ПРЕДИСЛОВИЕ

В справочнике приведен материал по всем базовым темам арифметики и алгебры 5–9 классов:

- Числа и вычисления.
- Выражения с переменными.
- Степени и корни.
- Функции и их графики.
- Уравнения и системы уравнений.
- Неравенства и системы неравенств.
- Последовательности.

Кроме того, добавлены три раздела:

- Задачи с параметром.
- Задачи с целочисленными решениями.
- Элементы статистики, комбинаторики и теории вероятностей.

Эти задачи заметно сложнее обычных типовых задач. Однако подобные задачи получают все большее распространение. Поэтому необходимо знать основные подходы к их решению.

Изложение теоретического материала сопровождается значительным количеством примеров и задач различной степени сложности. Поэтому справочник можно рассматривать и как пособие по методам решения задач. В целом справочник имеет прикладной практический характер. Пособие предназначено в первую очередь для текущего обучения (подготовки к уроку, самостоятельным и контрольным работам и т. д.) и для подготовки к экзаменам (ОГЭ, а в дальнейшем и ЕГЭ). При небольшом объеме в справочнике содержится вся необходимая информация для эффективного обучения.

ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Натуральными называют числа, используемые для счета: 1; 2; 3; ...; 100; ... .

Натуральное число n делится на натуральное число k, если можно найти такое натуральное число p, что справедливо равенство $n = k \cdot p$.

Например, натуральное число 15 делится на натуральное число 5, так как существует натуральное число 3, для которого справедливо равенство $15 = 5 \cdot 3$. Заметим, что из равенства $15 = 5 \cdot 3$ следует, что 15 делится и на 3.

Свойства делимости

1. Если в сумме натуральных чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число.

Например, сумма чисел $6 + 9 + 21$ делится на 3, так как каждое слагаемое 6; 9; 21 делится на 3.

Замечание. Если сумма нескольких чисел делится на некоторое число, то это не означает, что каждое слагаемое делится на это число. Например, сумма чисел 4; 7 и 10 равна 21 и, следовательно, делится на 3, однако ни одно из чисел 4; 7; 10 не делится на 3.

2. Если в произведении натуральных чисел один из множителей делится на некоторое число, то и все произведение делится на это число.

Например, произведение $21 \cdot 9 \cdot 31$ делится на 7, так как число 21 делится на 7.

Признаки делимости

Рассмотрим основные признаки делимости натуральных чисел.

Натуральное число делится на 2, если оно оканчивается одной из следующих цифр 0; 2; 4; 6; 8. Например, число 356 делится на 2, так как оно оканчивается на 6; число 6807 не делится на 2, так как оно оканчивается на 7.

Четными называют натуральные числа, делящиеся на 2. ***Нечетными*** называют натуральные числа, не делящиеся на 2.

Натуральное число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Например, число 1584 делится на 3, так как сумма его цифр $1 + 5 + 8 + 4 = 18$ делится на 3.

Натуральное число делится на 4, если:

- оно оканчивается двумя нулями;
- оно оканчивается на 04 или на 08;
- последние две цифры числа образуют двузначное число, которое делится на 4.

Например, число 5800 делится на 4, так как оно оканчивается двумя нулями; число 91 316 делится на 4, так как последние две цифры 1 и 6 этого числа образуют число 16, которое делится на 4.

Натуральное число делится на 5, если оно оканчивается либо на 0, либо на 5. Например, число 3160 делится на 5, так как оно оканчивается на 0; число 1565 делится на 5, так как оно оканчивается на 5.

Натуральное число делится на 8, если:

- оно оканчивается тремя нулями. Например, число 1000 делится на 8;
- оно оканчивается на 008. Например, число 15 008 делится на 8;
- оно оканчивается на $0nk$, где двузначное число nk, образованное последними двумя цифрами, делится на 8. Например, 123 016 делится на 8, так как число 16 делится на 8;
- последние три цифры числа образуют трехзначное число, которое делится на 8. Например, 23 168 делится на 8, так как число 168 делится на 8.

Натуральное число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9. Например, число 12 915 делится на 9, так как сумма цифр этого числа $1 + 2 + 9 + 1 + 5 = 18$ делится на 9.

Натуральное число делится на 10, если оно оканчивается на 0. Например, число 1230 делится на 10.

Замечание.

1. Натуральное число будет делиться на 6, если оно делится и на 2, и на 3. Например, число 1584 делится на 6, так как:

- оно оканчивается на 4, и поэтому это число делится на 2;
- сумма его цифр $1 + 5 + 8 + 4 = 18$ делится на 3, поэтому это число делится на 3.

2. Существует признак делимости на 7, который мы не приводим ввиду его сложности.

Пример 1. Какую цифру нужно поставить вместо буквы a, чтобы число $\overline{3a45}$ делилось на 9?

Решение. Для того чтобы число $\overline{3a45}$ делилось на 9, надо, чтобы сумма его цифр $3 + a + 4 + 5 = 12 + a$ делилась на 9. Подберем цифру a. Подходит только цифра 6, так как $12 + 6 = 18$, а число 18 делится на 9.

Пример 2. Какую цифру надо поставить вместо буквы a, чтобы число $\overline{2543a}$ делилось на 18?

Решение. Число $\overline{2543a}$ будет делиться на 18, если оно делится и на 2, и на 9. Для делимости на 2 последняя цифра должны быть равна 0; 2; 4; 6; 8. Если последняя цифра равна 0, то сумма цифр числа 25 430 равна $2 + 5 + 4 + 3 = 14$. Число 14 на 9 не делится, поэтому число 25 430 на 9 не делится. Аналогично можно проверить, что числа 25 432; 25 436 и 25 438 на 9 не делятся.

