ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Основные понятия и определения

Равенство двух математических выражений A и B:

$$A = B,$$

не являющееся тождеством на множестве допустимых значений буквенных величин, входящих в это равенство, называют *уравнением* на этом множестве.

Под множеством допустимых значений уравнения, если нет специальной оговорки, понимают множество числовых значений буквенных величин, входящих в выражения A и B, при которых они одновременно имеют смысл.

Следует иметь в виду, что одно и то же равенство может быть, как уравнением, так и тождеством в зависимости от того, на каком оно множестве рассматривается.

Перейдем к более современной трактовке этого понятия.

📖 **<u>Определение 1.1.1.</u>** *Уравнение* — аналитическая запись задачи об отыскании значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны.

📖 **<u>Определение 1.2.1.</u>** *Уравнением с одной переменной* называется равенство, содержащее эту переменную (её ещё называют *неизвестной*).

Решить уравнение

$$f(x) = g(x) \qquad (*)$$

означает найти все такие числа a, для которых справедливо равенство $f(a) = g(a)$, или доказать, что таких чисел не существует. Число a называется *корнем* (*решением*) уравнения (*).

Таким образом, решить уравнение (*) — означает найти множество всех его решений (корней).

Множество всех решений уравнения (*) принадлежит *области допустимых значений* (ОДЗ) этого уравнения, то есть пересечению области определения функции $f(x)$ и области определения функции $g(x)$.

$$\text{ОДЗ} = D(f) \cap D(g).$$

<u>Замечание 1.1.1.</u> Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения, называется множество всех значений переменной, при которых обе части уравнения имеют смысл.

📖 **<u>Определение 1.3.1.</u>** *Равносильными* (*эквивалентными*) называют два $f_1(x) = g_1(x)$ (1) и $f_2(x) = g_2(x)$ (2) (или несколько) уравнения с одной переменной, если множества их корней совпадают.

Пишут:

$$f_1(x)=g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x)=g_2(x).$$

Иными словами, два уравнения называют равносильными, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

📖 **Определение 1.4.1.** Если каждый корень уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ является в то же время корнем уравнения $f_2(x)=g_2(x)$, полученного с помощью некоторых преобразований из уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, то уравнение $f_2(x)=g_2(x)$ называется *следствием* уравнения $f_1(x)=g_1(x)$.

Иными словами, если каждый корень уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ является в то же время корнем уравнения $f_2(x)=g_2(x)$, но не наоборот, то уравнение (2) называют следствием уравнения (1).

Замечание 1.2.1. Если каждое из двух уравнений является следствием другого, то такие уравнения являются равносильными.

§ 1.2. Совокупность уравнений

📖 **Определение 1.2.1.** Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность* уравнений, если ставится задача об отыскании всех таких значений переменной, каждое из которых удовлетворяет, по крайней мере, одному из заданных уравнений.

Пример 1.2.1.

$$\left[\begin{array}{l} 2x+5=3x-1, \\ x^2=4x-2. \end{array}\right.$$

📖 **Определение 1.2.2.** *Решением совокупности* нескольких уравнений является объедение множеств корней уравнений, составляющих данную совокупность.

Процесс решения любого уравнения можно представить следующим образом: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем уравнение (1); уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое, чем уравнение (2), и т.д.

В итоге получают достаточно простое уравнение и находят его корни. В этот момент и возникает главный вопрос: совпадает ли множество найденных корней последнего уравнения с множеством корней исходного уравнения (1)? Если все преобразования были равносильными, т.е. если были равносильны уравнения (1) и (2), (2) и (3), (3) и (4) и т.д., то ответ на поставленный вопрос положителен. Это значит, что, решив последнее уравнение цепочки, мы тем самым решим и первое (исходное) уравнение цепочки. Если же некоторые преобразования были равносильными, а в некоторых мы не уверены, но точно знаем, что переходили с их помощью к уравнениям-следствиям, то однозначного ответа на поставленный вопрос мы не получим.

