Оглавление

Светлой памяти моего отца
Колобашкина Виктора Михайловича
посвящается эта книга

ВВЕДЕНИЕ

Издавна люди сталкивались с проблемой принятия решений в тех или иных ситуациях. Недаром считается, что «качество принятых решений определяет качество жизни». Повседневно сталкиваясь с необходимостью выбирать то или иное решение, человек использует при этом имеющиеся в его распоряжении опыт, логические возможности, проводит различные рассуждения, использует ассоциации, вспоминает аналогичные случаи, делает прогнозы, предположения, догадки, прибегает к интуиции. При этом естественно стремление к таким решениям, которые приводят к наилучшим результатам. Такой выбор принято называть *оптимальным*. До поры до времени, в частности если выбор в конкретной ситуации касается интересов одного человека, решения могут приниматься без специального математического анализа. В случае же, когда последствия неправильно принятых решений могут затронуть интересы уже целых коллективов, структурных подразделений, отраслей, а то и городов, приводится в действие сложная система математических расчетов. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и дорогостоящего поиска правильного решения «наощупь».

Чем сложнее организуемое мероприятие, чем больше вкладывается в него материальных средств, чем шире спектр его возможных последствий, тем менее допустимы так называемые «волевые» решения, не опирающиеся на научный расчет, и тем большее значение получает совокупность научных методов, позволяющих заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать те, которые представляются наиболее удачными [1].

Математическими расчетами, облегчающими принятие правильных решений, занимается раздел прикладной математики — исследование операций.

Исследование операций — это теория математических моделей принятия оптимальных решений и практика их использования. Согласно шутливому определению Т. Л. Саати, исследование операций — это искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими способами [2]. Это говорит о том, что практические ситуации, в которых приходится принимать решение, часто бывают настолько сложными и важными, что даже незначительная помощь со стороны математических методов оказывается весьма существенной.

Особенно сложные управленческие проблемы возникают в сфере социально-экономических отношений. Обычно развитие социально-экономического явления зависит от действий многих лиц, каждое из которых лишь частично контролирует ситуацию. Лица, принимающие решения, имеют свои интересы, часто не полностью выявленные и представленные с некоторой долей неопределенности. Эти интересы могут совпадать (возможно, частично), что ведет к сотрудничеству и кооперации. Но они могут и противоречить друг другу (возможно, частично), что ведёт к соперничеству и конфликту [3].

При решении ряда практических задач (в области экономики, военного дела и т. д.) приходится анализировать ситуации, в которых сталкиваются две и более враждующие стороны, преследующие различные цели. Причем результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации называются *конфликтными ситуациями*.

Исследованием операций в условиях конфликта занимается *теория игр*.

Теория игр — математическая теория конфликтных ситуаций. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликтной ситуации, необходимо построить упрощенную схематизированную модель ситуации, которую будем называть игрой. Заметим, что понятия *игра* и *конфликт* — синонимы.

В игре могут сталкиваться интересы двух и более сторон. *Целью* каждого участника игры является получение возможного большего выигрыша.

Теория игр занимается исследованием математических моделей конфликтов и их формальным решением, что позволяет:

- смоделировать процесс и возможные результаты будущей игры еще до ее фактического начала;
- по результатам моделирования будущей игры принять решение о целесообразности участия и оптимальном поведении в реальном конфликте.

Другими словами, теория игр дает математический *прогноз* конфликта.

Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения.

Классификация игр осуществляется по целому ряду направлений [4].