Если последняя цифра равна 4, то сумма цифр числа равна $2 + 5 + 4 + 3 + 4 = 18$, поэтому число 25 434 делится на 9. Мы выяснили, что число 25 434 делится и на 9, и на 2, следовательно, оно делится на 18.

Простым числом называют натуральное число, которое имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число. Например, число 3 делится только на 1 и на 3, поэтому 3 – простое число. Число 1 делится только на 1, поэтому 1 не является простым числом.

Составным числом называют натуральное число, которое имеет более двух натуральных делителей. Например, число 6 делится на 1, на 2, на 3 и на 6, поэтому 6 – составное число.

Любое составное число можно разложить на простые множители (т. е. представить в виде произведения простых множителей), причем только одним способом. Способы, при которых произведения отличаются только порядком множителей, считаются одним способом. Например, $14 = 7 \cdot 2$ и $14 = 2 \cdot 7$ – одинаковые разложения.

Для единообразия записи принято:

- простые множители записывать в порядке их возрастания. Например, $6 = 2 \cdot 3$ (а не $6 = 3 \cdot 2$);
- одинаковые множители записывать в виде степени, пользуясь формулой $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, где n – натуральное число, $n \neq 1$. Например, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$.

Пример 3. Разложим число 450 на простые множители.

Используем признаки делимости на 2, 3, 5 и получим

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{array}$$

Таким образом, $450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Если натуральное число n делится на натуральное число k, то число k называют ***делителем*** числа n, а число n – ***кратным*** числу k. Например, число 7 – делитель числа 21, а число 21 кратно числу 7.

Натуральное число p называют ***общим делителем*** натуральных чисел n и k, если оно является делителем и для n, и для k. Например, число 3 является делителем и числа 36, и числа 48, поэтому число 3 является общим делителем чисел 36 и 48.

Среди делителей двух чисел n и k есть наибольший, который называют ***наибольшим общим делителем*** чисел n и k и обозначают НОД (n, k). Например, числа 24 и 42 имеют следующие общие делители 1; 2; 3; 6, поэтому НОД (24; 42) = 6.

Нахождение НОД двух натуральных чисел

Пример 4. Найдем НОД (462; 990).

Раскладываем оба натуральных числа на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11,$$

990	2
495	3
165	3
55	5
11	11

$$990 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11.$$

В разложение и числа 462, и числа 990 на простые множители число 2 входит в первой степени. Поэтому в разложение на простые множители наибольшего общего делителя этих двух чисел число 2 также будет входить в первой степени. Рассуждая аналогично, получим, что 11 входит в разложение наибольшего общего делителя также в первой степени. В разложение 462 число 3 входит в первой степени, а в разложение 990 – во второй степени. Значит, в разложение НОД (462; 990) число 3 будет входить в наименьшей, т. е. в первой, степени. Получим НОД $(462; 990) = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$.

Натуральное число p называют ***общим кратным*** натуральных чисел n и k, если p кратно и числу n, и числу k.

Например, число 60 кратно и числу 5, и числу 6. Следовательно, число 60 – общее кратное чисел 5 и 6.

Среди общих кратных двух чисел n и k есть наименьшее, которое называют ***наименьшим общим кратным*** чисел n и k и обозначают НОК $(n; k)$.

Например, наименьшим общим кратным чисел 5 и 6 является их произведение, т. е. число 30.

Нахождение НОК двух натуральных чисел

Пример 5. Найдем НОК (1350; 2250).

Разложим каждое из чисел на простые множители: $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ и $2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.

В разложение и числа 1350, и числа 2250 число 2 входит в первой степени. Значит, в разложение на простые множители НОК (1350; 2250) число 2 также будет входить в первой степени. В разложение числа 1350 число 3 входит в третьей степени, а в разложение числа 2250 – во второй. Значит, в разложение на простые множители НОК (1350; 2250) число 3 будет входить в наибольшей степени, т. е. в третьей. Аналогично, рассматривая число 5, мы получим, что в разложение НОК (1350; 2250) это число будет входить в третьей степени. Получим НОК $(1350; 2250) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 6750$.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Целые числа – это числа 0; ±1; ±2; ±3; ... . При этом числа 1; 2; 3; ... называют ***положительными*** целыми числами, а числа –1; –2; –3; ... называют ***отрицательными*** целыми числами.

Пример 1. Найдем все целые значения x и y, для которых произведение $(x + 2)(y - 1)$ равно –3.

Поскольку x и y – целые числа, то $x + 2$ и $y - 1$ также целые числа. Поэтому $(x + 2)(y - 1)$ произведение двух целых чисел. Число -3 может быть представлено в виде произведения целых чисел следующими четырьмя способами:

$-3 = -3 \cdot 1 = 3 \cdot (-1) = -1 \cdot 3 = 1 \cdot (-3)$.

Поэтому имеют место следующие четыре случая:

1) $(x + 2)(y - 1) = -3 \cdot 1$, т. е. $x + 2 = -3$, тогда $x = -5$ и $y - 1 = 1$, откуда $y = 2$.

2) $(x + 2)(y - 1) = 3 \cdot (-1)$, т. е. $x + 2 = 3$, тогда $x = 1$ и $y - 1 = -1$, откуда $y = 0$.

