

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения	5
1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КАПЕЛЬНЫХ НЬУТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ	7
1.1. Два режима движения жидкости	7
1.2. Уравнения ламинарных течений.....	8
1.2.1. Уравнения неразрывности	8
1.2.2. Уравнения гидродинамики.....	8
1.3. Уравнения турбулентных течений.....	11
1.3.1. Уравнения неразрывности	12
1.3.2. Уравнения гидродинамики.....	12
1.3.3. Полуэмпирические теории турбулентности.....	15
1.3.4. Двухслойная модель турбулентного течения	18
2. ТЕЧЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА.....	19
2.1. Установившееся равномерное течение в прямой круглой трубе	19
2.1.1. Особенности течения, граничные условия и система уравнений	19
2.1.2. Распределение касательных напряжений	21
2.1.3. Радиальное распределение скоростей	22
2.1.4. Коэффициенты Буссинеска и Кориолиса	24
2.1.5. Функция тока	25
2.1.6. Вихревая структура течения	26
2.1.7. Гидравлические потери	27
2.2. Установившееся неравномерное течение на начальном участке прямой круглой трубы	28
2.2.1. Особенности течения, граничные условия и система уравнений.....	28
2.2.2. Распределение аксиальных скоростей	29
2.2.3. Распределение радиальных скоростей.....	34
2.2.4. Функция тока.....	35
2.2.5. Вихревая структура течения.....	36
2.2.6. Тензор вязких напряжений.....	37
2.2.7. Гидравлические потери.....	39
3. УСТАНОВИВШЕЕСЯ РАВНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПРЯМОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА	41
3.1. Расчетная схема, граничные условия и система уравнений	41
3.2. Распределение касательных напряжений	43
3.3. Течение в ламинарном пограничном слое	43
3.4. Течение в турбулентном ядре потока	45
3.4.1. Теория переноса количества движения Прандтля	46
3.4.2. Модель Прандтля – Альтшуля.....	51
3.4.3. Теория переноса завихренности Тейлора.....	55
3.4.4. Теория подобия Кармана.....	59
3.4.5. Сводные данные по теориям турбулентности	60
Библиографический список.....	61

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

D — дефицит максимальной скорости

d — диаметр трубы

g — ускорение силы тяжести

h_w — гидравлические потери (потери напора)

J — квадратичный инвариант тензора скоростей деформации

$J_i(\dots)$ — функция Бесселя первого рода i -го порядка

j — гидравлический уклон

l — длина пути перемешивания

N_i — число Никурадзе

P — давление

Q — расход потока

R — радиус трубы

R_T — гидравлический радиус

Re — число Рейнольдса

s — смоченный периметр

t — текущее время

U — местная скорость течения

U_m — максимальная скорость

U_δ — скорость течения на границе ламинарной пленки и турбулентного ядра

U_* — динамическая скорость

u_x, u_y, u_z — составляющие вектора местной скорости по осям декартовой системы координат

u_x, u_θ, u_r — составляющие вектора местной скорости по осям цилиндрической системы координат

\bar{u}_i, u'_i — регулярная и пульсационная составляющие при турбулентном режиме движения жидкости

V — средняя скорость потока

X, Y, Z — ускорения от действия внешних массовых (объемных) сил

x, y, z — оси прямоугольной (декартовой) системы координат

x, θ, r — оси цилиндрической системы координат

$\dot{x}, \dot{r}, \dot{u}_x$ — нормированные переменные

α, α_0 — коэффициенты Кориолиса и Буссинеска

Δ — абсолютная шероховатость стенок трубы

δ — толщина ламинарного пограничного слоя

ζ — коэффициент местного гидравлического сопротивления
 Λ — расстояние от твердой границы потока (стенки)
 λ — коэффициент гидравлического сопротивления по длине
 λ_n — нуль функции Бесселя 1-го рода 2-го порядка
 μ — динамическая вязкость жидкости
 μ_t — турбулентная вязкость
 ν — кинематическая вязкость жидкости
 Π — потенциал внешних массовых сил
 ρ — плотность жидкости
 σ_{ii} — вязкие нормальные напряжения
 σ'_{ii} — нормальные рейнольдсовыe напряжения
 τ_{ij} — вязкие касательные напряжения
 τ'_{ij} — касательные рейнольдсовыe напряжения
 τ_0 — касательные напряжения на стенках трубы
 χ — постоянные Прандтля, Кармана, универсальная постоянная
 Ψ — функция тока
 Ω — угловая скорость вихря
 $\omega_x, \omega_\theta, \omega_r$ — составляющие угловой скорости вихря по осям цилиндрической системы координат
 ω — площадь сечения трубы