- **По количеству игроков:** парные игры и игры *n* игроков. Наибольшие успехи достигнуты при изучении парных игр. Трудности решения игровых задач с увеличением количества игроков повышаются.
- **По количеству стратегий:** конечные и бесконечные. Если каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий, то игра называется *конечной*. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то такая игра называется *бесконечной*.
- **По характеру взаимоотношений:** бескоалиционные, коалиционные, кооперативные. В *бескоалиционных* играх игроки не имеют права образовывать коалиции в отличие от *коалиционных* игр. В *кооперативной* игре коалиции определены заранее.
- **По характеру выигрышей:** игры с нулевой суммой (или антагонистические) и игры с ненулевой суммой (неантагонистические). В *играх с нулевой суммой* сумма выигрышей игроков в каждой партии равна нулю, цели игроков в ней прямо противоположны: выигрыш одного игрока происходит только за счет проигрыша другого. В *играх с ненулевой суммой* критерии для игроков различны, сумма выигрышей нулю не равна.
- **По количеству ходов**: одношаговые и многошаговые. В *одношаговых* играх каждый игрок делает только один ход, а далее идет распределение выигрышей. *Многошаговые* игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные. В *позиционных* играх может быть несколько игроков, каждый из которых может последовательно во времени делать несколько ходов. Выигрыши определяются в зависимости от исходов игры. Если в игре производятся ходы, приводящие к выбору определенных позиций, причем имеется определенная вероятность возврата на предшествующую позицию, такая игра называется *стохастической*. Если в многошаговой игре допускается делать ходы непрерывно и действия игроков описываются дифференциальными уравнениями, такая игра называется *дифференциальной*.

- **В зависимости от состояния информации:** игры с полной и неполной информацией. Если на каждом шаге игры каждому игроку известно, какие выборы сделаны игроками ранее, то это игра *с полной информацией*. Если игроку не все известно о предыдущих выборах, то речь идет об игре *с неполной информацией*.
- **По виду функций выигрыша:** матричные, биматричные, непрерывные. *Матричная* игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой выигрыши первого игрока равны проигрышам второго и наоборот; задается в виде одной матрицы. *Биматричная* игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока сосредоточены в матрице игры данного игрока; данный вид игр задается двумя матрицами. *Непрерывной* считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий.

Данное учебное пособие состоит из четырех глав.

Глава 1 посвящена методам принятия решений в антагонистических конфликтах. В этой главе вводятся основные понятия теории матричных игр, рассматриваются вопросы составления модели игры, уменьшения размерности задачи путем применения отношений доминирования, излагаются способы определения равновесных ситуаций в «чистых» стратегиях, приводятся аналитические, итерационные и графические методы определения оптимальных смешанных стратегий в зависимости от размерности задачи, рассматриваются вопросы практического применения полученных результатов.

В ряде задач функция выигрыша зависит от неопределенных факторов, к которым можно отнести погодные условия, состояние рынка, курс валюты, инфляцию, психоэмоциональное состояние лица, принимающего решения, и т. д. Рассчитывая на «худший» вариант, этот неопределенный фактор, который называют «природой», отождествляют со стратегией противника, имеющего противоположные интересы. Методы принятия решений в играх с «природой», являющихся разновидностью антагонистических игр, рассматриваются в главе 2.

В главе 3 приводятся методы поиска оптимальных решений в неантагонистических конфликтных ситуациях, рассматриваются вопросы редуцирования размерности задачи в зависимости от целевого критерия.

Глава 4 посвящена многошаговым процессам принятия решений. В ней описывается структура позиционной игры, рассматриваются вопросы ее нормализации, излагаются методы принятия решений в антагонистических и неантагонистических позиционных играх с полной и неполной информацией, приводятся практические примеры решения организационно-управленческих задач с помощью позиционных игр.

В главе 5 приводятся базовые понятия теории кооперативных игр, дается математическое обоснование для выделения устойчивых коалиций в кооперативных играх на основе взаимных экономических интересов. Рассматриваются варианты распределения выигрыша между игроками коалиции. Излагаются принципы оптимальности для кооперативных игр — С-ядро, *НМ*-решение и вектор Шепли.

В пособии приняты следующие обозначения: новые понятия выделены жирным курсивом; матрицы в общем виде приводятся в круглых скобках, а матрицы с числовыми значениями — в квадратных.

Книга рассчитана, в первую очередь, на практика, впервые знакомящегося с предметом. Доступность изложения материала делает знакомство с принципами рационального поведения в конфликтах привлекательным для широкого круга читателей.

Данное пособие написано на основе курса лекций, читаемого автором в Московском инженерно-физическом институте (НИЯУ МИФИ).

ГЛАВА 1

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ КОНФЛИКТАХ

1.1. Матричные игровые задачи. Составление модели игры

Наибольшее практическое значение имеют парные игры, поэтому основное внимание уделим рассмотрению этого класса игр.