3) $(x + 2)(y - 1) = -1 \cdot 3$, т. е. $x + 2 = -1$, тогда $x = -3$ и $y - 1 = 3$, откуда $y = 4$.

4) $(x + 2)(y - 1) = 1 \cdot (-3)$, т. е. $x + 2 = 1$, тогда $x = -1$ и $y - 1 = -3$, откуда $y = -2$.

Выпишем полученный результат в виде пар чисел, где на первом месте стоит x, а на втором месте стоит y: $(-5; 2)$; $(1; 0)$; $(-3; 4)$; $(-1; -2)$.

Деление с остатком

Говорят, что целое число n делится на натуральное число k с остатком r, если справедливо равенство

делимое неполное частное

$$n = kp + r,$$

делитель остаток

где r может равняться 0; 1; 2; 3; ...; $k - 1$. Если $r = 0$, то n делится на k нацело.

Например, число 25 делится на 7 с остатком 4, так как справедливо равенство $25 = 3 \cdot 7 + 4$. Число -35 делится на 7 нацело, так как $-35 = 7 \cdot (-5)$. Число -25 делится на 7 с остатком 3, так как $-25 = (-4) \cdot 7 + 3$.

Пример 2. Целое число n при делении на 2 может иметь остатки 0 и 1. Если остаток равен 0, то $n = 2k$ (представление четных чисел). Если остаток равен 1, то $n = 2k + 1$ (представление нечетных чисел).

Пример 3. Покажем, что произведение трех идущих друг за другом целых чисел делится на 3.

Обозначим идущие друг за другом целые числа n, $n + 1$ и $n + 2$. При делении на 3 число n может иметь остатки 0; 1 и 2. Докажем наше утверждение в случаях для каждого из этих остатков.

Пусть остаток равен 0, тогда $n = 3k$. Подставим $n = 3k$ в произведение $a = n(n + 1)(n + 2)$. Получим $a = 3k(3k + 1)(3k + 2)$. Поскольку $k(3k + 1)(3k + 2)$ – целое число, то рассматриваемое произведение делится на 3.

Пусть остаток равен 1, тогда $n = 3k + 1$ и $a = (3k + 1)(3k + 2)(3k + 3) = 3(3k + 1)(3k + 2)(k + 1)$, и аналогично предыдущему случаю получаем, что a делится на 3.

Пусть остаток равен 2, тогда $n = 3k + 2$, и из представления $a = (3k + 2)(3k + 3)(3k + 4) = 3(3k + 2)(k + 1)(3k + 4)$ следует, что a делится на 3.

Замечание. Справедливо более общее утверждение: произведение k последовательных целых чисел делится на k.

Пример 4. Найдем остатки, которые может иметь квадрат целого числа при делении на 3.

Целое число n при делении на 3 может иметь остатки 0; 1; 2. Пусть остаток равен 0 и $n = 3k$, тогда $n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$, т. е. в этом случае n^2 при делении на 3 дает остаток 0.

Пусть остаток равен 1, тогда $n = 3k + 1$ и $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, т. е. n^2 при делении на 3 дает остаток 1.

Пусть остаток при делении n на 3 равен 2, тогда $n = 3k +2$ и $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. В этом случае n^2 при делении на 3 также имеет остаток 1. Таким образом, при делении на 3 квадрат любого целого числа может иметь лишь остатки 0 и 1.

Пример 5. Может ли число 457 226 быть квадратом целого числа?

Заметим, что число 457 224 делится на 3, поскольку сумма его цифр $4 + 5 + 7 + 2 + 2 + 4 = 24$ делится на 3. Тогда число $457\,226 = 457\,224 + 2$ дает при делении на 3 остаток 2, а значит, не может быть квадратом целого числа (см. пример 4).

Замечание. Последней цифрой квадрата целого числа может быть только одна из следующих цифр: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Обыкновенная дробь – число, представляемое в виде $\frac{k}{n}$, где k – числитель дроби (целое число), n – знаменатель дроби (натуральное число).

Если k – целое отрицательное число, то число $\frac{k}{n}$ называют ***отрицательной*** дробью, например, $\frac{-2}{7}$; если k – натуральное число, то число $\frac{k}{n}$ называют ***положительной*** дробью, например, $\frac{3}{5}$. Мы будем рассматривать лишь положительные дроби.

Любое натуральное число можно записать в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1, например, $7 = \frac{7}{1}$.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель данной дроби умножить на одно и то же натуральное число или разделить на их общий множитель, то получится дробь, равная данной. Например, из дроби $\frac{3}{7}$ можно получить равную ей дробь $\frac{9}{21}$ путем умножения числителя и знаменателя на 3, тогда $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{9}{21}$. Из дроби $\frac{10}{25}$ можно получить равную ей дробь $\frac{2}{5}$ путем деления числителя и знаменателя на 5, тогда $\frac{10}{25} = \frac{10 : 5}{25 : 5} = \frac{2}{5}$.

Деление числителя и знаменателя на общий множитель называют ***сокращением дробей***. Например, сократим дробь $\frac{105}{147}=\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot7^2}=\frac{(3\cdot5\cdot7):(3\cdot7)}{\left(3\cdot7^2\right):(3\cdot7)}=\frac{5}{7}$.

Несократимая дробь – дробь, у которой наибольший общий делитель числителя и знаменателя равен 1. Например, дробь $\frac{5}{11}$ несократима, так как числа 5 и 11 простые и, следовательно, НОД (5; 11) = 1.

