ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемом пособии рассмотрены основные вопросы теории надежности водопроводных объектов в предельно простой форме. Потребность в таком пособии уже давно назрела в связи с изменившимися нормативными требованиями по оценке эффективности объектов на стадии их проектирования, строительства и эксплуатации. В учебных планах строительных вузов изучению «надежности объектов систем водоснабжения и водоотведения» отводится очень небольшое количество часов, следовательно, пособие по этой дисциплине не может вместить ни разъяснений сложных вопросов, ни доказательств отдельных математических моделей, ни сколько-нибудь подробных практических примеров по оценке надежности водопроводных сооружений. Предлагаемое пособие необходимо использовать совместно с тем перечнем материалов, который приведен в библиографическом списке.

При составлении пособия ставилась цель описать необходимые понятия и методы, необходимые исследователю при решении проблемы надежности объекта на стадии его проектирования или эксплуатации, в их логической последовательности. Изложенные в пособии модели и предложения помогут студенту оценить надежность системы, сооружения, установить уровни надежности и определить способы достижения этих уровней. Предложения почерпнуты главным образом из монографий ведущих специалистов МГУ, МГСУ, СПбГАСУ в области теории надежности, собственной производственной и исследовательской практики. Следует иметь в виду, что, несмотря на значительное место, отведенное примерам оценки надежности водопроводных сооружений, они служат в первую очередь иллюстрацией представлений в области теории надежности водопроводных объектов.

Автор выражает глубокую благодарность аспирантам *Ха Хай Фам* и *Н.Л. Дерюшевой* за сбор исходных данных и оформление пособия.

Л.Г. Дерюшев

ВВЕДЕНИЕ

Надежность сооружений систем водоснабжения как наука неразрывно связана с именем замечательного ученого в области водоснабжения Н.Н. Абрамовым. В монографии «Надежность систем водоснабжения» Н.Н. Абрамов наряду с оригинальным изложением самой теории надежности обосновал основные направления ее практического применения при проектировании, строительстве и эксплуатации систем водоснабжения и водоотведения. Он впервые сформулировал и предложил термины и показатели надежности водопроводных систем, сооружений и их составляющих (оборудования, конструкций, материалов).

Теория надежности систем водоснабжения это система определенных идей, математических моделей и методов, направленных на оценку и обеспечение надежности инженерных сооружений по забору, очистке, подаче и распределению воды потребителям.

Поскольку теория надежности в основном связана с нахождением вероятностей, средних значений, распределений вероятностей и т.д., то можно допустить, что она тесно связана с теорией вероятностей, математической статистикой, теорией массового обслуживания.

Надежность — это мера способности объекта (изделия, сооружения, системы) работать безотказно, когда он находится в эксплуатации. Количественно надежность выражается вероятностью безотказной работы объекта в течение времени t в заданных условиях эксплуатации. Понятием, противоположным надежности, является понятие ненадежности, которое определяется как вероятность отказа в течение заданного t времени работы. Надежность — понятие качественное. Надежность каждого объекта в конкретных условиях его работы задается числовыми или функциональными характеристиками (показателями).

Математическая теория надежности возникла в связи с опытом эксплуатации сложных военных систем в годы Второй мировой войны. Системы водоснабжения — не менее сложные и ответственные объекты для любых населенных или промышленных пунктов. Безотказная подача воды воспринимается потребителями не как прихоть в обеспечении их комфортных условий быта, а как нормальная потребность для существования. Обеспечение нормальных санитарных условий и пожарной безопасности нарушается при прекращении подачи воды потребителям.

Действующие нормативные документы по проектированию водопроводных сооружений содержат требования по обеспечению надежности систем водоснабжения по трем категориям. Однако этими требованиями не предусматривается количественная оценка надежности проектируемого объекта. Обеспечение качества системы водоснабжения негласно переносится на усмотрение экспертов, проектировщиков, строителей и инженеров службы эксплуатации объекта. Высокий уровень подготовки отечественных специалистов в области водоснабжения и водоотведения до недавнего времени позволял сравнительно неплохо проектировать и строить водопроводные объекты. С переходом на коммерческую основу взаимоотношений между заказчиком и исполнителем ставится под сомнение условное обеспечение надежности системы водоснабжения. На отечественный рынок в настоящее время поставляются материалы, оборудование, машины и механизмы многочисленными поставщиками с различной репутацией. Поставщики не несут ответственности за рекламу своей продукции, а потребители не владеют теми инструментами, которые бы позволили оценить качество предлагаемого товара.

