях биологических систем, определяющих выбор математического аппарата для их моделирования;
- формирование навыков построения и анализа математических моделей биологических систем.

В результате освоения дисциплины «Математическое моделирование» у обучающихся должны быть сформированы следующие компетенции:

УК-1.1. Выполняет поиск информации, определяет критерии системного анализа поставленных задач

УК-1.2. Использует критический анализ, систематизацию и обобщение информации для решения поставленных задач

ПК-1.1. Обладает знаниями о методологии и этапах выполнения научно-исследовательской работы; о методах решения научных задач; о методике подготовки отчета, в том числе выпускной квалификационной работы

ПК-1.2. Демонстрирует умения: обрабатывать и анализировать научно-техническую информацию и результаты исследований; выполнять под научным руководством научно-исследовательскую или опытно-конструкторскую разработку в конкретной области профессиональной деятельности.

ПК-1.3. Имеет практический опыт (навыки): научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности; подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований.

Раздел 1 Статистический анализ биологических данных

Тема 1 Пространство элементарных событий. Операции над событиями. Вероятность событий

Случайное событие – это всякое явление (факт), которое в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Случайные события обозначаются буквами A, B, C … и т.д. Приведем несколько примеров случайных событий:

A – выпадение орла (герба) при подбрасывании стандартной монеты;

B – рождение девочки в данной семье;

C – рождение ребенка с заранее заданной массой тела;

D – возникновение эпидемического заболевания в данном регионе в определенный период времени и т.д.

Основной количественной характеристикой случайного события является его вероятность. Пусть A – какое-то случайное событие. Вероятность случайного события A – это математическая величина, которая определяет возможность его появления. Она обозначается P(A).

Вероятностью P появления случайного события A называют величину, равную отношению числа благоприятствующих исходов для данного события m к числу равновозможных, единственно – возможных и несовместных исходов испытания n.

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

Из определения вытекают следующие свойства вероятности:

1. Вероятность появления события всегда больше 0 и меньше 1: $0 \le P(A) \le 1$.

2. P (A) = 1, если A – достоверное.

Событие A называется *достоверным*, если в результате испытания оно обязательно произойдёт.

Событие А заключающееся в том, что наудачу выбранный шар из коробки, в которой находятся чёрные шары, будет чёрным, является достоверным.

3. $P(A) = 0$, если А – невозможное.

Событие А называется *невозможным*, если в результате испытания оно обязательно не произойдет.

Событие, что из коробки, содержащей одни чёрные шары, достают наудачу белый шар будет невозможным, т.к. белых шаров в коробке нет.

4. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Событие $\overline{A}$, заключающееся в не наступлении события А, называют противоположным событию А.

Например, при бросании монеты, вероятность выпадения цифры:

$P(A) = 0{,}5$

при выпадении герба $P(\overline{A}) = 0{,}5$

$P(\overline{A}) + P(A) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

Для вычисления вероятностей событий в задачах с применением классического определения вероятности иногда приходится использовать формулы комбинаторики. Пусть множество X состоит из n элементов.

ПЕРЕСТАНОВКИ – линейно упорядоченные наборы из n элементов множества X, отличающиеся порядком элементов. Таких различных наборов будет $P_n = n!$

РАЗМЕЩЕНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ – линейно упорядоченные наборы из k различных элементов множества X, причем важен их порядок. Таких различных наборов будет

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ – линейно упорядоченные наборы из k элементов множества X, причем важен их порядок, а элементы могут повторяться. Таких различных наборов будет

$$A_n^k = n^k$$

СОЧЕТАНИЯ – линейно упорядоченные наборы из k различных элементов множества X, причем их порядок не важен. Таких различных наборов будет

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Относительной частотой появления события называют отношение числа исходов, когда событие произошло, к общему числу испытаний

$$\nu(A) = \frac{m(A)}{n}$$

Частота появления события считается после испытания, а вероятность появления события – до испытания. При неограниченно растущем числе испытаний n, относительная частота появления события стремится к вероятности появления события

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \nu_n(A)$$

Это определение вероятности носит название статистического. Перечисленные ранее свойства вероятности случайного события сохраняются и при статистическом определении данной величины

Пример 1. Лабораторная крыса помещена в лабиринт, в котором лишь один из четырех возможных путей ведет к поощрению в виде пищи. Определите вероятность выбора крысой такого пути.

Решение: по условию задачи из четырех равновозможных случаев (n=4) событию A (крыса находит пищу) благоприятствует только один, т.е. m = 1

Тогда $P(A) = P$ (крыса находит пищу) = $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$ = 0,25 или 25%.