Любую дробь можно записать в виде несократимой. Для этого числитель и знаменатель дроби надо поделить на наибольший общий делитель числителя и знаменателя. Например, запишем дробь $\frac{15}{42}$ в виде несократимой. Сначала найдем, что НОД (15; 42) = 3. Поделим числитель и знаменатель исходной дроби на 3, получим $\frac{15}{42}=\frac{15:3}{42:3}=\frac{5}{14}$.

Умножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же натуральное число, не равное 1, называют ***приведением дроби к другому знаменателю***.

Пример 1. Приведем дробь $\frac{3}{11}$ к знаменателю 77.

Найдем то натуральное число, на которое надо умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{11}$, чтобы получить знаменатель 77: 77 : 11 = 7. Получим $\frac{3}{11}=\frac{3\cdot7}{11\cdot7}=\frac{21}{77}$.

Для ***приведения двух дробей к общему знаменателю*** надо числитель и знаменатель первой дроби умножить на знаменатель второй, а числитель и знаменатель второй дроби умножить на знаменатель первой.

Пример 2. Приведем дроби $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{5}$ к общему знаменателю.

Для этого умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{7}$ на 5, тогда $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot5}{7\cdot5}=\frac{10}{35}$, а числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{5}$ на 7, тогда $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot7}{5\cdot7}=\frac{21}{35}$. Получили две дроби $\frac{10}{35}$ и $\frac{21}{35}$ с одинаковым знаменателем.

Для получения меньшего знаменателя дроби приводят к ***наименьшему общему знаменателю***, которым является наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей.

Пример 3. Приведем дроби $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{20}$ к наименьшему общему знаменателю.

Для этого найдем наименьшее общее кратное чисел 12 и 20, НОК (12; 20) = = 60. Поскольку 60 : 12 = 5, то числитель и знаменатель дроби $\frac{5}{12}$ надо умножить на 5, получим $\frac{5}{12}=\frac{5\cdot5}{5\cdot12}=\frac{25}{60}$. Так как 60 : 20 = 3, то числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{20}$ надо умножить на 3, тогда $\frac{3}{20}=\frac{3\cdot3}{20\cdot3}=\frac{9}{60}$. Получили $\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$; $\frac{3}{20}=\frac{9}{60}$.

Сравнение обыкновенных дробей

1. Из двух дробей с одинаковым числителем та дробь больше, у которой знаменатель меньше. Например, $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$, так как $5 < 7$.

2. Из двух дробей с одинаковым знаменателем та дробь больше, у которой числитель больше. Например, $\frac{13}{16} > \frac{9}{16}$, так как $13 > 9$.

3. Чтобы сравнить две дроби с различными числителями и знаменателями, нужно привести эти дроби к общему знаменателю и далее сравнить полученные дроби по правилу сравнения дробей с одинаковыми знаменателями. Например, $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$, так как $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$; $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ и $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$.

Сложение и вычитание дробей

1. Для того чтобы сложить (вычесть) две обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями, надо записать дробь, у которой знаменатель равен знаменателю данных дробей, а числитель равен сумме (разности) числителей. Например, $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7}$; $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}$.

2. Для сложения (вычитания) дробей с разными знаменателями их сначала приводят к общему знаменателю, а затем складывают полученные дроби по правилу сложения (вычитания) дробей с равными знаменателями.

Пример 4. Сложим дроби $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{11}$.

Сначала приведем их к общему знаменателю 77, тогда $\frac{2}{7} = \frac{22}{77}$; $\frac{3}{11} = \frac{21}{77}$. Получим $\frac{2}{7} + \frac{3}{11} = \frac{22}{77} + \frac{21}{77} = \frac{43}{77}$.

Умножение дробей

Произведение двух обыкновенных дробей равно дроби, числитель которой равен произведению их числителей, а знаменатель равен произведению знаменателей. Например, $\frac{5}{11} \cdot \frac{14}{15} = \frac{5 \cdot 14}{11 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 14}{11 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{14}{11 \cdot 3} = \frac{14}{33}$.

Деление дробей

Частное двух обыкновенных дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителя равной дроби на знаменатель второй, а знаменатель равен произведению знаменателя первой дроби на числитель второй. Например, $\frac{5}{7} : \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 8}{7 \cdot 3} = \frac{40}{21}$.

Правильной дробью называют дробь, у которой числитель меньше знаменателя, например, $\frac{3}{5}$. ***Неправильной*** дробью называют дробь, у которой числитель больше или равен знаменателю, например, $\frac{5}{5}$; $\frac{8}{3}$. У неправильной дроби можно выделить целую часть, выполнив деление числителя на знаменатель с остатком.

Пример 5. Выделим целую часть из неправильной дроби $\frac{17}{3}$.

Поделим 17 на 3 с остатком: $17 = 3 \cdot 5 + 2$. Тогда $\frac{17}{3} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{3} = \frac{3 \cdot 5}{3} + \frac{2}{3} =$ $= 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$. Число 5 – целая часть неправильной дроби; правильная дробь $\frac{2}{3}$ – ее дробная часть.

Смешанная дробь – число, содержащее целую и дробную часть, например $5\frac{2}{3}$. Смешанную дробь можно превратить в неправильную дробь. Последовательность действий обратная по сравнению с превращением неправильной дроби в смешанную.

Пример 6. Превратим в неправильную дробь смешанную дробь $2\frac{3}{8}$.

Имеем $2\frac{3}{8} = 2 + \frac{3}{8} = \frac{2}{1} + \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 8}{1 \cdot 8} + \frac{3}{8} = \frac{16}{8} + \frac{3}{8} = \frac{19}{8}$.