Развитие игры во времени представляется состоящим из ряда последовательных «ходов». ***Ходом*** в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы бывают личные и случайные. ***Личным ходом*** называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление. ***Случайным ходом*** называется выбор из ряда возможных альтернатив, осуществляемый некоторой незаинтересованной средой — назовем ее ***природой***. Для каждого случайного хода правила игры определяют распределение вероятностей возможных исходов [1].

Задача теории игр — рекомендовать игрокам определенные «стратегии» при выборе их личных ходов.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока, в зависимости от ситуации, сложившейся в ходе игры.

Целью теории игр является определение «оптимальной стратегии» для каждого игрока.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. При выборе этой стратегии считается, что противник делает все, чтобы помешать игроку добиться своей цели.

При постановке игровых задач должны быть определены следующие условия:

- стороны, принимающие решения;
- множество всех возможных действий (стратегий);
- выигрыши сторон для каждой ситуации.

Рассмотрим игру двух игроков, скажем А и В, каждый из которых имеет конечное число стратегий. Предположим, игрок А имеет m стратегий: A_1, A_2, ..., A_m, а игрок В — n стратегий: B_1, B_2, ..., B_n. Каждой паре стратегий (A_i, B_j) ставится в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш игрока А за счет игрока В (если $a_{ij} > 0$) или проигрыш игрока А игроку В (если $a_{ij} < 0$), когда А применяет свою стратегию A_i, а В — стратегию B_j.

В том случае, когда цели двух конкурирующих сторон являются прямо противоположными, для них можно определить единый критерий: одна из сторон будет заинтересована в увеличении значения этого критерия, а другая — в его уменьшении.

В случае единого критерия данная игра полностью может быть описана матрицей размерности $m \times n$, которая называется *матрицей игры* или *платежной матрицей* (отсюда следует и название данного класса игр — *матричные игры*).

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \end{array}.$$

Рассмотрим пример. Пусть матрица игры имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -10 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сторона А имеет две стратегии, а сторона В — три стратегии. Если игрок А применяет свою стратегию A_2, а В — стратегию B_3, то, следовательно, игрок А выигрывает 1 у. е., а игрок В проигрывает игроку А 1 у. е. Если игрок А применяет свою стратегию A_1, а В — стратегию B_2, то, следовательно, игрок А проигрывает 6 у. е. игроку В, а игрок В выигрывает 6 у. е. у игрока А.

В данной игре один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей игроков равна нулю. Поэтому игры данного класса называют *играми с нулевой суммой*.

Ценой игры называется средний выигрыш игрока А.

Рассмотрим несколько примеров построения платежных матриц.

Пример 1.1. Пусть игроки А и В одновременно показывают от одного до трех пальцев. Выигрыш или проигрыш определяется числом показанных пальцев. Если сумма числа пальцев четная, то А получает от В платеж (в у. е.), равный этой сумме, если сумма пальцев нечетная, то А платит В. Определить оптимальные стратегии поведения сторон.

Очевидно, что у каждого игрока по три стратегии: показывать один, два или три пальца. Элементы платежной матрицы в данной задаче могут быть рассчитаны по формуле

$$a_{ij} = (i + j)(-1)^{i+j},$$

и матрица размерности 3 × 3 примет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.2. Выбор ассортимента товаров [2].

На базе торговой организации имеется n типов одного из товаров ассортиментного минимума (к примеру, n сортов яблок). В магазин должны быть завезены один или несколько типов данного товара. Если товар j-го типа ($j = 1, ..., n$) будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль p_j у. е. Если же этот товар не будет пользоваться спросом, то магазин понесет убытки от его хранения, порчи и т. д., которые составят l_j у. е. (табл.1.1).

Таблица 1.1

Доход/Убыток \ Типы товара	1	2	3	4	5
Доход от реализации p_j (у. е.)	32	32	32	32	32
Убыток при хранении l_j (у. е.)	16	8	4	4	2

Требуется выбрать типы товара, которые целесообразно завести в магазин.