Во всем мире качество продукции оценивается методами, которые применяются в теории надежности: математического моделирования, математической статистики. В свою очередь, все эти методы базируются на теории вероятностей, носящей название «русской науки», фундамент которой был заложен Н.И. Лобачевским (1792—1856), М.В. Остроградским (1801—1861), Б.Я. Буняковским (1804—1889), П.Л. Чебышевым (1821—1894), А.М. Ляпуновым (1857—1918), А.А. Марковым (1856—1922), А.Н. Колмогоровым (1903—1987). Сейчас нет области знания, в которой не использовались бы перечисленные методы. Применение вороятносто-статистических методов стало традиционным во многих науках.

В настоящем учебном пособии приводятся наиболее известные методы оценки и обеспечения надежности объектов, которые могут применяться в системах водоснабжения. Подготовка специалистов, обладающих знаниями в области теории надежности систем водоснабжения, позволит осознанно подходить к вопросам нормирования, проектирования, строительства и эксплуатации качественных водопроводных систем.

Глава 1

ПОНЯТИЕ НАДЕЖНОСТИ

1.1. Термины и определения надежности в теории водоснабжения

Формирование теории водоснабжение как науки можно отнести к третьему тысячелетию до н.э. Но, не смотря на этот исторический период и очевидность факта, что вода является самым необходимым продуктом для существования человечества, теория надежности водоснабжения не получила должного развития. Вопросами водоснабжения до 50-х гг. прошлого столетия занимались инженеры путей сообщения, инженеры-механики [1]. До настоящего времени законодательно не сформулированы понятия надежности систем водоснабжения. Надежность водоснабжения каждый инженер трактует по своему усмотрению. Нет единства в представлении о качестве водоснабжения.

В технике и математической статистике надежность объекта имеют точное значение и определение. Под понятием *объект* подразумевается любое изделие, сооружение, надежность которого изучается независимо от его структуры. В то же время, при составлении модели надежности объекта его именуют *элементом* или *системой*. Различие между этими понятиями чисто условное и состоит в том, что при определении надежности элемент считают неделимым, а систему представляют в виде совокупности отдельных частей, надежность каждой из которых определяют отдельно.

До последнего времени надежность объектов водоснабжения решалась за счет запасов прочности или широкого применения резервирования, что приводило к увеличению стоимости сооружений. Этот упрощенный процесс в настоящее время не прекратился. Наоборот, темпы его развития возрастают, и будут продолжать возрастать. Отсюда следует, что проблема повышения надежности из года в год становится все более актуальной.

Наиболее кратко надежность можно определить, как свойство объекта не отказывать в работе. Если объект работает хорошо и всегда готов выполнять те функции, для которых он предназначен, то такой объект называют надежным.

Удовлетворительная работа объекта без отказов на интервале времени t и готовность к работе в нужное время являются критериями надежности. Изделие может состоять из одного элемента — кирпича, но может представлять собой и сложную систему, из нескольких элементов: водозаборного сооружения, насосной станции, очистных сооружений, трубопроводов. Надежность системы зависит от надежности его элементов. Как будет показано далее, существует точная математическая связь между надежностью системы и надежностью ее элементов. Мерой повреждаемости изделия является интенсивность его отказов. Если отказы отсутствуют, оборудование обладает 100%-й надежностью или уровнем надежности равным 1. Однако опыт показывает, что безотказных изделий не существует.

Понятием, противоположным надежности, является понятие ненадежности, которое определяется как вероятность отказа в течение заданного времени работы.

Решение задач по надежности объекта имеет два аспекта: количественное определение и собственно обеспечение требуемого уровня надежности.

При рассмотрении различных проблем надежности объектов водоснабжения исследуются и оцениваются определенные количественные показатели. К сожалению, определения, которые приводятся в учебной и нормативной литературе по данным показателям не всегда однозначны. Особенно это проявляется в ГОСТах изданных до 1990 и после 1990 годов [6; 7; 8; 9].

Не обращая внимание на сочетание изменений и совпадений в формулировках, ориентируясь на смысловое содержание основных определений и понятий, которые используются в теории надежности [1; 2; 3; 6; 8; 10], отметим, что под термином *надежность системы водоснабжения* следует понимать ее *свойство сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов.*

Надежность включает: безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость [6; 10].