При арифметических действиях со смешанными дробями (при умножении и делении обязательно) их сначала превращают в неправильные дроби.

Пример 7. Вычислим $5\frac{1}{7} : 3\frac{3}{5}$.

Превратим дроби $5\frac{1}{7}$ и $3\frac{3}{5}$ в неправильные: $5\frac{1}{7} = \frac{36}{7}$; $3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$. Далее по правилам действия с обыкновенными дробями: $\frac{36}{7} : \frac{18}{5} = \frac{36}{7} \cdot \frac{5}{18} = \frac{10}{7}$.

Замечание. При сложении и вычитании смешанных дробей часто удобнее выполнять действия отдельно с их целыми и дробными частями. Например: $2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{7} = 2 - 1 + \frac{3}{4} - \frac{2}{7} = 1 + \frac{21 - 8}{28} = 1\frac{13}{28}$.

Рациональным числом называют число, представимое в виде $\frac{k}{n}$, где k – целое число; n – натуральное число. Например, $\frac{-2}{7}$; $\frac{17}{99}$; $\frac{20}{3}$ – рациональные числа. Любое рациональное число можно записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Например, $\frac{3}{20} = 0{,}15$; $\frac{5}{33} = 0{,}151515...$ Повторяющаяся группа цифр называется периодом и записывается в круглых скобках, т. е. $0{,}151515... = 0{,}(15)$.

Помимо рациональных чисел имеются числа, записываемые в виде бесконечных непериодических десятичных дробей. Эти числа называют ***иррациональными***. Например, число 5,01001000100001... (здесь после группы нулей идет единица, причем количество нулей каждый раз увеличивается на один) представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь. Это иррациональное число.

Порядок выполнения действий в числовых выражениях

Числовые выражения – выражения, составленные из чисел, знаков действий и скобок.

1. Если числовое выражение не содержит скобок, то сначала выполняют умножение и деление, а затем сложение и вычитание.

Пример 8. Вычислим значение выражения $1\frac{5}{7}\overset{(1)}{\cdot}\frac{1}{3}\overset{(2)}{+}\frac{3}{7}$.

Выполним задачу по действиям:

1) $1\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{12}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{12\cdot 1}{7\cdot 3}=\frac{3\cdot 4}{7\cdot 3}=\frac{4}{7}$;

2) $\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4+3}{7}=\frac{7}{7}=1$.

2. Если в числовом выражении содержатся скобки, то сначала выполняют действие в скобках, а затем все остальные действия.

Пример 9. Вычислим значение выражения $\left(2\frac{1}{3}\overset{(1)}{+}3{,}5\right)\overset{(2)}{:}4\frac{1}{6}\overset{(3)}{-}\frac{2}{5}$.

1) $2\frac{1}{3}+3{,}5=\frac{7}{3}+\frac{7}{2}=\frac{7\cdot 2}{6}+\frac{7\cdot 3}{6}=\frac{14+21}{6}=\frac{35}{6}$;

2) $\frac{35}{6}:4\frac{1}{6}=\frac{35}{6}:\frac{25}{6}=\frac{35\cdot 6}{6\cdot 25}=\frac{7}{5}$;

3) $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}=\frac{7-2}{5}=1$.

ПРОПОРЦИИ

Отношением двух чисел называется выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b – любые числа (целые, рациональные, иррациональные). Например: $\frac{0{,}5}{1{,}1}$; $\frac{-7}{5}$.

Пропорцией называют равенство двух отношений $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(bd\neq 0)$, а числа a, b, c, d – членами пропорции, при этом числа a и d называют крайними членами пропорции, а числа b и c – средними членами пропорции. Например, $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$ – пропорция, числа 2 и 21 – крайние члены этой пропорции; 6 и 7 – средние члены этой пропорции.

Основное свойство пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(bd\neq 0)$ состоит в том, что произведение ее крайних членов равно произведению ее средних членов, т. е. $ad=bc$. Например, пропорция $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$ означает, что $2\cdot 21=6\cdot 7$. Из основного свойства пропорции следует, что если $abcd\neq 0$, то равенство $ad=bc$ можно записать одним из следующих способов: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{b}=\frac{a}{c}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$. Например, пропорцию $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$ можно записать еще и следующим образом: $\frac{2}{6}=\frac{7}{21}$; $\frac{7}{2}=\frac{21}{6}$; $\frac{6}{2}=\frac{21}{7}$.

Пример 10. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Сколько надо взять частей каждого сплава, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

Пусть x – масса первого сплава, а y – масса второго сплава. Первый сплав состоит из трех частей (одна часть – первый металл и две части – второй металл). Тогда масса первого металла составляет $\frac{1}{3}x$, а масса второго металла $\frac{2}{3}x$. Дальнейшие рассуждения удобно представить в виде таблицы.

	Масса первого металла	**Масса второго металла**	**Общая масса**
1-й сплав	$\frac{1}{3}x$	$\frac{2}{3}x$	x
2-й сплав	$\frac{2}{5}y$	$\frac{3}{5}y$	y
3-й сплав	$\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y$	$\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y$	$x+y$

По условию отношение масс первого и второго металла в полученном сплаве должно быть равно 17 : 27. Получим пропорцию $\dfrac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}=\frac{17}{27}$. Умножим числитель и знаменатель дроби в левой части пропорции на 15. Получим $\frac{5x+6y}{10x+9y}=\frac{17}{27}$. По свойству пропорции $27(5x+6y)=17(10x+9y)$. Отсюда, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, мы имеем равенство $9y=35x$. Получаем пропорцию $\frac{x}{y}=\frac{9}{35}$. Поэтому первый и второй сплавы надо взять в отношении 9 : 35.