Пример 2. При врачебном обследовании 500 человек у 5 из них обнаружили опухоль в легких (о.л.). Определите относительную частоту и вероятность этого заболевания.

Решение: по условию задачи $M = 5$, $N = 500$, относительная частота P^*(о.л.) = M/N = 5/500 = 0,01; поскольку N достаточно велико, можно с хорошей точностью считать, что вероятность наличия опухоли в легких равна относительной частоте этого события:

P(о.л.) = P^*(о.л.) = 0,01 или 1%.

Пример 3. Имеется 8 карточек; одна сторона каждой из них чистая, а на другой записаны буквы; И, Я, Л, З, Г, О, О, О. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемащивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, что при последовательном появлении букв будет составлено слово ЗООЛОГИЯ?

Решение: Обозначим событие: В – будет составлено слово ЗООЛОГИЯ. Общее число исходов испытания равно n = P_8 = 8! = 40320.

Пронумеруем все карточки в соответствии с местами, которые занимают буквы в слове ЗООЛОГИЯ. Будем считать, что буквы З, Л, Г, И, Я написаны соответственно на карточка 1, 4, 6, 7, 8. Буква О написана на карточках 2, 3 и 5. Закрепим буквы З, Л, Г, И, Я на местах 1, 4, 6, 7, 8. А карточки 2, 3 и 5 будем менять местами (варианты: 2 – 3 – 5; 2 – 5 – 3; 5 – 3 – 2; 5 – 2 – 3; 3 – 2 – 5; 3 – 5 – 2). В результате таких изменений будем получать слово ЗООЛОГИЯ. Таким образом, число исходов испытания, благоприятствующих событию В, равно m = P_3 = 3! = 6.

Вероятность событий В равна Р(В) = 6/40320 = 1/6720

Пример 4. Сколько билетов можно составить из 25 вопросов, если билет содержит 3 вопроса.

Решение: В билет произвольным образом отбирается 3 вопроса из списка в 25 вопросов, при этом порядок следования вопросов также произвольный, поэтому

$C_{25}^3 = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{6} = 2300$, т.о. можно составить 2300 билетов.

Пример 5. Сколько сигналов можно подать, вывешивая по 3 флага на мачте, если всего имеют 4 флага (белый, красный, синий, зеленый).

Решение: Из 4-х различных по цвету флагов выбирают 3 флага, при этом, меняя последовательность следования флагов различных по цвету (например, красный-белый-зеленый и белый-красный-зеленый) передают различные сигналы, т.е. важен и состав и порядок расположения элементов, тогда $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, следовательно, используя только 3 флага из 4, можно передать 24 сигнала.

Правило суммы. Если объект А может быть выбран из совокупности объектов n способами, а объект В – m способами, то выбрать либо объект А, либо объект В можно $n+m$ способами.

Пример 6. В вазе 5 груш и 4 яблока (объект А – груша, объект В – яблоко). Сколько существует способов выбрать один из фруктов.

Решение. Существует 5 способов выбрать грушу и 4 способа выбрать яблоко, поэтому выбрать либо грушу, либо яблоко можно 9 способами.

Правило произведения. Если объект А может быть выбран из совокупности объектов n способами, а объект В – m способами, то выбрать совокупность объектов (АВ) можно $n \cdot m$ способами.

Пример 7. В вазе 5 груш и 4 яблока. Выбрать одновременно грушу и яблоко (совокупность объектов (АВ)) можно $5 \cdot 4 = 20$ способами.

Пример 8. В ящике 50 деталей, из них 4 детали бракованных. Из ящика берут 10 деталей произвольным образом. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) две бракованных детали.

Решение. Задача по классическому определению вероятностей $p(A) = \frac{m}{n}$.

а) Из 50 деталей случайным образом отбираются 10 деталей, очевидно, что $n = C_{50}^{10}$. Так как в 10 отобранных деталей не попадает ни одной бракованной, то $m = C_{46}^{10}$.

$$p(A) = \frac{C_{46}^{10}}{C_{50}^{10}} = 0,397$$

.

б) Общее число исходов не меняется $n = C_{50}^{10}$. Число исходов, при которых среди 10 отобранных деталей 2 бракованных, равно $m = \frac{C_4^2 \cdot C_{46}^8}{C_{50}^{10}} = 0{,}152$.

Задачи для решения на практическом занятии:

1. Для определения всхожести семян взяли пробу из 1000 единиц. Из отобранных семян 115 не взошло. Какова вероятность, что первое наудачу взятое семя не взойдёт? Каков процент всхожести семян?