В данной задаче в качестве одной из конфликтующих сторон выступает магазин (игрок А), а в качестве другой — покупательский спрос (игрок В). Каждый из игроков имеет по n стратегий. Завоз i-го товара — стратегия A_i игрока А, спрос на j-й товар — стратегия B_j игрока В.

В данном случае платежная матрица игры будет квадратной матрицей размерности $n \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 32 & -16 & -16 & -16 & -16 \\ -8 & 32 & -8 & -8 & -8 \\ -4 & -4 & 32 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 32 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 32 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.3. Истребитель (И) атакует один из бомбардировщиков Б$_1$ или Б$_2$, летящих один за другим. Вооружение истребителя позволяет ему обстрелять один из бомбардировщиков. Вероятность поражения бомбардировщика при этом составляет $P_1 = 0.8$. На одном из бомбардировщиков находится бомба, однако на каком — не известно. Цель истребителя — сбить бомбардировщик с бомбой. Подлетая к бомбардировщику, истребитель подвергается обстрелу и может быть сбит с вероятностью $P_2 = 0.6$. После этого он обстреливает первый бомбардировщик или летит ко второму, подвергается обстрелу бомбардировщиком Б$_2$ и обстреливает его.

Требуется определить оптимальные стратегии поведения сторон, если истребитель (сторона А) стремится максимизировать вероятность поражения бомбардировщика с бомбой, а бомбардировщики (сторона В) стремятся эту вероятность минимизировать.

В распоряжении стороны А (истребитель) — 2 стратегии:

A_1 — обстреливать первый бомбардировщик;

A_2 — обстреливать второй бомбардировщик.

В распоряжении стороны В (бомбардировщики) также 2 стратегии:

B_1 — поместить бомбу на первый бомбардировщик;

B_2 — поместить бомбу на второй бомбардировщик.

Элементы платежной матрицы — вероятности поражения бомбардировщика с бомбой.

Очевидно, что если истребитель будет стрелять по бомбардировщику без бомбы, соответствующий элемент платежной матрицы будет равен нулю.

В результате платежная матрица примет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1-P_2)P_1 & 0 \\ 0 & (1-P_2)^2 P_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32 & 0 \\ 0 & 0.128 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что цель данного раздела – сосредоточить внимание на построении платежных матриц, а методы решения матричных задач будут приведены ниже.

1.2. Сокращение размерности игровой задачи

Прежде чем приступить к решению игровой задачи, надо проанализировать платежную матрицу на предмет сокращения ее размерности. При анализе игровой матрицы сразу можно выделить стратегии, являющиеся дублирующими или заведомо невыгодными для сторон.

В игре i-я стратегия ***дублирует*** j-ю стратегию, если

$$a_{il} = a_{jl} \text{ для } \forall l \in [1, m] \text{ или } a_{li} = a_{lj} \text{ для } \forall l \in [1, n].$$

Если в матрицу игры входят дублирующие стратегии, то из них оставляется любая одна, а остальные — удаляются.

К примеру, рассмотрим игру со следующей платежной матрицей:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}.$$

Как видно из матрицы, стратегии A_3, A_5 являются дублирующими, и одна из них, скажем A_5, из матрицы **A** может быть удалена:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

Определение заведомо невыгодных стратегий производится с помощью ***отношений доминирования***, которые заключаются в следующем.

Если каждой из стратегий стороны А поставить в соответствие вектор-строку матрицы **A**, то стратегия A_i будет доминировать стратегию A_j при выполнении следующего условия: $a_{il} \geq a_{jl}$ для $\forall l \in [1, n]$. В этом случае стратегия A_j не будет использоваться, и соответствующая строка из платежной матрицы удаляется.

Если каждой из стратегий стороны В поставить в соответствие вектор-столбец матрицы **A**, то стратегия B_j будет доминировать над стратегией B_i при выполнении следующего условия: $a_{li} \leq a_{lj}$ для $\forall l \in [1, m]$. В этом случае стратегия B_j не будет использоваться, и соответствующий столбец из платежной матрицы удаляется.