ПРОЦЕНТЫ

Процентом данного числа a называется его сотая часть. Следовательно, само число составляет 100%.

При решении задач на проценты некоторая величина a принимается за 100%, а ее часть (величина b) принимается за x%. Далее составляется пропорция $\frac{b}{a}=\frac{x}{100}$, откуда по двум неизвестным величинам находится третья по свойству пропорции.

Три основные задачи на проценты

1. Найти указанный процент от данного числа.

Например, найдем 40% от числа 15. Пусть искомое число равно x. Оно составляет 40%. Составим пропорцию $\frac{x}{15} = \frac{40}{100}$, откуда $100x = 15 \cdot 40$ и $x = 6$.

2. Найти число по его проценту.

Например, найдем число, 30% от которого равно 90. Пусть искомое число равно x. Оно составляет 100%. Составим пропорцию $\frac{x}{90} = \frac{100}{30}$, откуда получим $x = 300$.

3. Найти выражение одного числа в процентах от другого.

Например, найдем, сколько процентов от 60 составляет число 12. Пусть искомое число процентов равно x, а число 60 составляет 100%. Составим пропорцию $\frac{12}{60} = \frac{x}{100}$, откуда $x = 20$.

Рассмотрим более сложные задачи на проценты.

Пример 1. Банк «Капитал» начисляет по вкладу 10% каждые 4 месяца, а банк «Авангард» начисляет 15% каждые полгода. В каком банке вклад через год принесет больший доход при одинаковой начальной сумме вложения?

При решении этой задачи следует учесть начисление процентов на проценты (так называемый сложный процент). В первом банке проценты будут начисляться три раза за год, следовательно, итоговая сумма вклада будет в $(1 + 0{,}1)^3 = 1{,}1^3 = 1{,}331$ раза больше первоначальной. Во втором банке начисления будут осуществляться дважды, а значит, итоговая сумма окажется в $(1 + 0{,}15)^2 = 1{,}15^2 = 1{,}3225$ раза больше первоначальной. Итак, в банке «Капитал» доход по вкладу будет больше.

Пример 2. Из 40 т руды выплавили 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

При решении подобных задач пропорцию для определения неизвестной величины нужно составлять для того компонента сплава, смеси, раствора и т. п., который не изменяется в процессе плавки, сушки, варки и т. д. в абсолютном выражении. В данном случае в процессе плавки сохраняется основной компонент стали – железо. Поскольку в стали железо составляет по условию $100 - 6 = 94\%$, то в руде, вес которой вдвое больше, то же самое количество стали составляло вдвое меньше процентов, т. е. 47%. Следовательно, руда содержит 53% примесей.

ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

Выражения, состоящие из чисел, букв, знаков действий и скобок, называют ***выражениями с переменными***. Например, $\frac{x+1}{x-1}$. При $x = 2$ можно вычислить значение этого выражения $\left(\frac{2+1}{2-1} = 3\right)$. Значение $x = 2$ называют допустимым значением переменной для данного выражения. При $x = 1$ значение выражения $\frac{x+1}{x-1}$ вычислить нельзя (так как на 0 делить нельзя). Значение $x = 1$ не является допустимым значением переменной.

Областью допустимых значений (ОДЗ) выражения с переменными называют множество всех наборов допустимых значений переменных, входящих в выражение. Например, ОДЗ выражения $\frac{x+1}{x-1}$ является объединением промежутков $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, а ОДЗ выражения $\frac{2x^3 - 3xy^2 + 1}{x(2y + 3x)}$ является множество всех пар чисел (x, y) таких, что $x \neq 0$, $y \neq -\frac{3x}{2}$.

ОДНОЧЛЕНЫ

Одночленами называют выражения с переменными, представляющие собой произведение чисел, переменных и их натуральных степеней. Например, $2a^2 \cdot 0{,}5ab^2$; $-3xy^2z^3$. Одночлен $-3xy^2z^3$ имеет вид произведения числа -3 и степеней переменных x, y и z, перечисленных в алфавитном порядке. Такой вид одночлена называют ***стандартным***. При этом число -3 называют коэффициентом одночлена, сумму степеней переменных $1 + 2 + 3 = 6$ называют ***степенью одночлена***. Например, коэффициент и степень одночлена $2a^2 \cdot 0{,}5ab^2$ можно определить после приведения его к стандартному виду: a^3b^2 (коэффициент равен 1, а степень равна $3 + 2 = 5$).

Действия с одночленами

1. Умножение одночленов.

Например, перемножим одночлены $3a^2x$ и $-5ax^2y$. Для этого составим произведение и преобразуем его в одночлен стандартного вида:

$3a^2x \cdot (-5ax^2y) = 3 \cdot (-5) \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (x \cdot x^2) \cdot y = -15a^3x^3y.$

2. Возведение одночленов в степень.

Например, возведем в квадрат одночлен $1{,}2a^3b$. Для этого составим соответствующее выражение и преобразуем его в одночлен стандартного вида:

$(1{,}2a^3b)^2 = 1{,}2^2 \cdot (a^3)^2 \cdot b^2 = 1{,}44a^6b^2.$

Подобные одночлены (одночлены, отличающиеся только числовым коэффициентом) можно также складывать и вычитать.