2. В ящике 250 яиц, из них 20 бракованных. Какова вероятность, взятое из ящика яйцо будет бракованным?

3. В бассейне содержится 8 лещей и 12 карпов. Какова вероятность, что наудачу выловленная рыба окажется карпом? Лещом? Какую рыбу вероятнее всего выловить?

4. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 1000 штук. 980 семян дали нормальный всход. Найдите частоту нормального всхода семян.

5. Среди 500 ампул, проверенных на герметичность, оказалось 10 в которых имеются трещины. Определить частоту появления ампул имеющих трещины.

6. Среди 1000 яиц 250 бракованных. Определить частоту появления брака. Сколько будет бракованных яиц в повторной выборке объёмом 350 яиц?

7. В клетке содержат 6 белых и 4 серых мышей. Какова вероятность достать из клетки: а) 1 белую мышь; б) 5 серых мышей?

8. Вероятность того, что завтра день будет дождливый, равна 0,7. Найти вероятность того, что день будет ясный.

9. На 5 из 15 участках засорённость выше нормы. Найти вероятность того, что на участке, выбранном наудачу, засорённость сорняками в пределах нормы.

10. Имеется 6 саженцев 1 сорта и 4 саженца 2 сорта. Наудачу берут один саженец. Какова вероятность того, что он окажется 1-ого сорта?

11. Сколькими способами можно разместить 12 мышей, занумерованных от 1 до 12, в четырех клетках A, B, C, D по три мыши в каждой?

12. В распоряжении агрохимика имеется шесть различных типов минеральных удобрений. Ему необходимо провести эксперименты по изучению совместного влияния любой тройки минеральных удобрений. Сколько всего экспериментов ему придется провести, если: а) порядок внесения удобрений несущественен? б) существенен?

13. Для лечения некоторой хронической болезни применяются пять лекарства a, b, c, d, e. Врач хочет провести сравнительное исследование трех из этих пяти лекарств. Три исследуемых лекарства врач отбирает из данных пяти случайным образом. Чему равна вероятность того, что: а) лекарство a будет исследовано? б) будут исследованы лекарства a и b? в) будет исследовано по крайней мере одно из лекарств a и b?

14. Классифицируются n особей r признакам, $n \geq r$. Найдите вероятность того, что никакие две особи не принадлежат к одному и тому же классу. Все возможные распределения особей по классам равновероятны.

15. На полке в почвенной лаборатории случайно смешаны бюксы с различными образцами почвы: 8 бюксов с влажной почвой и 6 – с сухой. Найти вероятность того, что 3 из 5 наудачу взятых с этой полки бюксов будут с сухой почвой.

16. При определении в схожести партии семян взяли пробу из 1000 единиц. Из отобранных семян не взошло 90. Какова относительная частота появления всхожего семени?

17. Для проведения исследований на некотором поле взяли случайную выборку из 200 колосьев пшеницы. Относительная частота (частность) колосьев, имеющих по 12 колосков в колосе, оказалось равной 0,125, а по 18 ко-

лосков – 0,05. Найти для этой выборки частоты колосьев, имеющих по 12 и по 18 колосков.

18. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. Случайным образом отобрали 9 студентов. Какова вероятность: а) среди них 5 отличников? б) среди них не менее 5-ти отличников?

Тема 2. Модель равновероятных элементарных событий

Вероятность суммы двух любых случайных событий равна

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB).$$

Если два случайных события несовместны $p(AB) = 0$, то

$$p(A+B) = p(A) + p(B).$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны, то

$$p(A_1 + A_2 + ... + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n).$$

Пример 1. В коробке находятся 5 чёрных, 10 белых и 3 красных шара. Наудачу достаём один шар. Какова вероятность, что шар будет белый или красный?

Решение: А – событие, что шар чёрный. В – событие, что шар белый; С – событие, что шар красный.

В + С – это событие, что шар будет белый или красный.

Все три события несовместны, т.к. например, если мы случайно достаём красный шар, то он не может быть одновременно чёрным или белым.

Для события А: число благоприятствующих исходов $m_1 = 5$, для В: число благоприятствующих исходов $m_2 = 10$, для С: число благоприятствующих исходов $m_3 = 3$. Общее число исходов для всех трёх событий $n = 18$.

Р (В + С) = 10/18 + 3/18 = 13/18 = 0,72 или 72%

Пример 2. При определении гранулометрического состава почв было выявлено, что среди 12 образцов имеются 3 образца супесчаной, 4 – глинистой и 5 образцов суглинистой почвы. Найти вероятность того, что 2 определенных образца (например, помеченные номерами 1 и 2) при классификации по гранулометрическому составу могут быть отнесены к одной и той же группе.