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КАПЕЛЬНЫХ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В учебном пособии дан обзор дифференциальных уравнений движения капельных ньютоновских жидкостей. Исследуются решения этих уравнений при малых и больших числах Рейнольдса. Описание движения жидкости рассматривается в эйлеровой постановке [1] в декартовой прямоугольной (x, y, z) и цилиндрической (x, θ, r) системах координат (рис. 1.1).

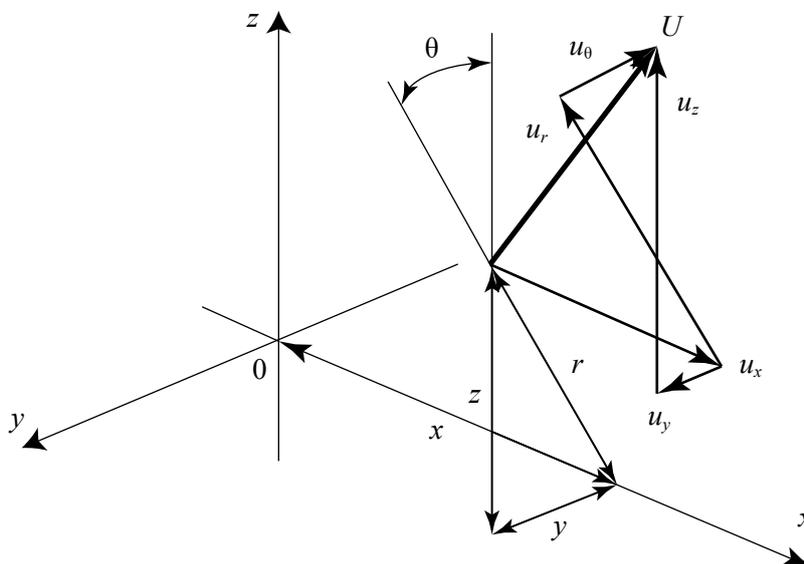


Рис. 1.1. Прямоугольная и цилиндрическая системы координат

Обозначим вектор скорости бесконечно малой частицы жидкости в точке пространства с координатами x, y, z или x, θ, r через U , а его составляющие по осям координат — через u_x, u_y, u_z или u_x, u_θ, u_r . При этом

$$U = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{u_x^2 + u_\theta^2 + u_r^2}. \quad (1.1)$$

По Эйлеру компоненты вектора скорости u_x, u_y, u_z или u_x, u_θ, u_r в общем случае являются функциями координат точки x, y, z или x, θ, r и времени t . При установившемся движении жидкости, когда скорости не зависят от времени, они являются функциями только координат пространства.

1.1. ДВА РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Существуют два режима движения жидкости: ламинарный и турбулентный. *Ламинарным* называется течение, при котором слои жидкости, не смешиваясь, скользят относительно друг друга в условиях вязкого трения. *Турбулентным* называется течение, при котором частицы жидкости движутся по постоянно меняющимся траекториям, и в жидкости происходит интенсивное перемешивание, именуемое турбулентной диффузией.

Особенности двух режимов движения жидкости впервые изучил Осборн Рейнольдс¹. Он установил, что увеличение скорости потока вызывает возмущения, дестабилизирующие его структуру. Если под устойчивостью понимать способность потока подавлять возникающие в нем малые возмущения, то переход к турбулентному режиму может рассматриваться как потеря устойчивости. При этом из двух действующих на жидкие частицы категорий сил: сил вязкости и сил инерции — первые играют стабилизирующую роль, а вторые — дестабилизирующую. При ламинарном режиме с низкими скоростями течения силы вязкости, пропорци-

¹Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion / O. Reynolds // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1895. — Series A. — V. 186. — P. 123–164.