Чтобы ответ на вопрос был более определенным, нужно все найденные корни последнего уравнения цепочки проверить, подставив их поочередно в исходное уравнение (1). Если проверка показывает, что найденный корень последнего уравнения цепочки не удовлетворяет исходному уравнению, его называют *посторонним корнем*; естественно, что посторонние корни в ответ не включают.

📖 **Определение 1.2.3.** Если при выполнении преобразований уравнение $f_1(x)=g_1(x)$ свелось к уравнению $f_2(x)=g_2(x)$ (или совокупности уравнений), некоторые корни которого (которой) не являются корнями уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, то эти корни уравнения $f_2(x)=g_2(x)$ называются *посторонними корнями* уравнения $f_1(x)=g_1(x)$.

Пример 1.2.2. Если возвести обе части уравнения $\sqrt{x}=-x$ в квадрат, то получим уравнение $x=x^2$, которое имеет два корня $x_1=0, x_2=1$. Но проверка показывает, что корень $x_2=1$ является посторонним, так как приводит к неверному числовому равенству $1=-1$.

Термин «более простое уравнение» вообще говоря, не поддаётся, точному описанию. Обычно считают одно уравнение более простым, чем другое, по чисто внешним признакам (известен способ решения уравнения). Мы понимаем характеристику «более простое» уравнение как уравнение, способ решения которого более известен человеку. Это субъективная характеристика.

В итоге можно сказать, что решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа:

1) осуществляют преобразования по схеме (1), (2), (3), (4), ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки;
2) анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными;
3) если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Таким образом, в ходе решения мы задаёмся следующими вопросами:

- как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?
- какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?
- если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?
- в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на теоремах о равносильности.

Любой член уравнения можно переносить из одной его части в другую с противоположным знаком.

Обе части уравнения можно возводить в одну и ту же нечетную степень.

Обе части уравнения $f(x)=g(x)$ *можно умножать на одно и то же число, отличное от нуля, или выражение h(x), которое имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения* $f(x)=g(x)$ *и нигде в этой области не обращается в нуль.*

Обе части уравнения $f(x)=g(x)$ *можно возводить в одну и ту же чётную степень, если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *неотрицательны в области определения уравнения.*

Если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из двух последних теорем, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в их формулировках, то получится уравнение-следствие. Возможные причины перехода к уравнению-следствию (расширения области определения уравнения):

1) Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.

2) Освобождение в процессе решения уравнения от знаков радикалов (корней) четной степени.

Подведем итоги. Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, обязательна проверка всех найденных корней, если:

1) произошло расширение области определения уравнения;

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Если проверка корней с помощью их подстановки в исходное уравнение сопряжена со значительными вычислительными трудностями, то ищут «обходные пути» проверки. И самый легкий обходной путь проверки — это нахождение области определения (ОДЗ) заданного уравнения.

В некоторых случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней.

📖 **<u>Определение 1.2.4.</u>** Если при выполнении преобразований уравнение $f_1(x)=g_1(x)$ свелось к уравнению $f_2(x)=g_2(x)$ (или совокупности уравнений), некоторые корни уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ не являются корнями уравнения $f_2(x)=g_2(x)$, то в таких случаях говорят о *потере корней*.

Пример 1.2.3. Уравнение $(x-1)^2 = x-1$ имеет два корня $x_1 = 2, x_2 = 1$. Если обе части уравнения разделить на выражение $x-1$, то получим уравнение $x-1=1$, которое имеет только один корень $x_1 = 2$. Таким образом, при делении обеих частей уравнения произошла потеря корня.

Потеря корней происходит по двум причинам:
1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);
2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

Чтобы избежать действий, соответствующих первой причине, нужно приучать себя переходить от уравнения $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ к уравнению $h(x)\big(f(x)-g(x)\big) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x)=0, \\ f(x)=g(x) \end{array}\right.$, а не к уравнению $f(x) = g(x)$.