Элементы i-й строки матрицы **A** являются выигрышами стороны А при применении ею своей i-й стратегии. Если сравнить стратегию A_1 со стратегией A_3, можно заметить, что независимо от того, какую стратегию применяет сторона В, выигрыш стороны А при применении ею своей третьей стратегии всегда будет больше, чем при использовании первой стратегии. Следовательно, стратегия A_1 невыгодна по сравнению со стратегией A_3, и соответствующая строка может быть удалена из платежной матрицы. Аналогично, если сравнить стратегию A_2 со стратегией A_4, можно заметить, что A_4 невыгодна по сравнению с A_2, и соответствующая строка может быть удалена. Следовательно, мы имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{array}.$$

Рассмотрим данную игру с позиции стороны В. Для стороны В элементы j-го столбца платежной матрицы являются проигрышами при применении ею своей стратегии B_j. Естественно, выгодной для В является та стратегия, которая дает ей меньший проигрыш независимо от образа действий стороны А. Если сравнить стратегии B_2 и B_3, то видно, что независимо от того, какую стратегию применит сторона А, проигрыш стороны В будет больше при стратегии B_3, и, следовательно, соответствующий столбец может быть удален из платежной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{array}.$$

Таким образом, из платежной матрицы удаляются дублирующие стратегии (кроме одной), доминируемые строки и доминирующие столбцы. Порядок удаления строк и столбцов значения не имеет.

Пример 1.4. Рассмотрим применение отношений доминирования к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \end{array}.$$

1. Столбец 3 — доминирующий по отношению к столбцу 1, а столбцы 2 и 5 — доминирующие по отношению к столбцу 4.

Преобразованная матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \end{array}.$$

2. Строки 3 и 4 — доминируемые по отношению к строке 1. Преобразованная матрица:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

3. Столбец B_1 — доминирующий по отношению к B_4.

$$\begin{array}{cc} & B_4 \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

4. Строка A_2 — доминируемая по отношению к A_1.

$$\begin{array}{cc} & B_4 \\ \mathbf{A} = & [3] \end{array} \; A_1.$$

Проверьте себя! Упростите следующие матрицы игры:

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 & 7 \\ 6 & 9 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Ответ: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 8 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 6 \\ 10 & 2 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$. Ответ: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$.

1.3. Решение игровых задач в «чистых» стратегиях. Принцип минимакса

В некоторых случаях равновесная ситуация может быть определена непосредственно. В матричных играх ситуация является равновесной, если для $\forall i \in [1, m]$ и для $\forall j \in [1, n]$ выполняется соотношение

$$a_{i\,j^*} \le a_{i^*\,j^*} \le a_{i^*\,j},$$

где i^*, j^* — равновесная ситуация.

Прежде всего, это касается случая, когда в результате применения отношений доминирования к матрице игры остается единственный элемент. Номера строки и столбца, где этот элемент находится, и определяют равновесную ситуацию или решение в «чистых» стратегиях, т. е. четко указывают, какие стратегии должны применять обе стороны. В примере, рассмотренном в разделе 1.2, стороне А целесообразно применять свою первую стратегию, а стороне В — четвертую стратегию.

Другой случай наличия решения в «чистых» стратегиях связан с существованием седловой точки.

Определение седловых точек производится по следующей схеме:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ a_1^{\max} \quad a_2^{\max} \quad \dots \quad a_n^{\max} \end{array} \begin{array}{c} a_1^{\min} \\ a_2^{\min} \\ \dots \\ a_m^{\min} \\ \end{array} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \alpha.$$

$$\Downarrow$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \beta$$

Поставим задачу: определить наилучшую из стратегий стороны А при условии, что противник (сторона В) будет действовать наихудшим для нее образом.

Элементы i-й строки матрицы **А** являются выигрышами стороны А при применении ею своей стратегии A_i. Сторона А считает, что в ответ на любую ее стратегию A_i сторона В ответит той стратегией, которая наименее выгодна для А, т. е. дает А наименьший выигрыш. Поэтому в каждой строке находим минимальный элемент:

$$a_i^{\min} = \min_j a_{ij}$$

и заносим его в добавочный столбец справа от матрицы **А**.