ональные скоростям в 1-й степени, подавляют случайные возмущения, возникающие в потоке под действием инерционных сил, пропорциональных квадрату скоростей. С увеличением скоростей движения силы инерции начинают превосходить силы вязкости, и течение теряет устойчивость, переходя в турбулентный режим. Таким образом, соотношение этих сил служит критерием устойчивости потока; этот критерий называют числом Рейнольдса

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (1.2)$$

где V — средняя скорость потока, $V = Q/\omega$; Q , ω и L — соответственно расход, площадь и характерный линейный размер сечения потока; ν — кинематическая вязкость жидкости, $\nu = \mu/\rho$; μ и ρ — динамическая вязкость и плотность жидкости.

Переход из ламинарного в турбулентный режим движения жидкости или из турбулентного в ламинарный происходит при критическом значении числа Рейнольдса $Re_{кр}$. При малых числах Рейнольдса, меньше критического значения ($Re < Re_{кр}$), режим течения ламинарный, при больших числах Рейнольдса ($Re > Re_{кр}$) — турбулентный.

1.2. УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

1.2.1. Уравнения неразрывности

При ламинарном режиме течения дифференциальное уравнение неразрывности (сплошности) однородной капельной, считающейся практически несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ($\rho = \text{const}$) в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.3)$$

в цилиндрических координатах это уравнение принимает форму

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial(ru_r)}{r\partial r} = 0. \quad (1.4)$$

1.2.2. Уравнения гидродинамики

В прямоугольной декартовой системе координат дифференциальные уравнения гидродинамики в частных производных компонент вязких напряжений записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + \sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{du_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + \sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{du_y}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + \sigma_{zz})}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} \right) &= \frac{du_z}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

где P — давление в точке занимаемого жидкостью пространства с координатами x, y, z ; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ — нормальные (σ_{ij}) и касательные (τ_{ij}) вязкие напряжения в движущейся жидкости; X, Y, Z — ускорения от внешних массовых сил по соответствующим координатам, связанные с потенциалом этих сил (Π) равенствами

$$X = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Ускорения в правой части уравнений (1.5) представляют собой полные производные, которые можно разложить на сумму частных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z), \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(u_y u_z), \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_z) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

С учетом (1.6) и (1.7) система (1.5) приводится к дивергентной форме дифференциальных уравнений динамики вязкой жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\rho(u_x^2 + \Pi) + P + \sigma_{xx}] + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_x u_z - \tau_{zx}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_y - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}[\rho(u_y^2 + \Pi) + P + \sigma_{yy}] + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_y u_z - \tau_{zy}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_z - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y u_z - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}[\rho(u_z^2 + \Pi) + P + \sigma_{zz}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

При ламинарном режиме движения в жидкости возникают только вязкие напряжения. Схема распределения напряжений на гранях бесконечно малой частицы жидкости показана на рис. 1.2.

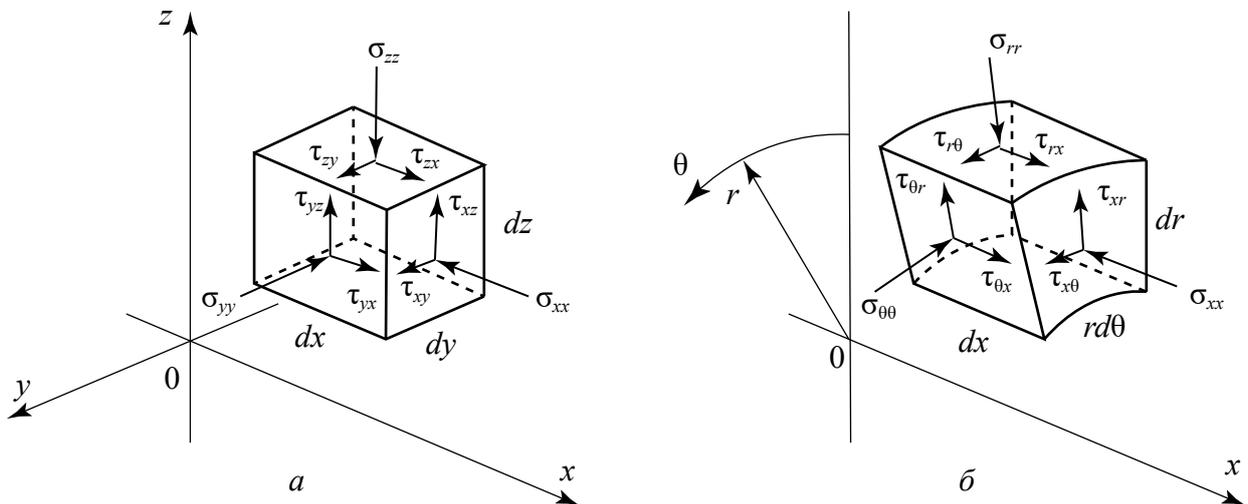


Рис. 1.2. Тензор напряжений:
a — декартовая система координат; *б* — цилиндрическая система координат