Нельзя допускать путаницы в двух понятиях: *совокупность уравнений* и *система уравнений*, которые играют важную роль в элементарной математике.

📖 **Определение 1.2.5.** Совокупность двух и более уравнений $A_1 = B_1, A_2 = B_2, \ \ldots \ A_n = B_n$, рассматриваемых совместно, называется *системой уравнений* и записывают

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = B_n. \end{cases}$$

Классификацию систем (их названия) обычно проводят по числу и характеру уравнений, входящих в систему. Например,

а) $\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ 2x = 3 + \dfrac{1}{x} \end{cases}$

— система двух рациональных уравнений с одним неизвестным;

б) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

— система двух уравнений первой степени (линейных) с двумя неизвестными;

в) $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 2, \\ 3x^2 - xy = 4 + z \end{cases}$

— смешанная система двух уравнений с тремя неизвестными (одно уравнение — иррациональное, а другое — рациональное), или просто — алгебраическая система двух уравнений с тремя неизвестными.

Упорядоченный набор значений неизвестных системы, принадлежащих её множеству допустимых значений и удовлетворяющих всем уравнениям системы одновременно, принято называет *решением системы*.

Решить систему — это значит найти множество всех её решений. Если система не имеет решений, то говорят, что она *противоречивая*, или *несовместная*.

Более подробное знакомство с системами уравнений, методами их решения произойдет в следующей части пособия.

§ 1.3. Уравнения с одной переменной и их классификация

Уравнения с одной переменной можно условно разделить на несколько больших групп:

Рациональные уравнения (алгебраические и дробно-рациональные).

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

Иррациональные уравнения.

Трансцендентные уравнения (показательные, логарифмические, тригонометрические).

Уравнения, содержащие параметр.

Комбинированные уравнения.

🕮 **Определение 1.3.1.** Уравнение $f(x)=g(x)(1)$ называется *алгебраическим*, если $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены. Оно называется дробно-рациональным, если $f(x)$ и $g(x)$— рациональные функции, причём, хотя бы одна из них дробно-рациональна относительно x.

Замечание 1.3.1. Уравнение вида $\dfrac{p(x)}{q(x)}=0, q(x)\neq 0$ называется *рациональным*.

Методы решения рациональных уравнений:

Метод разложения на множители.

Метод введения новой переменной.

Метод разложения на элементарные дроби.

Метод выделения полного квадрата.

Метод использования однородности уравнения относительно некоторой функции.

Метод сведения уравнения к системе более простых уравнений.

Более подробно эти методы будут рассмотрены в подпунктах **§ 1.9.**

Перейдём далее к классификации рациональных уравнений.

1.3.1. Линейные уравнения

🕮 **Определение 1.3.1.1.** *Линейным уравнением* с неизвестными x, y, ..., z называется уравнение вида:

$$ax+by+...+cz=d, \qquad (1)$$

где коэффициенты a, b , ..., c и свободный член d — числа (или некоторые функции параметров).

🕮 **Определение1.3.1.2.** *Линейное уравнение с одним неизвестным* имеет следующий вид:

$$ax=b, \qquad (2)$$

где a и b — числа.

Случай 1°. $a \neq 0$. В этом случае уравнение (2) имеет единственное решение (выполнимость деления):

$$x=\frac{b}{a}.$$

Случай 2°. $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнение не имеет решений. В самом деле, $0x = 0$ при произвольном x; следовательно, если $b \neq 0$, то равенство (2) не может выполняться ни при каком значении x.

Случай 3°. $a = b = 0$. В этом случае уравнение (2) примет вид $0x = 0$ и удовлетворяется тождественно; его решением служит произвольное число x.

1.3.2. Квадратные уравнения

🕮 **Определение1.3.2.1.** Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где $a,b,c-const$, $a \neq 0$, называется *квадратным уравнением*.

Замечание 1.3.2.1.