Выбирая какую-то стратегию A_i, мы должны рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника мы выиграем только $a_i^{\min}$. Естественно, сторона А должна предпочесть другим ту стратегию, при которой она получает наибольший выигрыш из набора гарантированных минимумов. Обозначим это значение через α:

$$\alpha = \max_i a_i^{\min} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α называется ***нижней ценой игры*** либо максиминным выигрышем, либо ***максимином*** [1].

Та стратегия игрока А, которая соответствует максимину α, называется ***максиминной*** стратегией. Если игрок А будет придерживаться максиминной стратегии, то ему при любом поведении противника гарантирован выигрыш, не меньший α. Поэтому α — нижняя цена игры.

Рассмотрим теперь игру с позиций стороны В и выберем для нее оптимальную стратегию.

Элементы j-го столбца матрицы **A** являются проигрышами стороны В при применении ею своей стратегии B_j. Сторона В считает, что в ответ на любую ее стратегию B_j сторона А ответит той стратегией, которая наименее выгодна для В, т. е. дает В наибольший проигрыш. Поэтому в каждом столбце находим максимальный элемент:

$$a_j^{\max} = \max_i a_{ij}$$

и заносим его в добавочную строку снизу от матрицы **A**.

Выбирая стратегию B_j, сторона В должна рассчитывать на то, что в результате любых действий противника (стороны А) она проиграет не больше, чем $a_j^{\max}$. Ну а далее в интересах стороны В среди прочих выбрать ту стратегию, при которой она получает наименьший проигрыш из набора ожидаемых максимумов. Обозначим это значение через β:

$$\beta = \min_j a_j^{\max} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина β — ***верхняя цена игры*** либо минимаксный выигрыш, либо ***минимакс***. Соответствующая β стратегия стороны В – ее ***минимаксная*** стратегия. Если В будет придерживаться своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, то при любом поведении стороны А стороне В гарантирован проигрыш, не превышающий верхней цены игры β.

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной), называется ***принципом минимакса***. Он вытекает из предположения о разумности каждого игрока, стремящегося достигнуть цели, противоположной цели противника. Часто максиминную и минимаксную стратегии обозначают общим термином «минимаксные стратегии».

Нижняя цена игры α и ее верхняя цена β всегда связаны между собой неравенством

$$\alpha \le \beta.$$

Пример 1.5. Вернемся к игре «три пальца», описанной в примере 1.1.

Выписывая минимумы строк и максимумы столбцов, находим нижнюю и верхнюю цены игры:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} -\mathbf{3} \\ -5 \\ -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = -3$$

$$\underbrace{\mathbf{4} \quad \mathbf{4} \quad 6}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = 4$$

Максиминная стратегия игрока A — первая. Применяя ее систематически, игрок A гарантирован, что выиграет не больше –3, т. е. проиграет не больше 3. Минимаксная стратегия игрока B — любая из первых двух: применяя их систематически, игрок B гарантирован, что проиграет не более 4.

Особое место в теории игр занимают игры, для которых нижняя цена равна верхней

$$\alpha = \beta$$

или

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Эти игры называются ***играми с седловой точкой*** [1]. В матрице такой игры существует элемент, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце; такой элемент называется «седловой точкой» (по аналогии с седловой точкой на поверхности, где достигается минимум по одной координате и максимум по другой).

Общее значение нижней и верхней цены игры

$$\alpha = \beta = \nu$$

называется ***чистой ценой игры***. Соответствующие седловой точке стратегии A_i, B_j называются ***оптимальными***, они образуют ***равновесную ситуацию*** или ***решение игры***.

Решение игры обладает следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Действительно, пока игроки A и B придерживаются своих оптимальных стратегий, выигрыш остается постоянным и равным цене игры ν. Допустим, что игрок B отклонился от своей оптимальной стратегии. Поскольку элемент является минимальным в своей строке, такое отклонение не может быть выгодным для B (это увеличит его проигрыш). Аналогично, для игрока A не может быть выгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии, если B придерживается своей оптимальной.