Для ньютоновских жидкостей: воды, воздуха и других, наиболее распространенных жидкостей на земле, в которых напряжения отвечают закону вязкого трения Ньютона, тензор вязких напряжений записывается в виде

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\
\sigma_{yy} &= -2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\
\sigma_{zz} &= -2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\
\tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \\
\tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Подставляя в систему (1.8) значения вязких напряжений по (1.9), получаем дифференциальные уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости в частных производных скоростей:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\
\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \\
\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Уравнения (1.10), известные как уравнения Навье – Стокса, совместно с уравнением неразрывности (1.3) составляют замкнутую систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: давлением P и скоростями u_x, u_y, u_z .

Аналогичные дифференциальные уравнения могут быть записаны также в цилиндрической системе координат:

– дивергентная форма дифференциальных уравнений динамики:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial(r\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [r[\rho(u_x^2 + \Pi) + P + \sigma_{xx}]] + \\
+ \frac{\partial}{r\partial\theta} [r(\rho u_\theta u_x - \tau_{\theta x})] + \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho u_r u_x - \tau_{rx})] &= 0, \\
\frac{\partial(r^2\rho u_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [r^2(\rho u_\theta u_x - \tau_{x\theta})] + \\
+ \frac{\partial}{r\partial\theta} [r^2[\rho(u_\theta^2 + \Pi) + P + \sigma_{\theta\theta}]] + \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho u_r u_\theta - \tau_{r\theta})] &= 0, \\
\frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [r(\rho u_r u_x - \tau_{xr})] + \frac{\partial}{r\partial\theta} [r(\rho u_r u_\theta - \tau_{\theta r})] + \\
+ \frac{\partial}{\partial r} [r[\rho(u_r^2 + \Pi) + P + \sigma_{rr}]] - [\rho(u_\theta^2 + \Pi) + P + \sigma_{\theta\theta}] &= 0;
\end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

– тензор вязких напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -2\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{rr} &= -2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \tau_{xr} &= \tau_{rx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right), \\ \tau_{\theta x} &= \tau_{x\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{r\partial\theta} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right); \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

– дифференциальные уравнения в частных производных скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial u_x}{r\partial\theta} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{\partial u_x}{r\partial r} \right), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + u_r \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) &= -\frac{\partial}{r\partial\theta} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + 2 \frac{\partial u_r}{r^2 \partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_r}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial u_r}{r\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - 2 \frac{\partial u_\theta}{r^2 \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.3. УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Наблюдения показывают, что при турбулентном режиме скорости (и другие параметры: давление, температура и т.д.) в любой точке потока изменяются во времени. Процесс носит хаотичный (стохастический) характер, в котором можно выделить регулярную часть движения (осредненную по времени) и случайную (пульсации). На рис. 1.3 показан вид непрерывной записи измерения скорости в некоей точке потока во времени.