1) если $a=1$, то уравнение называется *приведённым*;
2) если $a \neq 1$,то уравнение не является приведённым;
3) если $b \neq 0, c \neq 0$, то уравнение называется *полным*;
4) если $b=0$ или $c=0$, или $b=c=0$, то уравнение называется *неполным*:

а) Если $b=0$, то уравнение принимает вид $ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$:

если $c>0, a>0$ или $c<0, a<0$, то уравнение решений не имеет;

если $c>0, a<0$ или $c<0, a>0$, то уравнение имеет два решения

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

б) Если $c=0$, то уравнение принимает вид $ax^2+bx=0$ или $x(ax+b)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-\frac{b}{a}\cdot \end{array}\right.$$

в) Если $b=c=0$, то уравнение принимает вид $ax^2=0$. Оно имеет единственное решение $x=0$.

Вывод формулы корней квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0\,\Big|:a\neq 0.$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

В левой части уравнения выделяем полный квадрат

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0.$$

$$\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Выражение b^2-4ac называется *дискриминантом* (от лат. «различитель»). Обозначение: $D=b^2-4ac$.

Тогда

$$\left(x+\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{b-\sqrt{D}}{2a}=0,\\ x+\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}.\end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},\\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}.\end{array}\right.$$

Замечание 1.3.2.2.

Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два различных корня.

Если $D=0$, то уравнение имеет один (кратный) корень $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Если $D<0$, то уравнение не имеет решений.

Замечание 1.3.2.3.
Уравнение имеет ***два различных положительных корня***, если

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} < 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Уравнение имеет ***два различных отрицательных корня***, если

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Уравнение имеет ***два разных по знаку корня***, если

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} < 0, \\ D > 0, \end{cases}$$

и при этом $\dfrac{b}{a} < 0$, то положительный корень по модулю больше; но при $\dfrac{b}{a} > 0$ отрицательный корень по модулю больше положительного корня.
Уравнение имеет ***два равных по модулю корня***, если

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} < 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Замечание 1.3.2.4. Если $b = 2k$ (т.е. второй коэффициент квадратного уравнения — чётное число), то формула корней квадратного уравнения может быть усовершенствована.

Итак, уравнение имеет вид $ax^2 + 2kx + c = 0$.

$$D = 4k^2 - 4ac = 4\left(k^2 - ac\right) \Rightarrow D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac.$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

Теорема 1 (Виета). Если x_1, x_2—два действительных различных корня квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (или $x^2 + px + q = 0$), то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = q. \end{cases}$$

Доказательство.

Так как x_1, x_2 — два действительных различных корня квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Найдём значение суммы $x_1 + x_2$:

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$ (для приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, очевидно, будем иметь $x_1 + x_2 = -p$).

Теперь найдём значение произведения $x_1 \cdot x_2$:

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{b^2 - D}{4a^2} = \dfrac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \dfrac{-4ac}{4a^2} = -\dfrac{c}{a}$ (для приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, очевидно, будем иметь $x_1 \cdot x_2 = q$).

<u>Теорема 2 (обратная теорема Виета)</u> Если числа $p = -\left(x_1 + x_2\right)$ или $b = -a\left(x_1 + x_2\right)$ и $q = x_1 x_2$ (или $c = a x_1 x_2$), то числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ (или $ax^2 + bx + c = 0$).

<u>Пример 1.3.2.1.</u> Не решая уравнения $x^2 + 4x - 10 = 0$, найти $x_1^3 + x_2^3$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

<u>Решение.</u> По теореме Виета $x_1 + x_2 = -4,\quad x_1 x_2 = -10$. Выразим $x_1^3 + x_2^3$ через $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$. Применим сначала формулу суммы кубов, а потом формулу квадрата суммы двух чисел и получим:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right) = \\ &= \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 x_2\right) = \\ &= \left(x_1 + x_2\right)\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\right). \end{aligned}$$

Вычислим теперь

$$x_1^3 + x_2^3 = -4 \cdot \left(\left(-4\right)^2 - 3 \cdot \left(-10\right)\right) = -4 \cdot \left(16 + 30\right) = -184.$$

Ответ: $x_1^3 + x_2^3 = -184$.