Надежность имеет для потребителя такое же значение, как количество воды, которое должно подаваться в единицу времени. Если случиться, что количество воды, подаваемой потребителю в единицу времени, снизится, то такая ситуация, хотя она и не является желательной, в определенных условиях может считаться допустимой, а система водоснабжения — надежной. С другой стороны, водовод, который пропускает всю воду от водопитателя, может отказать в работе на длительный период. Тут-то и возникает понятие надежности системы водоснабжения.

Допустимые пределы изменения параметров или свойств системы водоснабжения, составного оборудования, сооружений, обеспечивающих ее работоспособность, нормируются требованиями СНиП, технической документацией. Поэтому отклонение параметров (подачи Q, напора H или других характерных параметров) за допустимые пределы следует рассматривать как одну из форм утраты свойств, необходимых для обеспечения работоспособности объекта. Поэтому понятие *исправности* шире понятия *работоспособности*. В случаях, когда контролируемые параметры выходят за допустимые пределы, то наступает *отказ объекта*. Частота, с которой происходят отказы и неисправности, используется как параметр для математического определения надежности. Этот параметр называется *интенсивностью отказов* λ и измеряется обычно числом отказов n за время t работы, $\lambda = \frac{n}{t}$. Обратная величина называется *временем наработки до первого отказа (между отказами)* $T = \frac{1}{\lambda}$. Обычно допускается, что время до первого отказа объекта T — величина случайная. Это предположение выполняется далеко не всегда (например, когда нестабильно выполняется ремонт объекта, меняется состав оборудования, сооружений и т.д.).

Количественно надежность выражается вероятностью безотказной работы объекта в течение заданного времени в расчетных условиях эксплуатации. Для оценки вероятности события (безотказной работы) принято использовать обозначение P. Истинная вероятность P определяется как предел

$$P = \lim_{N \to \infty} \overline{P} = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N},$$

где n — количество благоприятных исходов;

N — общее количество испытаний.

Необходимо помнить, что если вероятность получена на основе небольшого числа опытов N, она может представлять собой (хотя и не обязательно) только оценку $\overline{P}$ вероятности. Если в результате большого числа испытаний известно, что надежность системы равна 0,9, то из этого не следует, что эта система из 10 операций 9 выполнит успешно и только 1 раз откажет. Возможно, что будет 2 или 3 отказа, а может быть и не будет ни одного. Но из большого числа испытаний около 90 % будет без отказов и около 10 % — с отказами. Расчет надежности, будучи вероятностным расчетом, использует идеализированные, математические модели. Инженер, который выполняет подобные расчеты, должен иметь знания в области математического анализа и курса теории вероятностей. Опираясь на результаты испытаний (наблюдений) объектов, он оценивает их надежность статистическими методами. На основе полученных результатов составляются рекомендации и оценки, которые позволяют рассчитывать необходимый на данный период времени состав сооружений и оборудования для конкретных условий эксплуатации системы водоснабжения. Кроме того, эти оценки позволяют решать проблему оптимизации надежности системы водоснабжения — проблему оптимального синтеза, оптимального резервирования и обслуживания объектов. Теория надежности — точная наука; она базируется на конкретных правилах и законах, которые сформулированы в теории вероятностей, математической статистике, теории потоков, теории массового обслуживания в единых терминах и понятиях. Основная терминология, которая применяется в теории надежности, исчерпывающим образом изложена в литературе [1—10].

Испытанием (или наблюдением) называется осуществление на практике какого-нибудь комплекса условий; явления, происходящие при наличии этого комплекса, называются *событиями*. Явления, происходящие при многократных повторениях испытания, называются *массовыми*.

Если при каждом испытании неизбежно происходит событие U, то такое событие называется *достоверным*. Если некоторое событие ξ заведомо не может произойти в условиях данного испытания, то его называют *невозможным*.

В теории вероятностей события, представляющие различные возможные исходы испытания, называются *случайными*.

Случайной величиной называется переменная X, значение которой определяется случайным исходом испытаний. Случайные величины обозначаются прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z, ..., а их возможные значения — строчными буквам x_i, y_i, z_i, ..., где $i = 1, 2, 3, \ldots$. В теории вероятностей различаются два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

Дискретные случайные величины — это величины, которые могут принимать конечное или бесконечное множество значений. При этом они могут быть определенным образом занумерованы и составлять последовательный ряд $x_1, x_2, ..., x_n$.

Непрерывные случайные величины — это величины, которые в пределах интервала (даже небольшого) могут принимать бесконечное количество значений.

Все эти понятия используются в тех случаях, когда испытания носят массовый характер. И тогда интерес представляют как раз не результаты единичного испытания, а некоторые общие закономерности массового явления в целом. Закономерности массовых явлений требуют для своего изучения особых «статистических» приемов исследования.