Решение: Пусть взяли 2 определенных образца из 12 имеющихся.

Рассмотрим события:

A_1 – взяли 2 образца супесчаной почвы;

A_2 – взяли 2 образца глинистой почвы;

A_3 – взяли 2 образца суглинистой почвы;

A – взяли 2 образца, которые могут быть отнесены к одной и той же группы гранулометрического состава.

A_1, A_2, A_3- несовместные события. Событие А наступит, если образцы будут или оба супесчаные, или оба глинистые, или оба суглинистые. Это означает, что событие А является суммой 3 не совместимых событий A_1, A_2 **и** A_3**:**

$$\mathbf{A= A_1+A_2+A_3.}$$

Вероятность события А найдем по теореме сложения вероятностей нескольких событий. **P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).**

Каждое из слагаемых P(A_1), P(A_2), P(A_3) найдем по формуле вероятности:

$$\mathbf{P(A_1)= m_1/ n,\ P(A_2)= m_2/n,\ P(A_3)=m_3/n.}$$

Числа n, m_1, m_2 и m_3 определим по формуле теории соединений.

Всего имеется 12 образцов – 12 элементов. В каждое соединение входят 2 элемента, соединения отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, причем порядок элементов роли не играет. Следовательно, рассматриваемые соединения представляют собой сочетания. Найдем n, m_1, m_2 и m_3:

$$\mathbf{n=C_{12}^2=\frac{12!}{2!*10!}=66,\ m_1=C_3^2=3,\ m_2=C_4^2=\frac{4!}{2!*2!}=6,\ m_3=C_5^2=\frac{5!}{2!*3!}=10.}$$

Вероятности событий A_1, A_2 и A_3 равны:

$\mathbf{P}(A_1)=\frac{C_3^2}{C_{12}^2}$; $\mathbf{P}(A_2)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}$; $\mathbf{P}(A_3)=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}$.

Вероятность события A равна

$\mathbf{P(A)}=\frac{C_3^2}{C_{12}^2}+\frac{C_4^2}{C_{12}^2}+\frac{C_5^2}{C_{12}^2}=\frac{C_3^2+C_4^2+C_5^2}{C_{12}^2}=\frac{3+6+10}{66}=\frac{19}{66}$=0,2879 или 28,79%

Пример 3. В зависимости от наличия сырья предприятие может отправить заказчикам в сутки определённое количество продукции от 1 до 100 ед. Найти вероятность того, что полученное количество продукции можно распределить без остатка:

a) 3-м заказчикам (событие A);

b) 4-м заказчикам (событие B);

c) 12-ти заказчикам (событие C);

d) 3-м или 4-м заказчикам (событие D).

Решение: $P(A)=\frac{33}{100}$, $P(B)=\frac{25}{100}$,

C=A$\cap$B, D=A$\cup$B.

$P(A\cdot B)=\frac{8}{100}$.

События A и B совместные $\Rightarrow$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=\frac{33}{100}+\frac{25}{100}-\frac{8}{100}=\frac{1}{2}.$$

<u>Задачи для решения на практическом занятии:</u>

1. Некоторая популяция растений состоит из трёх видов. Численность каждого вида соответственно 200, 600, 50. Случайно выбирают одно растение. Какова вероятность, что это растение 2-го или 3-го вида?

2.В стаде крупного рогатого скота 15 % животных болеют маститом, 10 % туберкулёзом, а остальные здоровы. Для обследования выбирают одно животное. Какова вероятность, что оно больное? (Считать события несовместными).

3. В некоторой популяции плодовой мушки, 25 % мух имеют мутацию глаз, 50 % мутацию крыльев. Какова вероятность того, что у случайно выбранной мухи из этой популяции обнаружится мутация? (События считать несовместными).

4. Известно, что в коробке среди деталей, поступающих к сборщику, находятся 80 деталей первого сорта, 200 деталей второго сорта и 1650 деталей третьего. Наудачу сборщик берет одну деталь. Какова вероятность, что она будет первого или второго сорта?

5. В искусственном бассейне содержится 20 лещей, 12 карпов, 15 окуней и 13 карасей. Наудачу вылавливают одну рыбу. Какова вероятность, что это лещ или окунь?

6. События А, В, С, Д образуют полную группу. Вероятности событий таковы:

Р (А) = 0,1, Р (В) = 0,4, Р (С) = 0,3. Чему равна вероятность события Д?

7. На опытной делянке для рассады растёт 20 % роз, 10 % гладиолусов, 38 % астр, а остальные флоксы. Наудачу берут один кустик рассады. Какова вероятность, что это будет флокс?