<u>Пример 1.3.2.2.</u> Не решая уравнения $x^2 + 4x + 2 = 0$, найти $\left|x_1 - x_2\right|$, где x_1, x_2 — корни данного уравнения.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -4, \quad x_1x_2 = 2$. Выразим $(|x_1 - x_2|)^2$ через $x_1 + x_2$ и x_1x_2.

$$(|x_1 - x_2|)^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 + x_2^2 =$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2.$$

Итак,

$$(|x_1 - x_2|)^2 = (-4)^2 - 4 \cdot 2 = 8.$$

Так как $|x_1 - x_2| \ge 0$, то $|x_1 - x_2| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

§ 1.4. Уравнения, сводящиеся к квадратному уравнению

1.4.1. Биквадратные уравнения

📖 **Определение 1.4.1.1.** Уравнение вида $ax^n + bx^k + c = 0$, где $a \ne 0,\ b \ne 0,\ c \ne 0,\ a,b,c - const,\ \ n > k$ называется *трёхчленным уравнением.*

📖 **Определение 1.4.1.2.** Трёхчленное уравнение $ax^n + bx^k + c = 0$ при k=2, n=2k называется *биквадратным уравнением.* Биквадратное уравнение имеет вид $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Решается биквадратное уравнение с помощью подстановки $t = x^2$.

Данное уравнение сводится к квадратному $at^2 + bt + c = 0$. Если $t_1 \in R, t_2 \in R$ — корни квадратного уравнения, то делается переход к совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = t_1, \\ x^2 = t_2. \end{array}\right.$$

Возможны случаи:

Биквадратное уравнение имеет 4 корня, если $t_1 > 0, t_2 > 0$.

Биквадратное уравнение имеет 2 корня, если $t_1 > 0, t_2 < 0$ или $t_1 < 0, t_2 > 0$.

Биквадратное уравнение не имеет решений, если $t_1 < 0, t_2 < 0$.

Пример 1.4.1.1. Решить уравнение

$$x^4 - x^2 - 72 = 0.$$

Решение. Положим $t = x^2$. Уравнение примет вид $t^2 - t - 72 = 0$. По теореме Виета его конями будут числа $t_1 = 9, t_2 = -8$. Получаем совокупность из двух более простых уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ x^2 = -8. \end{array}\right.$

Очевидно, что корнями первого из этих уравнений будут числа $x_{1,2} = \pm 3$, а второе уравнение совокупности действительных корней не имеет.

Ответ: ± 3.

Пример 1.4.1.2. Решить уравнение

$$81x^4 - 45x^2 + 4 = 0.$$

Решение. Положим $x^2 = t$, причем $t > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$81t^2 - 45t + 4 = 0.$$

Найдем дискриминант и корни полученного уравнения:

$$\text{D} = 45^2 - 4 \cdot 81 \cdot 4 = 2025 - 1296 = 729 = 27^2.$$

$$t = \frac{45 \pm 27}{2 \cdot 81};\ t_1 = \frac{45 - 27}{2 \cdot 81} = \frac{1}{9};\ t_2 = \frac{45 + 27}{2 \cdot 81} = \frac{4}{9}.$$

Так как $x^2 = t$, то

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{3},\ x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x_{3,4} = \pm \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\pm \frac{1}{3};\ \pm \frac{2}{3}$.

Замечание 1.4.1.1. Для решения трёхчленного уравнения вида $ax^{2k} + bx^k + c = 0$ используют подстановку $t = x^{2k}$, после чего оно тоже превращается в квадратное уравнение.

С помощью замены переменной к биквадратным уравнениям сводятся некоторые другие уравнения.