При изучении массовых явлений прежде всего встречаются с понятием *частости* случайного события. Если испытание повторилось N раз, возможно появление некоторого события А и при этом k раз событие A фактически имело место; тогда частость появления события A в данной серии из N испытаний равна

$$W(A) = \frac{k}{N}.$$

В весьма обширном и важном классе случаев при многократном повторении испытания частость появления события А обнаруживает устойчивость, т.е. она очень редко сколько-нибудь существенно отклоняется от некоторого положительного постоянного числа. Это положительное число, меньшее единицы и представляющее собой количественную оценку возможности случайного события A, называется его вероятностью. Вероятность, обозначаемая символом $P(A)$, представляет собой некую величину, связанную со случайным событием A.

Для описания случайных величин используются:

- *закон распределения* случайной величины, который является наиболее полной ее характеристикой; он несет всю необходимую информацию о случайной величине. Недостатком этой характеристики является то, что для ее получения необходимо иметь большое число наблюдений (испытаний);
- *числовые характеристики* случайной величины, которые несут гораздо меньшую информацию о случайной величине, но требуют меньшего объема наблюдений (испытаний) для своего определения.

Наиболее часто в качестве числовых характеристик используются:

- характеристика, которая определяет положение центра группирования наблюдаемых значений случайных величин;
- характеристика, которая описывает распределение отдельных значений случайной величины относительно центра группирования.

Числовые характеристики и параметры закона распределения случайной величины связаны между собой определенней зависимостью; часто по значению числовых характеристик можно предположить вид закона распределения случайной величины.

1.2. Закон распределения случайной величины

Соответствие между всеми возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется *законом распределения* данной случайной величины.

Как правило, в качестве закона распределения случайной величины используется функция распределения (интегральный закон распределения) случайной величины: Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x, т.е. $F(x) = P\{X < x\}$.

Иногда функцию $F(x)$ называют интегральной функцией распределения. Функция распределения обладает следующими свойствами:

- Значение функции распределения принадлежит отрезку [0, 1]: $0 \le F(x) \le 1$.
- Функции распределения есть неубывающая функция.
- Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

- Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.
- Справедливы следующие предельные отношения:

$$\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0; \ \lim_{n\to\infty} F(x) = 1.$$

На практике функции распределения непрерывных случайных величин именуют как *законы распределения*. Подобное допущение не искажает существенно точность при оценке случайных событий.

В теории надежности водоснабжения в качестве основной непрерывной случайной величины рассматривается время t (время наработки на отказ, время восстановления и т.д.). Поэтому в дальнейшем все рассуждения о непрерывных случайных событиях будем проводить с учетом тождества $X \equiv t$ и условия

$$F(t) = P\{T \le t\}.$$

Следовательно, $P\{T > t\} = 1 - F(t)$, поскольку рассматриваются противоположные события, которые образуют полную группу событий.

Для решения ряда задач необходимо знать теоретические законы распределения случайных величин.

Рассматрим две группы законов распределения случайных величин:

- для дискретных случайных величин;
- для непрерывных случайных величин.

1.2.1. Законы распределения дискретных случайных величин

Для решения ряда задач необходимо знать теоретические законы распределения случайных величин.

Наиболее часто применяются следующие законы распределения дискретных величин:

- *Биноминальное распределение*. Это распределение возникает в случае, если:
  - — при испытаниях возможно два исхода: появление и непоявление события;
  - — испытания проводятся в объеме n, установленном заранее;
  - — при каждом испытании вероятность появления интересующего нас события остается постоянной.

Биноминальное распределение описывает распределение $P(x, n, p)$-вероятностей появления ровно x событий в испытаниях объема n с вероятностью р появления события в каждом испытании.

Интересующая нас вероятность появления ровно x событий в испытаниях объемом n определяется по формуле

$$P(x, n, p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \ 0 \le P \le 1.$$

Здесь величины n и p являются параметрами закона распределения.

Переменные величины, определяющие значения искомой вероятности, называются параметрами этого распределения.