Пример 1.6. Определить решение и цену игры для следующей задачи:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} 10 & \mathbf{6} & 7 \\ -9 & -6 & 16 \\ 14 & 5 & -3 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \mathbf{6} \\ -9 \\ -3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 14 & \mathbf{6} & 16 \end{array} & \end{array} \Rightarrow \alpha = 6$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = 6$$

В данном случае нижняя цена игры равна верхней $\alpha = \beta = 6$. Следовательно, это игра с седловой точкой, которая и определяет решение, т. е. пару оптимальных стратегий A_1 и B_2, и чистую цену игры $\nu = 6$.

Замечание. В платежной матрице может быть несколько седловых точек, но все они имеют одно и то же значение.

Проверьте себя! Определите наличие седловых точек в следующих матрицах.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\alpha = 1;\ \beta = 4 \ \Rightarrow\ \alpha \neq \beta \ \Rightarrow$ седловая точка отсутствует.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Ответ**:** $\alpha = \beta = 2 \ \Rightarrow$ седловая точка имеется.

1.4. Смешанные стратегии

В тех случаях, когда равновесная ситуация не может быть найдена при помощи исключения доминируемых строк и доминирующих столбцов и нет седловой точки, решение в чистых стратегиях отсутствует. Тогда каждая из сторон может использовать свои стратегии с некоторой вероятностью в предположении, что игра, определяемая платежной матрицей **A**, повторяется достаточное количество раз.

Задача состоит в том, чтобы определить эти вероятности таким образом, чтобы они обеспечивали максимально гарантированный выигрыш при учете действий противоположной стороны.

Введем m-мерный вектор-столбец $\mathbf{x}$, где m — число стратегий стороны А:

$$\mathbf{x}_{[m\times 1]} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Элемент этого вектора x_i определяет вероятность применения стороной А своей i-й стратегии.

Кроме того, введем n-мерный вектор-столбец $\mathbf{y}$, где n — число стратегий стороны В:

$$\mathbf{y}_{[n\times 1]} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Элемент y_j вектора $\mathbf{y}$ определяет вероятность применения стороной В соответствующей стратегии.

Элементы этих векторов должны удовлетворять условиям

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии: когда все стратегии, кроме данной, имеют вероятности, равные нулю, а данная — единице.

В условиях смешанных стратегий [5] каждая обычная ситуация (в чистых стратегиях) $\{A_i, B_j\}$ является случайным событием и ввиду независимости наборов вероятностей $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ реализуется с вероятностью $x_i y_j$. В ситуации $\{A_i, B_j\}$ игрок А получает выигрыш a_{ij}. Таким образом, математическое ожидание выигрыша игрока А в условиях смешанных стратегий будет определяться следующим образом:

$$h_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j .$$

Это число принимается за средний выигрыш игрока А при смешанных стратегиях $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ называются ***оптимальными смешанными стратегиями*** игроков А и В соответственно, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* y_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* y_j. \qquad (1.4.1)$$

Решением игры называется пара оптимальных стратегий $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$, в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей оптимальной.

Проанализируем неравенства (1.4.1).

Левое неравенство означает: отклонение игрока А от оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$ при условии, что игрок В придерживается своей оптимальной стратегии $\mathbf{y}^*$, приводит к тому, что выигрыш отклонившегося игрока А может только уменьшиться.

Правое неравенство означает: отклонение игрока В от оптимальной стратегии $\mathbf{y}^*$ при условии, что игрок А придерживается своей оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$, приводит к тому, что выигрыш игрока А может только возрасти, а значит, возрастет и проигрыш игрока В.

Выигрыш, соответствующий решению, называется ***ценой игры***; мы будем обозначать ее ν (как и чистую цену):

$$\nu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* y_j^*.$$

В векторно-матричной форме последнее выражение будет выглядеть следующим образом:

$$\nu = \mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^*,$$

где $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ — векторы оптимальных стратегий.

Цена игры всегда лежит между нижней ценой игры и верхней ценой игры:

$$\alpha \le \nu \le \beta.$$

Действительно, α есть минимальный гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе игрок А, применяя только свои чистые стратегии. Применяя смешанные стратегии, игрок А во всяком случае не уменьшит свой выигрыш, т. е. $\nu \ge \alpha$. Для игрока В аналогичные рассуждения приведут к выводу, что $\nu \le \beta$. Поэтому в общем случае $\alpha \le \nu \le \beta$.