Пример 1.4.1.3. Решить уравнение

$$(6x+5)^2 \cdot (3x+2) \cdot (x+1) = 35.$$

Решение. В левой части уравнения поступим следующим образом: умножим содержимое второй скобки на 2, содержимое третьей скобки — на 6. Тогда, чтобы не нарушить равенство правую часть уравнения надо умножить на 12.

Получаем уравнение вида

$$(6x+5)^2 \cdot (6x+4) \cdot (6x+6) = 35 \cdot 12.$$

Далее полагаем, что $y=6x+5$.

В результате имеем уравнение вида

$$y^2 \cdot (y-1) \cdot (y+1) = 420$$

или

$$y^2 \cdot \left(y^2 - 1\right) = 420,$$

которое фактически является биквадратным уравнением.

Положим лишь, что $z=y^2$.

Далее решаем квадратное уравнение

$$z^2-z-420=0.$$

Получаем

$$\left[\begin{array}{l} z_1=21, \\ z_2=-20. \end{array}\right.$$

Ясно, что уравнение $y^2=-20$ не имеет действительных решений, поэтому остается решить только уравнение $y^2=21$.

Значит,

$$y=\pm\sqrt{21}.$$

Откуда получаем

$$6x+5=\pm\sqrt{21}.$$

Окончательно получаем

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{6}.$$

Ответ: $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{6}$.

1.4.2. Уравнения вида $\left(ax^2+bx+c_1\right)\left(ax^2+bx+c_2\right)=A,\ a\neq 0,\ b\neq 0$

Такие уравнения решаются с помощью замены переменной $y=ax^2+bx$, после чего получается квадратное уравнение относительно переменной y. В результате уравнение примет вид

$$\left(y+c_1\right)\cdot\left(y+c_2\right)=A.$$

Пример1.4.2.1. Решить уравнение

$$\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2+x+2\right)=12.$$

Решение. Положим $y=x^2+x+1$. Уравнение примет вид $y\cdot\left(y+1\right)=12$. Или $y^2+y-12=0$. Его корнями являются числа $y_1=-4, y_2=3$. Поэтому будем иметь совокупность двух квадратных уравнений.

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=-4, \\ x^2+x+1=3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+5=0, \\ x^2+x-2=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=-2 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Ответ: – 2; 1.

1.4.3. Уравнения вида $\left(ax^2+b_1x+c\right)\left(ax^2+b_2x+c\right)=Ax^2,\ a\neq 0,\ c\neq 0$

При данных условиях число x=0 не является корнем, поэтому разделим обе части исходного уравнения на величину x^2, получим:

$$\left(ax+b_1+\frac{c}{x}\right)\cdot\left(ax+b_2+\frac{c}{x}\right)=A.$$

Сделаем замену переменной с помощью подстановки $ax+\frac{c}{x}=y$, получим уравнение вида $\left(y+b_1\right)\cdot\left(y+b_2\right)=A$. Оно является квадратным уравнением. Допустим, что $y_1, y_2\in R$— корни квадратного уравнения. Затем переходим к решению совокупности уравнений вида

$$\left[\begin{aligned}&ax+\frac{c}{x}=y_1,\\&ax+\frac{c}{x}=y_2.\end{aligned}\right.$$

<u>**Пример 1.4.3.1**</u>. Решить уравнение

$$\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+1\right)=9x^2.$$

<u>Решение</u>. Разделим обе части данного уравнения на величину x^2, получим уравнение

$$\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9.$$

Положим $2x+\frac{1}{x}=y$, после чего уравнение примет вид

$$\left(y-3\right)\cdot\left(y+5\right)=9$$

или

$$y^2+2y-24=0.$$

Его корнями будут числа $y_1=-6, y_2=4$.