Числовые характеристики биномиального распределения (точное определение которых будет приведено ниже в подразд. 1.3) и их связь с параметрами распределения могут быть представлены в виде:

- математического ожидания, представляющего собой число событий, возникающих при многократном повторении испытаний

$$\overline{X} = M[X] = np;$$

- дисперсии

$$D(x) = np(1-p);$$

- коэффициента вариаций

$$\vartheta_x = \frac{б(x)}{M[X]} = \sqrt{\frac{1-p}{np}};$$

- коэффициента асимметрии

$$\Sigma_x = \alpha_3 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}};$$

- коэффициента эксцесса

$$E_x = \alpha_4 = 3 - \frac{\sigma}{n} + \frac{1}{np(1-p)}.$$

Отметим, что для нормального распределения $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 3$

Часто необходимо знать статистические значения величин P^*; D_{p^*}. Значение P^* можно оценить по формуле

$$P^* = \frac{x}{n}, \tag{1.1}$$

где x — количество интересующих нас исходов испытаний;

n — общее число испытаний.

Математическое ожидание этой оценки

$$M[P^x] = M\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{1}{n}M[x] = \frac{1}{n}np = p.$$

Таким образом, статистическое значение вероятности P^*, определенное по формуле (1.1), является несмещенной оценкой p:

$$D_{p^*} = D\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(x) = \frac{1}{n^2}np^*(1-p^*) = \frac{p^*(1-p^*)}{n}. \tag{1.2}$$

Следовательно,

$$б_{p^*} = \sqrt{D_{p^*}} = \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}.$$

Если объем наблюдений n увеличивается ($n \to \infty$), то биномиальное распределение стремится к нормальному с параметрами

$$a = pnD(x) = np(1-p).$$

Функция распределения для биномиального закона

$$F(x, n, p) = \sum_{i=1}^{x} p(x, n, p) = \sum_{i=1}^{x} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Пример 1.1. *Определить вероятность того, что в контролируемой партии оборудования будет обнаружено число бракованных штук более двух, но менее или равно 4, для случая, когда: n = 20; p = 0,3.*

Таблица 1.1

Данные к примеру

x	$P(x)$	$F(x)$	x	$P(x)$	$F(x)$
0	0,0008	0,0008	3	0,0716	0,1070
1	0,0068	0,0076	4	0,1304	0,2374
2	0,0278	0,0354	5	0,1789	0,4163

Следовательно, интересующая нас вероятность будет равна

$$P\{2 < x \le 4\} = F(4) - F(2) = 0{,}2374 - 0{,}0354 = 0{,}202.$$

Биноминальное распределение применяется для апроксимации модели событий, возникающих:

- при испытаниях элементов без замены (распределение вероятностей числа вышедших из строя элементов подчиняется биномиальному распределению при том, что условия проведения опыта постоянны);
- при контроле качества изготовления оборудования (деталей) выборками объемом n с возвращением.

Обобщением биномиального распределения является полиномиальное распределение.

- *Полиноминальное распределение*. Применяется для аппроксимации модели событий, когда количество исходов испытаний будет более двух (например, деталь по результатам испытаний может быть отнесена к одной из групп очень высокого, высокого, среднего качества и негодная).

В этом случае:

$$P(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k;\ n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_k!}\,p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k},$$

где k — количество исходов;

$i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ 0 \le p_i \le 1;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

- *Распределение Пуассона*. Это распределение нашло широкое применение в технике. Оно возникает в том случае, если вероятность p появления события при каждом испытании мала, а объем испытаний велик. Часто это распределение называют распределением редких событий. Этому распределению подчиняется количество неисправностей (отказов) в заданных равных интервалах времени, число бракованных изделий в контролируемых партиях.

Распределение Пуассоза имеет вид

$$P(x,\ a) = \frac{a^x}{x!}\mathrm{e}^{-a},$$

где a — параметр распределения.

Распределение Пуассона является однопараметрическим. Числовые характеристики распределения (подробнее их определения приводятся в подразд. 1.3) следующие:

- среднее значение

$$M[x] = a;$$

- дисперсия

$$D(x) = a \to M[x] = D(x) = a;$$

- коэффициент вариации

$$\vartheta_x = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

- коэффициент асимметрии

$$\Sigma_x = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

- коэффициент эксцесса

$$E_x = \alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} + 3.$$

При увеличении параметра a распределение Пуассона стремится к нормальному. Если $a > 20$, то распределение Пуассона заменяют нормальным. Распределение Пуассона часто используется вместо биномиального распределения. Если в каждом испытании $p \le 0{,}10$, то биномиальное распределение заменяется распределением Пуассона, т.е.

$$P(x, n, p) = P(x, a = pn).$$

- *Распределение Паскаля*. При испытаниях или планировании эксперимента может возникнуть задача получения заданного числа событий k на случайном отрезке времени x_i.

Распределение Паскаля представляет собой распределение вероятностей длительности испытаний до получения определенного числа интересующих нас исходов, если вероятность этих исходов при каждом испытании равна p.