МНОГОЧЛЕНЫ

Многочленом называют сумму или разность одночленов. Например, $P = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2$; $Q = ab^3 + a^3b - abc$. Многочлен P – многочлен с одной переменной, а Q – многочлен с несколькими переменными. Слагаемые $5x^3$; $-4x^2$; $3x$; -2 в многочлене P называют членами многочлена. Аналогично для многочлена Q: ab^3; a^3b; abc – члены многочлена.

Подобными членами многочлена называют слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть (в том числе и не имеющие буквенной части). Например, $3xy^2z^3$ и $-7{,}2xy^2z^3$. Подобные члены можно заменить одним слагаемым. В данном случае слагаемым $-4{,}2xy^2z^3$. Это действие называют ***приведением подобных слагаемых***.

Многочленом стандартного вида называют многочлен, составленный из одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных. Например, $P = 7x^3 - 3x^2 + 1$; $Q = 5a^3b - 2ab^2 + 4a$.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую степень входящего в него одночлена.

Пример 1. Приведем многочлен $3a^3x + 3ax^2 + 5a^3 + 3ax^2 - 8a^3x - 10a^3$ к стандартному виду.

Имеем $3a^3x + 3ax^2 + 5a^3 + 3ax^2 - 8a^3x - 10a^3 = (5a^3 - 10a^3) + (3a^3x - 8a^3x) + (3ax^2 + 3ax^2) = -7a^3 - 5a^3x + 6ax^2$. Здесь первое и третье слагаемое являются одночленами третьей степени, а второе слагаемое – одночленом четвертой степени. Наибольшая степень равна 4, поэтому рассматриваемый многочлен четвертой степени.

Многочлен стандартного вида от одной переменной имеет вид $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где x – переменная; $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, ..., a_n – произвольные числа; n – натуральное число или 0 (число n является степенью многочлена).

Пример 2. Приведем многочлен $x^2 + 5x - 4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 13$ к стандартному виду.

Получаем $x^2 + 5x - 4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 13 = -x^3 + (x^2 - 5x^2) + (5x + 4x) + (-4 - 13) = -x^3 - 4x^2 + 9x - 17$. Это многочлен третьей степени.

Действия с многочленами

Правила раскрытия скобок.

1. Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки:

$A + (B - C) = A + B - C$.

2. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого на противоположный:

$A - (B - C) = A - B + C$.

Сумма и разность двух многочленов – это многочлен, полученный с помощью правила раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

Пример 3. Найдем сумму и разность многочленов $A = -3x^2 + 2xy - 7y^2$ и $B = 5x^2 - 3xy + 4y^2$.

$A + B = (-3x^2 + 2xy - 7y^2) + (5x^2 - 3xy + 4y^2) = -3x^2 + 2xy - 7y^2 + 5x^2 - 3xy + 4y^2 = 2x^2 - xy - 3y^2$;

$A - B = (-3x^2 + 2xy - 7y^2) - (5x^2 - 3xy + 4y^2) = -3x^2 + 2xy - 7y^2 - 5x^2 + 3xy - 4y^2 = -8x^2 + 5xy - 11y^2$.

Произведение одночлена на многочлен

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например, $(xy + x - y) \cdot 3x^2y = xy \cdot 3x^2y + x \cdot 3x^2y - y \cdot 3x^2y = 3x^3y^2 + 3x^3y - 3x^2y^2$.

Произведение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например, $(2x - y)(x^2 - 3xy - y^2) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-3xy) + 2x \cdot (-y^2) + (-y) \cdot x^2 + (-y) \cdot (-3xy) + (-y) \cdot (-y^2) = 2x^3 - 6x^2y - 2xy^2 - x^2y + 3xy^2 + y^3 = 2x^3 - 7x^2y + xy^2 + y^3$.

Тождества сокращенного умножения

1. Формула разности квадратов.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Например, $(5x^2y^5 - 7)(5x^2y^5 + 7) = (5x^2y^5)^2 - 7^2 = 25x^4y^{10} - 49$.

2. Формула квадрата суммы.

Квадрат суммы двух слагаемых равен сумме трех выражений: квадрата первого слагаемого, удвоенного произведения первого слагаемого на второе и квадрата второго слагаемого: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Например, $(8x + 3y)^2 = (8x)^2 + 2 \cdot 8x \cdot 3y + (3y)^2 = 64x^2 + 48xy + 9y^2$.

3. Формула квадрата разности.

Квадрат разности двух слагаемых равен сумме квадратов слагаемых без удвоенного произведения первого слагаемого на второе: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Например, $(10a - 7b^2)^2 = (10a)^2 - 2 \cdot 10a \cdot 7b^2 + (7b^2)^2 = 100a^2 - 140ab + 49b^4$.

4. Сумма кубов двух выражений.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и трехчлена, являющегося суммой квадрата первого выражения, квадрата второго выражения и взятого со знаком «минус» произведения первого и второго выражений: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Например, $125x^3 + 8y^6 = (5x)^3 + (2y^2)^3 = (5x + 2y^2)[(5x)^2 - 5x \cdot 2y^2 + (2y^2)^2] = (5x + 2y^2)(25x^2 - 10xy^2 + 4y^4)$.

5. Разность кубов двух выражений.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и трехчлена, являющегося суммой квадрата первого выражения, произведения первого и второго выражений и квадрата второго выражения: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Например, $27x^9 - 1000y^3 = (3x^3)^3 - (10y)^3 = (3x^3 - 10y)[(3x^3)^2 + 3x^3 \cdot 10y + (10y)^2] = (3x^3 - 10y)(9x^6 + 30x^3y + 100y^2)$.