Далее будем решать совокупность уравнений

$$\left[\begin{aligned}&2x+\frac{1}{x}=-6,\\&2x+\frac{1}{x}=4.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&2x^2+6x+1=0,\\&2x^2-4x+1=0.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2},\\&x_{3,4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2},\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

1.4.4. Уравнения вида $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)(a_4x+b_4)=A$

Представим данное уравнение в виде:

$$\left(x+\frac{b_1}{a_1}\right)\cdot\left(x+\frac{b_2}{a_2}\right)\cdot\left(x+\frac{b_3}{a_3}\right)\cdot\left(x+\frac{b_4}{a_4}\right)=\frac{A}{a_1a_2a_3a_4}.$$

Очень часто уравнение такого типа сводятся к уравнению вида **1.4.2.** после перемножения соответствующих скобок (попарного перемножения). Например, такое возможно в одном из следующих случаев:

1) $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}$;

2) $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_3}{a_3}=\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_4}{a_4}$;

3) $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_4}{a_4}=\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}$.

Пример 1.4.4.1. Решите уравнение

$$x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)=24.$$

Решение.

1. ОДЗ: $x\in R$
2. $(x^2+x)(x^2+x-2)=24$,
3. $x^2+x=y\Rightarrow y(y-2)=24$,

$y^2-2y-24=0$,

$$\left[\begin{aligned}y_1&=6,\\ y_2&=-4\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&x^2+x=6,\\ &x^2+x=-4; D<0.\end{aligned}\right.$$

Решаем оставшееся квадратное уравнение

$$x^2+x-6=0,$$

$$\left[\begin{aligned}x_1&=-3,\\ x_2&=2.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $x\in\{-3;2\}$.

1.4.5. Уравнения вида $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)(a_4x+b_4)=Ax^2$

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\left(x+\frac{b_1}{a_1}\right)\cdot\left(x+\frac{b_2}{a_2}\right)\cdot\left(x+\frac{b_3}{a_3}\right)\cdot\left(x+\frac{b_4}{a_4}\right)=\frac{A}{a_1a_2a_3a_4}\cdot x^2.$$

Весьма часто уравнения такого типа сводятся к уравнениям вида **1.4.3.** после попарного перемножения соответствующих скобок. Например, такое возможно в одном из следующих случаев:

1) $\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}+\dfrac{b_4}{a_4}$;

2) $\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_3}{a_3}=\dfrac{b_2}{a_2}+\dfrac{b_4}{a_4}$;

3) $\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_4}{a_4}=\dfrac{b_2}{a_2}+\dfrac{b_3}{a_3}$.

Пример 1.4.5.1. Решите уравнение

$$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2.$$

Решение.

ОДЗ: $x \in R$

Исходя из того, что $2\cdot 12=3\cdot 8$, перемножим $(x+2)$ на $(x+12)$ и $(x+3)$ на $(x+8)$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left(x^2+14x+24\right)\cdot\left(x^2+11x+24\right)=4x^2.$$

Разделим обе части последнего равенства на x^2, $x \neq 0$ и получим:

$$\frac{x^2+14x+24}{x}\cdot\frac{x^2+11x+24}{x}=4,$$

или

$$\left(x+14+\frac{24}{x}\right)\cdot\left(x+11+\frac{24}{x}\right)=4.$$

Далее вводим обозначение $x+\dfrac{24}{x}=t$ и решим уравнение

$$(t+14)\cdot(t+11)=4$$

или

$$t^2+25t+150=0,$$

откуда

$$t_1=-15,\ t_2=-10.$$

Если $t=-15$, то $x+\dfrac{24}{x}=-15$ или $x^2+15x+24=0$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}.$$

Если же $t=-10$, то $x+\dfrac{24}{x}=-10$ или $x^2+10x+24=0$, откуда

$$x_3=-6,\quad x_4=-4.$$

Ответ: $\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2},-6,\ -4$.