Распределение Паскаля является двухпараметрическим и имеет вид

$$P(x,\,k,\,p) = C_{x-1}^{k-1} p^k (1-p)^{x-k},$$

где x — число повторений испытаний или длительность проведения испытаний, $x = k$, $k + 1$, ...;

k — количество исходов, до достижении которых испытания будут прекращены;

p — вероятность интересующего нас исхода в каждом испытании, $0 \le p \le 1$.

1.2.2. Законы распределения непрерывной случайной величины

Для описания непрерывных случайных величин задание вероятностей $P(t_i)$ не имеет смысла, так как даже в малых интервалах значений t_i будет несчетное множество.

В этих случаях для установления связи между значениями интервала, в который может попадать случайная величина, и вероятностью попадания в этот интервал используется понятие *плотность вероятности* $f(t)$, т.е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t < T < t + \Delta t\}}{\Delta t} = f(x).$$

Эту форму записи закона распределения часто называют дифференциальным законом распределения.

Между плотностью вероятности $f(t)$ и функцией распределения $F(t)$ существует следующая связь (рис. 1.1):

$$F(t) = P\{T \le t\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt,$$

следовательно (рис. 1.2),

$$F(t_1) = P\{T \le t\} = \int\limits_{-\infty}^{t_1} f(t)dt;\;\; F(t_2) = P\{T \le t\} = \int\limits_{-\infty}^{t_2} f(t)dt;$$

$$P\{t_1 < T < t_2\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{-\infty}^{t_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{t_1} f(t)dt = F(t_2) - F(t_1).$$

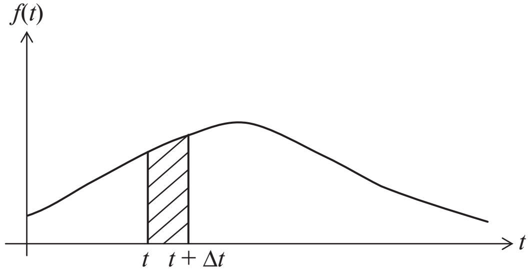

Рис. 1.1. Функция плотности вероятности

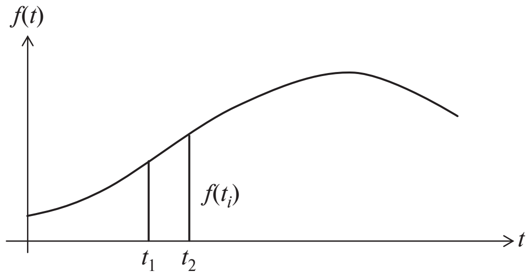

Рис. 1.2. График функции *f*(*t*)

1.2.3. Некоторые свойства функции распределения

Функция распределения представляет собой непрерывную возрастающую величину (рис. 1.3).

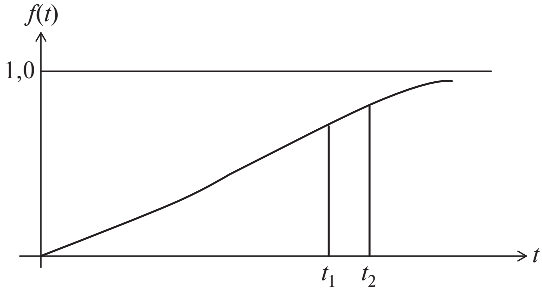

Рис. 1.3. График функции *F*(*t*)

Приращение функции распределения на интервале (t_1, t_2) представляет собой вероятность попадания случайной величины T в этот интервал, т.е.

$$P\{t_1 < T < t_2\} = F(t_2) - F(t_1).$$

Если случайная величина T изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, то:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Следовательно, в общем случае

$$0 \le F(t) \le 1.$$

Если функция распределения представляет собой непрерывную величину, то

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = f(t).$$

1.3. Числовые характеристики случайных величин

1.3.1. Используемая терминология

Рассмотренные выше законы распределения наиболее полно характеризуют случайные величины, так как указывают, какие значения (или из каких интервалов) может принимать соответствующая случайная величина и каковы вероятности этих значений. Однако в ряде случаев для выполнения инженерных расчетов о случайной величине требуется знать гораздо меньше, а именно:

• знать некоторое *среднее* из значений случайной величины, вокруг которого группируются остальные значения, т.е. знать положение «центра группирования» на числовой оси;

• знать каково рассеивание массы вероятности относительно некоторого центра, т.е. знать числовую характеристику рассеивания.