6. Куб суммы двух слагаемых.

Куб суммы двух слагаемых равен сумме четырех выражений: куба первого слагаемого, утроенного произведения квадрата первого слагаемого на второе, утроенного произведения первого слагаемого на квадрат второго и куба второго слагаемого: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Например, $(5x^2 + xy)^3 = (5x^2)^3 + 3 \cdot (5x^2)^2 \cdot xy + 3 \cdot 5x^2 \cdot (xy)^2 + (xy)^3 = 125x^6 + 75x^5y + 15x^4y2 + x^3y^3$.

7. Куб разности двух слагаемых.

Куб разности двух слагаемых равен сумме четырех слагаемых: куба первого слагаемого; взятого со знаком «минус» утроенного произведения квадрата первого слагаемого на второе слагаемое; утроенного произведения первого слагаемого на квадрат второго слагаемого и взятого со знаком «минус» куба второго слагаемого: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Например, $(x - 2y^4)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2y^4 + 3x \cdot (2y^4)^2 - (2y^4)^3 = x^3 - 6x^2y^4 + 12xy^8 - 8y^{12}$.

Методы разложения многочленов на множители

Разложение многочленов на множители – это представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов.

1. Вынесение общего множителя за скобки.

Пример 4.

а) $5x - 5y = 5(x - y)$;

б) $3x^5 - 5x^3 = 3x^3 \cdot x^2 - 5x^3 = x^3(3x^2 - 5)$;

в) $x^4y^2 + x^3y^3 - x^2y^4 = x^2 \cdot x^2y^2 + xy \cdot x^2y^2 - x^2y^2 \cdot y^2 = x^2y^2(x^2 + xy - y^2)$;

г) $(3x - 4y)(2x - 5y) - (3y + x)(4y - 3x) = (3x - 4y)(2x - 5y) + (3x - 4y)(3y + x) = (3x - 4y)(2x - 5y + 3y + x) = (3x - 4y)(3x - 2y)$.

2. Метод группировки.

Пример 5.

а) $x^2 - xy - 8x + 8y = (x^2 - xy) + (-8x + 8y) = x(x - y) - 8(x - y) = (x - 8)(x - y)$;

б) $5a^3b + 10a^2 - 6bc - 3ab^2c = (5a^3b + 10a^2) - (6bc + 3ab^2c) = 5a^2(ab + 2) - 3bc(2 + ab) = (5a^2 - 3bc)(2 + ab)$;

в) $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a = (xy^2 - by^2) + (-ax + ab) + y^2 - a = y^2(x - b) - a(x - b) + y^2 - a = (x - b)(y^2 - a) + y^2 - a = (y^2 - a)(x - b + 1)$.

3. Применение формул сокращенного умножения.

Пример 6.

а) $100 - x^2 = 10^2 - x^2 = (10 - x)(10 + x)$;

б) $9x^6 - 4a^4b^2 = (3x^3)^2 - (2a^2b)^2 = (3x^3 - 2a^2b)(3x^3 + 2a^2b)$;

в) $16x - 9x^3 = x(16 - 9x^2) = x[4^2 - (3x)^2] = x(4 - 3x)(4 + 3x)$;

г) $25 - (a + 3)^2 = 5^2 - (a + 3)^2 = (5 + a + 3)(5 - a - 3) = (8 + a)(2 - a)$;

д) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 25z^2 = (x^2 + 6xy + 9y^2) - 25z^2 = (x + 3y)^2 - (5z)^2 = (x + 3y + 5z)(x + 3y - 5z)$.

4. Разложение на множители квадратного трехчлена.

$ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Пусть $D = b^2 - 4ac$; $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Значение D	**Результат**
$D < 0$	Нельзя разложить на произведение многочленов первой степени
$D = 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
$D > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Пример 7.

а) $2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 2)$, здесь $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$; $x_1 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{5+3}{4} = 2$;

б) $9x^2 + 12x + 4 = 9\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2$, здесь $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$; $x_0 = \dfrac{-12}{18} = -\dfrac{2}{3}$;

в) $x^2 + 2x + 3$ разложить на произведение многочленов первой степени нельзя, так как $D = 2^2 - 4 \cdot 3 = -8$.

ДРОБИ, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Дробь, зависящая от переменных, имеет вид $\dfrac{A}{B}$, где A и B – выражения с переменными. Областью допустимых значений (ОДЗ) переменной дроби называется множество всех наборов значений переменной, при которых дробь имеет смысл. Например, дробь $\dfrac{3+x}{x-5}$ имеет смысл, если знаменатель не равен 0, т. е. $x \neq 5$. Таким образом, ОДЗ данной дроби является объединение промежутков $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же не равное нулю выражение, то получится тождественно равная ей дробь.

Основное свойство дроби позволяет:

1. Сократить дробь.

Если числитель и знаменатель дроби разделить на одно и то же выражение, то получится равная ей дробь $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$. Равенство справедливо, если $bc \neq 0$.

Пример 8. Сократим дробь $\dfrac{3x^2 - 6x}{4 - 2x}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители: $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$; $4 - 2x = -2(x - 2)$. Получим $\dfrac{3x^2 - 6x}{4 - 2x} = \dfrac{3x(x-2)}{-2(x-2)} = \dfrac{3x}{-2} = -\dfrac{3x}{2}$. Равенство справедливо, если $4 - 2x \neq 0$, т. е. при $x \neq 2$.