<u>Пример 1.4.5.2</u>. Решить уравнение

$$\left(x^2-6x-9\right)^2=x^3-4x^2-9x.$$

<u>Решение.</u> Уравнения такого типа решаются способом, похожим на описанный ранее. Очевидно, что $x=0$ не является корнем уравнения. Поэтому, возможно деление обеих частей уравнения на x^2:

$$\left(\frac{x^2-6x-9}{x}\right)^2=x-4-\frac{9}{x}$$

или

$$\left(x-6-\frac{9}{x}\right)^2=x-4-\frac{9}{x}.$$

Обозначим $x-\frac{9}{x}=t$, тогда получим

$$(t-6)^2=t-4 \text{ или } t^2-13t+40=0.$$

Откуда $t_1=5, t_2=8$.

Если $t=5$, то имеем $x-\frac{9}{x}=5$ или $x^2-5x-9=0$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}.$$

Если же $t=8$, то имеем $x-\frac{9}{x}=8$ или $x^2-8x-9=0$, откуда

$$x_3=-1,\quad x_4=9.$$

Ответ: $\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$;–1; 9.

§ 1.5. Алгебраические уравнения высших порядков

📖 **<u>Определение 1.5.1</u>**. *Алгебраическим уравнением n-го порядка* называется уравнение вида:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0, \text{ где } a_n\neq 0,\ n\geq 3\ (*).$$

<u>Замечание 1.5.1</u>. Для случаев $n=3$ и $n=4$ известны способы решения в радикалах. При $n=3$ используются формулы Кардано[1], а для уравнений, имеющих порядок $n=4$, применяется метод Феррари[2]. При $n\geq 5$ уравнение (*) в общем случае неразрешимо в радикалах, т.е. решение нельзя выразить через его коэффициенты с помощью конечного числа арифметических операций. Доказательство этого факта было впервые дано в 1799 г. итальянским математиком Паоло Руффини (1765-1822). В 1824 г. норвеж-

[1] Названы в честь итальянского учёного Джероламо Кардано (1501-1576).

[2] Назван в честь итальянского математика Лодовико Феррари (1522-1565)

ский математик Нильс Хенрик Абель (1802-1829) опубликовал полное доказательство, устранив неточности, допущенные Руффини. В математической литературе этот факт называется *теоремой Абеля-Руффини*.

Такие уравнения обычно решаются в 2 этапа:
1) отыскание рационального корня;
2) понижение порядка уравнения.

Затем этот процесс может повторяться до тех пор, пока не будут найдены все корни уравнения.

Метод отыскания рационального корня (для уравнений с целыми коэффициентами) опирается на следующие теоремы.

Теорема 1.5.1. Несократимая дробь $\frac{p}{q}$, где $q \neq 0$ является корнем уравнения (*), если:

число p является делителем свободного члена a_0, $p \in Z$;

число q — делителем старшего коэффициента a_n, $q \in N$.

Следствие 1. Если уравнение (*) имеет целые коэффициенты, а старший коэффициент равен 1 (т.е. $a_n = 1$), то корнями этого уравнения могут быть только целые числа, которые являются делителями свободного члена a_0.

Теорема 1.5.2. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ является корнем уравнения (*), то для любого числа m: $P(m) \vdots (p - mq)$, где $P(x)$ — многочлен, стоящий в левой части уравнения (*).

Пример 1.5.1. Установить предполагаемые корни многочлена

$$P_4(x) = 2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21,$$

а затем установить его истинные кони.

Решение. Сначала выпишем все целые делители свободного члена

$$p \vdots \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21.$$

Далее найдем все натуральные делители старшего коэффициента уравнения

$$q \vdots 1, 2.$$

После чего составим все возможные отношения p к q, т.е.

$$\frac{p}{q}: \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{7}{2}, \pm \frac{21}{2}.$$

Это и будут предполагаемые корни данного уравнения.

Непосредственной подстановкой каждого из предполагаемых корней отберем только те числа, которые обратят его в нуль. Таковыми окажутся лишь числа: 3 и 0,5.

Ответ: $\left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$.

Замечание 1.5.2. Ясно, что представленный способ отыскания корней алгебраического уравнения весьма трудоемок. Кроме того, с его помощью