8. Посевная годность семян разделяются по ГОСТу на 1, 2, 3 классы и некондиционные семена. Известно, что в пробе из 100 зёрен находятся 30 семян 1 класса, 25 – 2-го, 15 – 3-го, а остальные некондиционные. Наудачу из пробы выбирается одно зерно. Какова вероятность, что это зерно 1 или 2 класса? Какова вероятность, что это будет некондиционное зерно?

9. Имеются 14 таблиц, содержащих данные о влажности на различной глубине тяжелосуглинистой черноземной почвы. В 6 из этих таблиц приведены данные полученные методом горячей сушки образцов при 105 градусов, а в остальных – методом холодной сушки над P_2O_5. Какова вероятность того, что среди 3 случайным образом отобранных таблиц хотя бы одна таблица содержит данные, полученные методом горячей сушки?

Тема 3. Условная вероятность и независимость
Формулы Байеса, Бернулли, Пуассона

Условной вероятностью называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило $P(B/A)$.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Два события называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, т.е. $P(A) = P(A/B)$ и $P(B) = P(B/A)$.

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot p(\overline{A}_n).$$

Группа гипотез – полная группа несовместных событий (пусть это будет H_1, H_2, …, H_n). Пусть событие А может наступить лишь при появлении одного из них. Тогда вероятность события А вычисляется по формуле:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i),$$

которая называется формулой полной вероятности.

Здесь: $P(H_i)$ - вероятности гипотез;

$P(A/H_i)$ -условные вероятности события А.

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одной из гипотез H_i $(\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}})$. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле *Байеса*:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}$$

Рассмотрим стохастический эксперимент, состоящий в проведении n независимых, однородных испытаний, в результате каждого из которых может событие А может произойти с вероятностью p и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность того, что событие А произойдет ровно m раз в результате n испытаний, определяется по *формуле Бернулли*

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Вероятность события, заключающегося в том, что при n испытаниях событие А появится не менее m_1 и не более m_2, вычисляется по формуле

$$p_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}$$

При достаточно большом n и не слишком малых p и q (p и, соответственно, q не близки к 0 и 1) для вычисления вероятности используют локальную формулу Муавра – Лапласа:

$$p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Эта формула также табулирована (приложение 1), $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Вероятность того, что при указанных условиях событие А появится не менее m_1 и не более m_2 раз, находится по интегральной формуле Муавра – Лапласа:

$$p_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

Функция Лапласа представляет собой не выражающийся через элементарные функции интеграл. Значения функции Лапласа приведены в приложении 2.

Свойства функции Лапласа:

1) функция монотонно возрастает, т.е. $\Phi(x_1) < \Phi(x_2)$ при $x_1 < x_2$;

2) $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\pm\infty) = \pm 0{,}5$;

3) функция Лапласа является нечетной $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

4) значения функции приближаются к асимптотическому значению при $x \ge 5$ $\Phi(x) \approx 0,5$.

Пусть в схеме испытаний Бернулли число испытаний n неограниченно увеличивается, а вероятность наступления события в каждом испытании $p = p(A)$ близка нулю, но при этом величина $a = np$ остается постоянной. В этом случае вероятность появления события А при n испытаниях m раз определяется *Пуассоновским* приближением формулы Бернулли

$$p_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Эта формула дает хорошее приближение при $a = np < 10$, параметр a означает среднее число появлений события на некотором интервале.

Вероятность события, заключающегося в том, что при n испытаниях событие А произойдет не более k раз вычисляется по формуле

$$p_n(m \le k) \approx e^{-a} \sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!}.$$

Отметим, что последние две формулы табулированы (приложение 3).

Пример 1. Рассмотрим два события: А - попадание частицы в левую половины фотопластинки. В – попадание частицы в нижнюю половину фотопластинки. События А и В имеют вероятности $1/2$. Событие АВ, соответствующее попаданию частицы в пересечение А и В, т.е в левый нижний угол фотопластинки, имеет вероятность $1/4$. Поскольку $1/4 = 1/2 \cdot 1/2$, т.е. P(AB) = P(A) P(B), события А и В независимы.

Пример 2. Рацион с пониженным содержанием йода вызывает увеличение щитовидной железы у 60% животных большой популяции. Для эксперимента нужны 4 увеличенных железы. Найдите вероятность того, что у 4 случайно выбранных животных будет увеличенная щитовидная железа.

Решение: Случайное событие A – выбор наугад животного с увеличенной щитовидной железой. По условию задачи вероятность этого события $P(A)$ = 0,6 = 60%. Тогда вероятность совместного появления четырех незави-