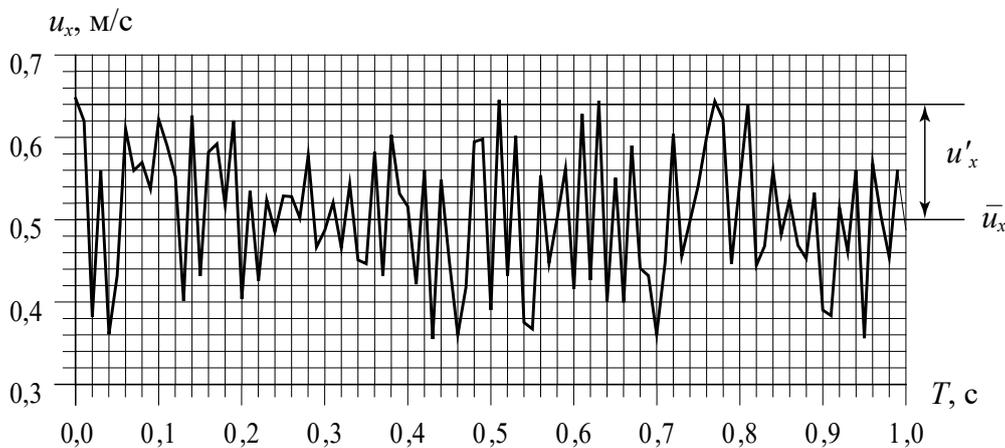


Рис. 1.3. Диаграмма изменения осевой скорости в турбулентном течении

Согласно рис. 1.3 в любой момент времени мгновенная (действительная) скорость частицы жидкости может быть представлена как сумма

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x \quad (1.14)$$

осредненной в течение времени T скорости \bar{u}_x , представляющей собой регулярную часть, и пульсационной скорости u'_x , равной разности между мгновенным и регулярным значениями.

Определение регулярной осредненной по интервалу T составляющей

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_0^T u_x dt \quad (1.15)$$

называется осреднением по Рейнольдсу.

1.3.1. Уравнения неразрывности

Используя операции (1.14) и (1.15) из уравнений (1.3) и (1.4), получают дифференциальные уравнения неразрывности несжимаемой жидкости при турбулентном режиме движения в прямоугольных декартовых:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (1.16)$$

и в ортогональных цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial (r \bar{u}_r)}{r \partial r} = 0. \quad (1.17)$$

1.3.2. Уравнения гидродинамики

Осреднением по Рейнольдсу из уравнений (1.8) и (1.10) в декартовой системе координат для турбулентного режима получены:

– дивергентная форма дифференциальных уравнений динамики:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \bar{u}_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(\bar{u}_x^2 + \Pi) + \bar{P} + \sigma_{xx}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{u}_x \bar{u}_y - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{u}_x \bar{u}_z - \tau_{zx}) = 0, \\ & \frac{\partial(\rho \bar{u}_y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u}_x \bar{u}_y - \tau_{xy}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [\rho(\bar{u}_y^2 + \Pi) + \bar{P} + \sigma_{yy}] + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{u}_y \bar{u}_z - \tau_{zy}) = 0, \\ & \frac{\partial(\rho \bar{u}_z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u}_x \bar{u}_z - \tau_{xz}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{u}_y \bar{u}_z - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} [\rho(\bar{u}_z^2 + \Pi) + \bar{P} + \sigma_{zz}] = 0; \end{aligned} \right\}$$

– тензор напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2\mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \overline{\rho u'_x u'_x}, \\ \sigma_{yy} &= -2\mu \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \overline{\rho u'_y u'_y}, \\ \sigma_{zz} &= -2\mu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \overline{\rho u'_z u'_z}, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \right) - \overline{\rho u'_x u'_z}, \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right) - \overline{\rho u'_x u'_y}, \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} \right) - \overline{\rho u'_y u'_z}, \end{aligned} \right\}$$

содержащий, наряду с вязкими, турбулентные составляющие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \overline{\rho u'_x u'_x}, \quad \sigma'_{yy} = \overline{\rho u'_y u'_y}, \quad \sigma'_{zz} = \overline{\rho u'_z u'_z}, \\ \tau'_{xz} = \tau'_{zx} &= -\overline{\rho u'_x u'_z}, \quad \tau'_{yx} = \tau'_{xy} = -\overline{\rho u'_x u'_y}, \quad \tau'_{zy} = \tau'_{yz} = -\overline{\rho u'_y u'_z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

называемые рейнольдсовыми напряжениями;

– дифференциальные уравнения в частных производных скоростей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{\bar{P}}{\rho} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_x})}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_y})}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_z})}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\Pi + \frac{\bar{P}}{\rho} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_y})}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{u'_y u'_y})}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{u'_y u'_z})}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\Pi + \frac{\bar{P}}{\rho} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_z})}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{u'_y u'_z})}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{u'_z u'_z})}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Уравнения (1.19), известные как уравнения Рейнольдса, совместно с уравнением неразрывности (1.16) образуют незамкнутую систему четырех уравнений с десятью неизвестными: давлением \bar{P} , скоростями $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$ и шестью рейнольдсовыми составляющими (1.18).

В цилиндрической системе координат аналогичные дифференциальные уравнения принимают вид:

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru