



---

*Посвящается Элейн*





---

# Оглавление

---




<b>Предисловие .....</b>	<b>10</b>
<b>Глава 1. Историческое введение .....</b>	<b>13</b>
1.1. Евклид и аксиома параллельных .....	14
Аксиома параллельных .....	15
Эквиваленты аксиомы параллельных .....	16
1.2. Сферическая и неевклидова геометрия .....	17
Модели неевклидовой геометрии .....	20
Новые основания геометрии и математики .....	22
1.3. Векторная геометрия .....	22
Линейная геометрия Грассмана .....	23
Превращение векторного пространства в неевклидово .....	25
1.4. Аксиомы Гильберта .....	26
Алгебраическое содержание аксиом Гильберта .....	29
1.5. Полная упорядоченность и аксиома выбора .....	31
Несчетность .....	32
Полная упорядоченность .....	33
Теорема о полном упорядочении и аксиомы Цермело .....	34
Математический эквивалент аксиомы выбора .....	35
1.6. Логика и вычислимость .....	35
Арифметизация .....	37
<b>Глава 2. Классическая арифметизация .....</b>	<b>38</b>
2.1. От натуральных чисел к рациональным .....	39
Целые числа .....	39
Рациональные числа .....	40
Алгебраические свойства .....	41
2.2. От рациональных чисел к вещественным .....	41
Комплексные числа .....	43
2.3. Свойства полноты $\mathbb{R}$ .....	44
Последовательности вложенных отрезков .....	45
Критерий сходимости Коши .....	46

2.4. Функции и множества .....	47
Функции пересчета пар .....	47
Кодирование последовательностей и некоторых других функций.....	49
2.5. Непрерывные функции.....	49
Кодирование непрерывных функций рациональными интервалами .....	50
2.6. Аксиомы Пеано .....	52
Аксиомы следования .....	52
Аксиомы суммы и произведения.....	52
Индукция .....	53
Примеры доказательств по индукции .....	54
2.7. Язык PA.....	55
Упрощение связок.....	57
Предваренная форма .....	57
2.8. Арифметически определимые множества.....	57
$\Sigma_1^0$ -свойства.....	58
2.9. Пределы арифметизации .....	60
Диагональный метод Кантора .....	61
Определимость и вычислимость.....	61
<b>Глава 3. Классический анализ .....</b>	<b>63</b>
3.1. Пределы .....	63
Пределы последовательностей .....	63
Пределы функций .....	64
Предельные точки множества.....	65
3.2. Алгебраические свойства пределов .....	65
3.3. Непрерывность и промежуточные значения .....	67
Основная теорема алгебры.....	68
3.4. Теорема Больцано–Вейерштрасса.....	69
3.5. Лемма Гейне–Бореля .....	70
3.6. Теорема о достижении экстремальных значений.....	72
3.7. Равномерная непрерывность .....	73
Интегрируемость по Риману .....	75
3.8. Канторово множество .....	76
3.9. Деревья в анализе.....	77
Арифметизация деревьев.....	79
<b>Глава 4. Вычислимость .....</b>	<b>81</b>
4.1. Вычислимость и тезис Чёрча .....	82
4.2. Проблема остановки .....	84
4.3. Эффективно перечислимые множества.....	85
4.4. Вычислимые последовательности в анализе .....	88

4.5. Вычислимое дерево, не имеющее вычислимых путей .....	90
4.6. Вычислимость и неполнота .....	92
4.7. Вычислимость и анализ.....	93
Конструктивные подходы к анализу.....	94
<b>Глава 5. Арифметизация вычисления.....</b>	<b>97</b>
5.1. Формальные системы.....	98
5.2. Элементарные формальные системы Смаллиана.....	99
Примеры систем аксиом.....	100
5.3. Нотация для положительных целых чисел.....	101
Универсальные элементарные формальные системы .....	102
5.4. Анализ вычисления, предпринятый Тьюрингом .....	103
От машин Тьюринга к элементарным формальным системам.....	104
5.5. Операции над ЭФС-порожденными множествами .....	105
5.6. Порождение $\Sigma_1^0$ -множеств .....	107
5.7. ЭФС для $\Sigma_1^0$ -отношений .....	110
Булевы комбинации равенств.....	110
Ограниченные кванторы.....	111
5.8. Арифметизация элементарных формальных систем .....	112
Слова и числа.....	112
Конечные последовательности .....	113
ЭФС-порожденные множества – то же, что $\Sigma_1^0$ .....	115
5.9. Арифметизация эффективного перечисления .....	115
Арифметизация рекурсии .....	115
Эффективное перечисление.....	116
5.10. Арифметизация вычислимого анализа.....	118
Пример доказательства в $RCA_0$ .....	119
Минимальная модель $RCA_0$ .....	120
<b>Глава 6. Арифметическое выделение.....</b>	<b>121</b>
6.1. Система аксиом $ACA_0$ .....	122
Минимальная модель $ACA_0$ .....	122
6.2. $\Sigma_1^0$ -выделение и арифметическое выделение.....	123
$\Sigma_1^0$ -выделение и область значений функций .....	124
Индукция и системы более слабые, чем $ACA_0$ .....	125
6.3. Свойства полноты в $ACA_0$ .....	125
6.4. Арифметизация деревьев.....	129
6.5. Лемма Кёнига о бесконечном пути.....	130
6.6. Теория Рамсея .....	134
6.7. Некоторые результаты из математической логики .....	136


6.8. Арифметика Пеано в $ACA_0$ .....	140
Относительная непротиворечивость $ACA_0$ .....	141
<b>Глава 7. Рекурсивное выделение.....</b>	<b>143</b>
7.1. Система аксиом $RCA_0$ .....	144
7.2. Вещественные числа и непрерывные функции.....	145
7.3. Теорема о промежуточном значении.....	147
7.4. И снова о канторовом множестве.....	149
7.5. От леммы Гейне–Бореля к слабой лемме Кёнига.....	150
7.6. От слабой леммы Кёнига к лемме Гейне–Бореля.....	153
7.7. Равномерная непрерывность.....	155
7.8. От слабой леммы Кёнига к экстремальным значениям.....	157
7.9. Теоремы $WKL_0$ .....	160
Другие топологические теоремы.....	162
7.10. $WKL_0$ , $ACA_0$ и далее.....	163
«Большая пятерка» систем.....	164
Теоремы Краскала и Робертсона–Сеймура.....	165
<b>Глава 8. Более широкая картина.....</b>	<b>168</b>
8.1. Конструктивная математика.....	169
8.2. Логика предикатов.....	170
8.3. Виды неполноты.....	173
8.4. Вычислимость.....	176
Степени неразрешимости.....	176
И арифметически определимые множества.....	177
Низкие степени.....	177
8.5. Теория множеств.....	178
AB в элементарном анализе.....	179
8.6. Понятия «глубины».....	180
<b>Список литературы.....</b>	<b>182</b>
<b>Предметный указатель.....</b>	<b>189</b>



---

## Предисловие

---



Это книга об основаниях математики – теме, когда-то вызывавшей интерес таких выдающихся математиков, как Дедекиннд, Пуанкаре и Гильберт, а сегодня, как это ни грустно, обделенной вниманием. Такое невнимание достойно сожаления по нескольким причинам:

- по мере того как математика разделяется на все больше и больше дисциплин, возрастает потребность в объединяющей точке зрения;
- основания объединяют не только математику, но и такие смежные дисциплины, как информатика и физика;
- недавние достижения в математической логике позволяют по-новому взглянуть на основания анализа и на трудноуловимую концепцию математической «глубины».

Эта книга посвящена в основном последнему пункту, а точнее *обратной математике*.

Как следует из названия, в обратной математике концепция доказательства вывернута наизнанку. Вместо того чтобы выводить следствия из заданных аксиом, мы пытаемся найти аксиомы, необходимые для доказательства заданных теорем. На самом деле это старая идея, по крайней мере в том, что касается оснований геометрии.

Со времен Евклида и вплоть до XIX столетия математикам не давал покоя вопрос, нужна ли аксиома параллельных для доказательства теорем, например теоремы Пифагора. В главе 1 как пример идей обратной математики приводится исторический обзор аксиомы параллельных, а также похожий рассказ об аксиоме выбора в теории множеств.

Хотя обе эти аксиомы иллюстрируют идею обратной математики, в своем современном понимании этот предмет находится в узкой, но важной области, пограничной *между* геометрией и теорией множеств: теории вещественных чисел, которая лежит в основании математического анализа и большей части математической физики. (С обратной математикой связаны

также интересные вклады в алгебру, комбинаторику и топологию, но о них мы упомянем более кратко.)

Вещественные числа в том понимании, какое сложилось на сегодняшний день, возникли как результат предпринятых в XIX веке усилий по *арифметизации* анализа и геометрии. Благодаря построению вещественных чисел из множеств рациональных чисел (а значит, в конечном итоге из множеств натуральных чисел) становится возможно представить последовательности вещественных чисел и произвольные непрерывные функции – а стало быть, большинство объектов анализа – множествами натуральных чисел. Мы приведем обзор арифметизации анализа и его основных теорем в главах 2 и 3. А затем будем готовы задаться вопросом: какие *аксиомы* необходимы для доказательства этих основных теорем? В общих чертах ответ таковой: система аксиом натуральных чисел (*аксиомы Пеано*) плюс подходящая *аксиома существования множества*.

*Сила* аксиом существования множеств варьируется в зависимости от того, насколько сильные теоремы мы ходим доказывать. Оказывается, что аксиома наименьшей силы тесно связана с основаниями *вычислений*: она утверждает существование вычислимых множеств. Это, в свою очередь, ведет к изучению концепции вычисления, которое сливается с анализом, т. к. у обоих предметов общие арифметические основания. После неформального введения в теорию вычислимости в главе 4 мы разработаем формальную концепцию вычисления и ее арифметизацию в главе 5.

В главах 6 и 7 идеи анализа, арифметики и вычислений будут сведены в системы аксиом для анализа:  $RCA_0$ ,  $WKL_0$  и  $ACA_0$ . Эти системы аксиом, которые различаются в основном аксиомами существования множеств различной силы, позволяют доказать большинство теорем анализа. Но самое главное, что они относят основные теоремы к трем уровням, поскольку выше «базового» уровня  $RCA_0$  большая часть теорем *эквивалентна* аксиоме существования множества из системы, которая их доказывает. Это делает любую из этих аксиом существования множеств «правильной аксиомой» в смысле Фридмана (1975):

*Когда теорема доказана, исходя из правильных аксиом, аксиомы можно доказать, исходя из теоремы.*

Мы увидим, в частности, что система  $RCA_0$  позволяет доказать теорему о промежуточном значении; определяющая аксиома системы  $WKL_0$  является правильной для доказательства леммы Гейне–Бореля и теоремы о достижении экстремальных значений, а определяющая аксиома системы  $ACA_0$  – правильная для доказательства критерия сходимости Коши и теоремы Больцано–Вейерштрасса.

Таким образом, в обратной математике мы встречаемся с персонажами, знакомыми по начальному курсу анализа, но в совершенно другом антураже.

В главе 8 мы очертим более полную картину анализа, теории вычислимости и логики, что, как мы надеемся, подготовит читателя к ознакомлению с предназначенными для специалистов изложениями обратной математики и в первую очередь работы Simpson (2009). А эта книга рассчитана в основном на неспециалистов и в некоторых отношениях является продолжением моей книги «*Elements of Mathematics. From Euclid to Gödel*». Здесь теория вычислимости и математическая логика изложены настолько полно, чтобы объяснить результаты, которые в «*Elements of Mathematics*» я смог лишь упомянуть, однако знакомство с предыдущей книгой не является предварительным условием для чтения этой. Любой студент старших курсов, интересующийся основаниями, сможет получить из этой книги первоначальное представление об обратной математике. Разумеется, это относится и к профессиональным математикам, желающим освежить в памяти сведения об основаниях и узнать, как этот предмет трансформировался за последние годы.

Настало время для благодарностей. Я признателен Харви Фридману (Harvey Friedman) за информацию об истории обратной математики, Кейта Йокояме (Keita Yokoyama) за просвещение меня в области топологии и двум анонимным рецензентам за многочисленные полезные замечания и исправления. Как обычно, моя супруга Элейн безупречно справилась с корректурой, а Вики Керн (Vickie Kearn) и ее группа в издательстве Princeton University Press скрупулезно подошли к процессу производства книги.

*Джон Стилуэлл*

*Сан-Франциско, 24 ноября 2016*





---

# ГЛАВА 1

## *Историческое введение*



Цель этой вступительной главы – подготовить читателя к восприятию *обратной математики*. Как следует из названия, цель обратной математики – не вывод теорем, а поиск подходящих аксиом для доказательства уже известных теорем. Критерий «правильности» аксиомы был сформулирован в работе Friedman (1975) следующим образом:

*Когда теорема доказана, исходя из правильных аксиом, аксиомы можно доказать, исходя из теоремы.*

Обратная математика возникла как технический раздел математической логики, но ее основные идеи имеют прецеденты в античной геометрии и теории множеств начала XX века.

В геометрии аксиома параллельных является правильной для доказательства многих теорем евклидовой геометрии, например теоремы Пифагора. Чтобы понять, почему, мы должны отделить аксиому параллельных от базовой теории, построенной на основе других аксиом Евклида, и показать, что аксиома параллельных не является теоремой базовой теории. Этого не удавалось сделать вплоть до 1868 года. Легче показать, что из базовой теории вытекает *эквивалентность* аксиомы параллельных многим другим теоремам, в частности теореме Пифагора. Это отличительный признак хорошей базовой теории: она не может доказать нечто непосредственно, но может доказать, что это «нечто» эквивалентно «правильным аксиомам».

Теория множеств дает более близкий нам пример: базовую теорию, именуемую ZF, теорему, не доказуемую в ZF (теорему Цермело о полной упорядоченности), и «правильную аксиому» для ее доказательства – аксиому выбора.

На основании этих и подобных примеров мы можем сделать предположение о базовой теории для анализа и «правильных аксиомах» для доказательства некоторых хорошо известных теорем в этой области.

## 1.1. Евклид и аксиома параллельных

Поиск «правильных аксиом» для математики начал примерно в 300 году до н. э. Евклид, предложивший аксиомы для того, что мы теперь называем *евклидовой геометрией*. Сейчас известно, что аксиомы Евклида неполны; тем не менее они очерчивают полную систему и разделяются на действительно очевидные «основные» аксиомы и одну менее очевидную, но принципиально важную для получения большинства интересных теорем. Исторический комментарий к этим аксиомам см. в работе Heath (1956).

Основные аксиомы говорят, например, что через любые две точки можно провести единственную прямую и что прямые линии не ограничены по длине. Основными являются также признаки *конгруэнтности треугольников*, пусть и нечетко сформулированные Евклидом, например по двум сторонам и углу между ними: если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то все стороны и углы треугольников соответственно равны. (Другой признак: по стороне и двум прилежащим к ней углам.)

С помощью основных аксиом можно доказать много теорем, не поражающих воображение. Например, *теорему о равнобедренном треугольнике*: если в треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  равна стороне  $AC$ , то противолежащие им углы  $C$  и  $B$  равны. Но с помощью одних лишь основных аксиом нельзя доказать знаковую теорему евклидовой геометрии – *теорему Пифагора*, показанную на рис. 1.1.

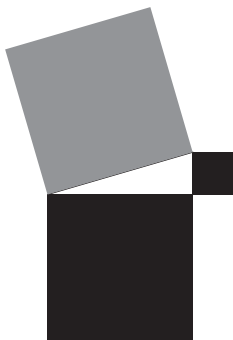


Рис. 1.1. Теорема Пифагора

Как всем известно, эта теорема утверждает, что площадь серого квадрата равна сумме площадей двух черных квадратов, но из основных аксиом нельзя вывести даже *существование* квадратов. Евклид понял, что для доказательства теоремы Пифагора необходима аксиома, касающаяся бесконечности: *аксиома параллельных* (прямых).

## Аксиома параллельных

Я называю аксиому параллельных аксиомой, касающейся бесконечности, потому что в ней идет речь о прямых, которые не пересекаются, как бы далеко их ни продолжать. Таким образом, параллельность невозможно «увидеть», если только мы не обладаем способностью заглядывать в бесконечность, а Евклид предпочел не вводить предположение о наличии такой сверхчеловеческой способности. Вместо этого он предложил критерий непараллельности прямых, поскольку, чтобы «увидеть» пересечение прямых, достаточно конечного расстояния.

**Аксиома параллельных.** Если прямая  $n$ , пересекающая прямые  $l$  и  $t$  (рис. 1.2), составляет с ними углы  $\alpha$  и  $\beta$  в сумме меньше двух прямых углов, то  $l$  и  $t$  пересекаются с той стороны, где находятся углы  $\alpha$  и  $\beta$ .

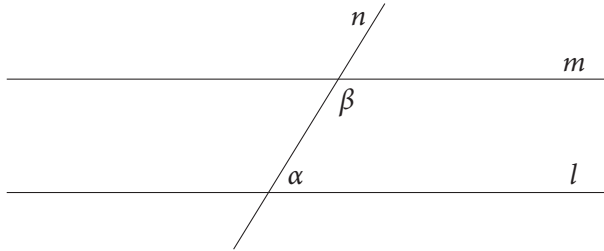


Рис. 1.2. Углы, участвующие в аксиоме параллельных

Отсюда следует, что если  $\alpha + \beta$  равно двум прямым углам (т. е. развернутому углу), то  $l$  и  $t$  не пересекаются. Поскольку если бы они пересекались с одной стороны (и образовывали треугольник), то должны были бы пересекаться и с другой стороны и образовывать конгруэнтный треугольник, в силу признака равенства по стороне и двум прилежащим к ней углам, т. к. углы  $\alpha$  и  $\beta$  с обеих сторон одинаковые, а сторона между ними общая (рис. 1.3). Это противоречит тому, что через любые две точки можно провести только одну прямую.

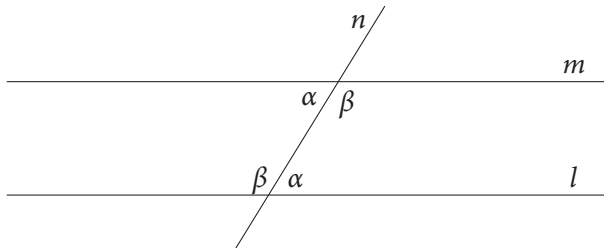


Рис. 1.3. Параллельные прямые

Таким образом, из аксиомы Евклида о непараллельных прямых вытекает существование параллельных прямых. Отсюда мы легко получаем теорему о том, что сумма углов треугольника равна развернутому углу (или  $\pi$ , как мы будем писать, начиная с этого момента) – в силу построения, показанного на рис. 1.4. А отсюда, в свою очередь, следует, что в равнобедренном треугольнике с углом  $\pi/2$  между равными сторонами два других угла равны  $\pi/4$ , поэтому если составить два таких треугольника вместе, то получится квадрат.

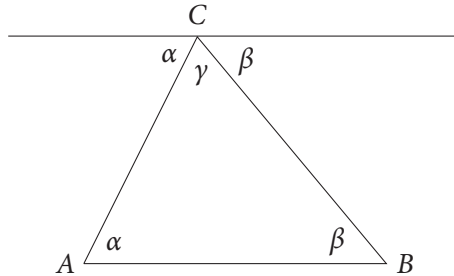


Рис. 1.4. Сумма углов треугольника

Теперь можно приступить к доказательству теоремы Пифагора, и провести его можно многими способами. Один из самых наглядных показан на рис. 1.5, где серый квадрат и два черных квадрата занимают часть большого квадрата за вычетом четырех одинаковых прямоугольных треугольников.

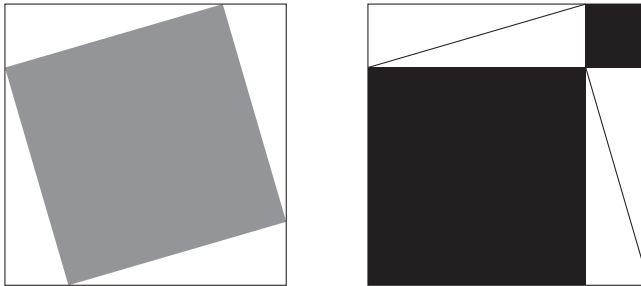


Рис. 1.5. Наглядное доказательство теоремы Пифагора

### Эквиваленты аксиомы параллельных

Многие математики считали аксиому параллельных «пятном» системы Евклида – именно так назвал ее Саккери в работе Saccheri (1733) – и пытались доказать, что она вытекает из остальных аксиом. Обычно их попытки оборачивались выводом аксиомы параллельных из кажущегося очевидным утверждения в надежде свести задачу к более простой. Вот некоторые утверждения, из которых следует аксиома параллельных:

- существование прямоугольников (аль-Хайсам, ад-Дин Туси в Средние века);
- существование подобных треугольников разного размера (Валлис в 1693 году);
- сумма углов треугольника =  $\pi$  (в «Элементах геометрии» Лежандра, 1823 год);
- через любые три неколлинеарные точки можно провести окружность (Фаркаш Бойяи, 1832 год).

Все эти теоремы вытекают из аксиомы параллельных, поэтому эквивалентны ей по *силе* в том смысле, что их эквивалентность аксиоме параллельных можно доказать, опираясь только на остальные аксиомы. Разумеется, это понятие эквивалентной силы тривиально, если сама аксиома параллельных выводима из других аксиом, но к 1830 году надежды на это стали угасать. Сын Фаркаша Бойяи, Янош, был одним из основных исследователей гипотетической неевклидовой геометрии, в которой аксиома параллельных (а значит, и все четыре приведенные выше теоремы) *не имеет места*, хотя остальные аксиомы Евклида верны.

Но прежде чем переходить к неевклидовой геометрии, имеет смысл познакомиться с геометрией на сфере. Очевидно, что сферическая геометрия сильно отличается от евклидовой геометрии на плоскости – отсутствием не только параллельных линий, но и бесконечных линий. И тем не менее они разделяют общие понятия: «точка», «прямая», «угол». Знакомство с двумя разными интерпретациями этих слов облегчит восприятие еще одной интерпретации, или *модели* – модели неевклидовой геометрии.

## 1.2. Сферическая и неевклидова геометрия

Как окружности и прямые на плоскости являются составными частями двумерной евклидовой геометрии, так сферы и плоскости – части *трехмерной* евклидовой геометрии. На самом деле они даже упоминаются, хотя и не подвергаются глубокому исследованию, в книге XI «Начал» Евклида. Древние греки всерьез изучали сферическую геометрию, а особенно сферическую тригонометрию, в рамках астрономии, поскольку с Земли кажется, что звезды расположены на поверхности небесной сферы. Позже интерес к сферической геометрии подпитывался задачами навигации. Для навигаторов естественным аналогом «прямой» является большая окружность – пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр, – поскольку именно по большой окружности проходит кратчайший путь между двумя точками на сфере. Понятие «угла» между такими «прямыми» также имеет смысл и

определяется как угол между соответствующими плоскостями (или, что то же самое, угол между касательными к большим окружностям).

Действительно, часто сферический треугольник проще описать величинами углов, а не длинами сторон. Все сферические треугольники с одинаковыми углами имеют в точности одинаковые размеры – в силу знаменитой теоремы Хэрриота<sup>1</sup>, доказанной в 1603 году: *сумма углов сферического треугольника минус  $\pi$  пропорциональна его площади*. Существует несколько способов замостить поверхность сферы конгруэнтными треугольниками. На рис. 1.6 показан один такой способ, когда сфера разбита на 48 треугольников с углами  $\pi/2$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/4$ . Чередующиеся треугольники приподняты над поверхностью сферы, чтобы их легче было различить, и сфера подсвечена изнутри. Это и есть стандартная модель сферической геометрии: «точками» являются обычные точки на сфере, «прямыми» – большие окружности, «углами» – углы между касательными к большим окружностям в точке их пересечения. «Расстоянием», если мы захотим использовать это понятие, будет расстояние между точками на сфере, измеренное по более короткой дуге соединяющей их большой окружности.



Рис. 1.6. Замощение сферы треугольниками

Теперь обратимся к другой модели, *спроецировав сферу на плоскость*. Точнее, поместим источник света внутри сферы (в ее северном полюсе), так чтобы он отбрасывал тень на плоскость. Результат показан на рис. 1.7, где

<sup>1</sup> Томас Хэрриот был советником сэра Уолтера Рэйли по математике и принимал участие в некоторых его путешествиях.

хорошо видно два замечательных свойства проекции из северного полюса, которая называется *стереографической проекцией*:

- окружности отображаются в окружности (или в исключительных случаях в прямые, которые можно назвать «окружностями бесконечного радиуса»);
- углы сохраняются.



**Рис. 1.7.** Проекция сферы на плоскость

Таким образом, «точки» по-прежнему являются точками, «прямые» – окружностями, а «угол» – углом между касательными к окружности. Увы, «расстояние» не переходит в евклидово расстояние, потому что равные отрезки на сфере могут отображаться в отрезки разной длины на плоскости. Аналогично «площадь» не является евклидовой площадью, но мы легко можем измерить ее суммой углов минус  $\pi$ .

Строго говоря, мы спроецировали на плоскость не всю сферу, а сферу с выколотой точкой – северным полюсом, в котором расположен источник света. Чтобы исправить ситуацию, мы можем пополнить плоскость *бесконечно удаленной точкой* – той, в которой стремятся тени точек на сфере по мере их приближения к северному полюсу. Бесконечно удаленная точка дополняет каждую прямую до замкнутой кривой, так что все они становятся окружностями. Таким образом, в нашей второй интерпретации сферической геометрии «прямые» моделируются окружностями, а «углы» – углами

между окружностями. В следующем подразделе мы увидим похожую модель неевклидовой геометрии.

### Модели неевклидовой геометрии

Бельтрами (1868) открыл несколько моделей неевклидовой геометрии, в которых справедливы основные аксиомы Евклида плюс неевклидова аксиома параллельных, утверждающая, что *для любой прямой  $l$  и не принадлежащей ей точки  $P$  существует более одной прямой  $m$ , которая не пересекается с  $l$* . Простейшая из моделей Бельтрами показана на рис. 1.8.

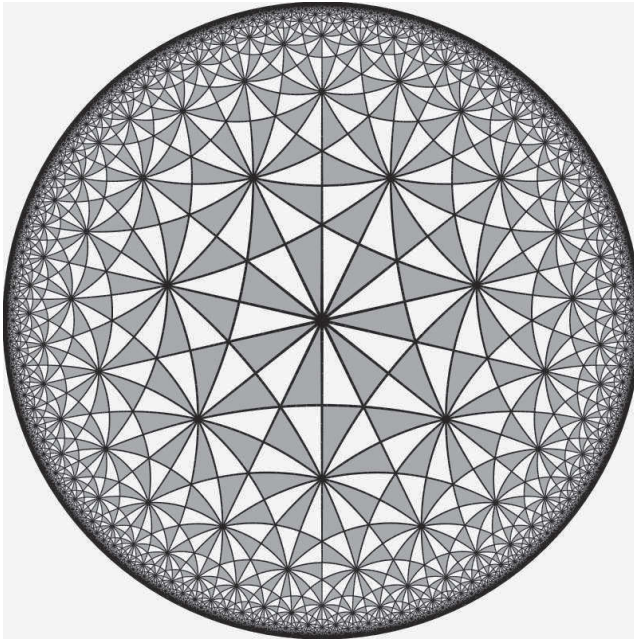
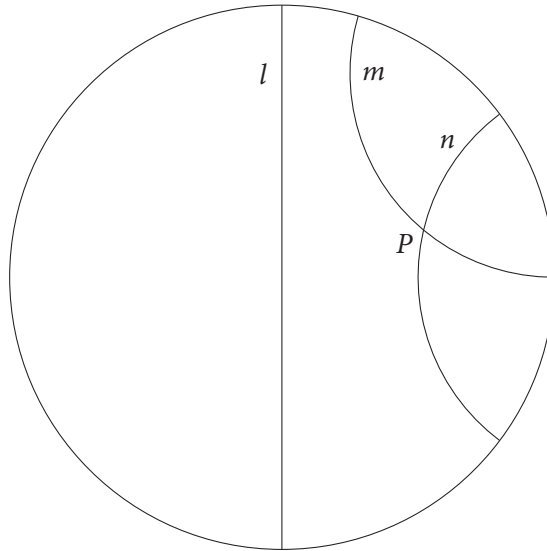


Рис. 1.8. Конформная модель на диске

В этой модели «точками» являются внутренние точки диска, «прямыми» – дуги окружностей, перпендикулярные граничной окружности диска (включая и отрезки прямых, проходящих через центр диска, которые рассматриваются как окружности бесконечного радиуса), а «углами» – углы между окружностями. Как и в сферической геометрии, треугольники конгруэнтны, если имеют одинаковые углы, так что на этом рисунке диск заполнен бесконечным множеством конгруэнтных треугольников, каждый из которых имеет углы  $\pi/2$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/7$ . Это самые мелкие из треугольников, которыми можно замостить неевклидову плоскость, и, как и в сферической геометрии, их площадь определяется суммой углов: *величина  $\pi$  минус сумма углов неевклидова треугольника пропорциональна его площади*.



Как и в случае плоской модели сферической геометрии, точно определить «расстояние» сложно. Но тут оно лучше ощущается, потому что имеется много треугольников одинакового неевклидова размера. Например, видно, что вдоль каждой «прямой» расположено бесконечно много треугольников, поэтому «длина» каждой «прямой» бесконечна. Можно даже принять, что каждая «прямая» дает наименьшее расстояние между любыми двумя точками диска, поскольку количество треугольников вдоль дуги окружности, перпендикулярной границе, меньше, чем вдоль любого другого маршрута. Таким образом, понятно, почему эта модель удовлетворяет основным аксиомам Евклида. Но аксиоме параллельных она, очевидно, *не* удовлетворяет. Если взять вертикальную «прямую»  $l$ , проходящую через центр диска, и точку  $P$ , расположенную, скажем, справа от нее, то существуют различные «прямые»  $m$  и  $n$ , проходящие через точку  $P$  и не пересекающие  $l$ , как видно по рис. 1.9.



**Рис. 1.9.** Аксиома параллельных не удовлетворяется

Итак, проверив детали построения Бельтрами, мы получаем модель, в которой основные аксиомы Евклида выполняются, а аксиома параллельных – нет. Поэтому аксиома параллельных не вытекает из остальных аксиом Евклида, и, значит, то же можно сказать про эквивалентные ей теоремы (в частности, упомянутые в предыдущем разделе). Однако эквивалентность аксиомы параллельных и этих теорем выводима из других аксиом Евклида. Такая ситуация типична для обратной математики: имеется базовая теория, слишком слабая для доказательства определенных теорем, но достаточно сильная для доказательства их эквивалентности.

## Новые основания геометрии и математики

Открытие неевклидовой геометрии стало потрясением для оснований математики, которая до XIX века неявно покоилась на евклидовых понятиях «прямой» и «плоскости». Посеяв сомнения в смысле слов «прямая» и «плоскость», неевклидова геометрия подсказала искать новые основания в *арифметике*, поскольку фундаментальные свойства чисел под сомнения не ставились.

В частности, «прямая» была переосмыслена как система  $\mathbb{R}$  вещественных чисел, обладающая алгебраическими и геометрическими свойствами. В следующих нескольких разделах описывается возникновение геометрии, основанной на понятии вещественного числа либо испытывавшей сильное влияние этого понятия. В главе 2 мы увидим, что вещественные числа легли также в основание анализа.

### 1.3. Векторная геометрия

Первый крупный шаг вперед в геометрии со времен греков был сделан Ферма и Декартом в 1620-х годах и опубликован в «Геометрии» Декарта (1637). Новшество заключалось в использовании алгебры для описания прямых и кривых уравнениями, что свело многие геометрические задачи к рутинным вычислениям. Но прежде чем они смогли «алгебраизировать» геометрию, ее нужно было *арифметизировать* – и уже этот шаг далеко продвинул их по сравнению с Евклидом. На самом деле это был первый шаг в направлении широкой арифметизации геометрии элементарных формальных систем и анализа, произошедшей в XIX веке.

Как теперь известно каждому студенту, арифметизация евклидовой плоскости была достигнута путем сопоставления вещественных *координат*  $x$  и  $y$  каждой точке  $P$  на плоскости. Числа  $x$  и  $y$  визуализируются как расстояния от  $P$  до начала координат  $O$  по горизонтали и по вертикали, так что расстояние  $|OP|$  между  $P$  и  $O$ , по теореме Пифагора, равно  $\sqrt{x^2 + y^2}$  (рис. 1.10). Но  $P$  можно *определить* как упорядоченную пару<sup>2</sup>  $\langle x, y \rangle$ , а расстояние от нее до  $O$  определить как  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Вообще, расстояние между точками  $P_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$  и  $P_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$  определяется как

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Точки  $\langle x, y \rangle$  лежат на *прямой линии*, если они удовлетворяют уравнению вида  $ax + by + c = 0$  (потому-то такое уравнение и называется *линейным*), а уравнение окружности квадратичное и выражает условие постоянства рас-

<sup>2</sup> В этой книге я использую нотацию  $\langle a, b \rangle$  для обозначения упорядоченной пары чисел  $a$  и  $b$ , поскольку  $(a, b)$  означает открытый интервал между  $a$  и  $b$ .

стояния до некоторой точки. Например, точки, отстоящие от начала координат  $O$  на расстояние 1, удовлетворяют уравнению  $x^2 + y^2 = 1$ .

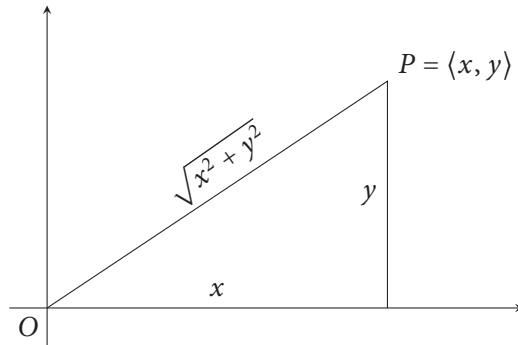


Рис. 1.10. Система координат на плоскости

Таким образом, мы получаем возможность перевести на язык алгебры всю евклидову геометрию – и не только, поскольку, если не считать алгебраических трудностей, ничто не препятствует изучению кривых, удовлетворяющих произвольным полиномиальным уравнениям. Следовательно, евклидова геометрия и алгебраическая геометрия – не совсем синонимы. Евклидова геометрия «более линейна».

### Линейная геометрия Грассмана

Точное алгебраическое соответствие евклидовой геометрии было в 1840-х годах найдено Грассманом, который ввел понятие *вещественного векторного пространства*. Его первые работы на эту тему, Grassmann (1844) и Grassmann (1847), оказались недоступны другим математикам, а его идеи стали получать распространение только после того, как Пеано в работе Пеано (1888) предложил аксиомы вещественного векторного пространства.

**Определение.** *Вещественным векторным пространством называется множество  $V$  объектов, называемых векторами (обозначаются полужирным шрифтом), которое включает нулевой вектор  $\mathbf{0}$  и для каждого  $\mathbf{u} \in V$  также вектор  $-\mathbf{u}$ , называемый противоположным  $\mathbf{u}$ .  $V$  наделено операциями сложения и умножения на скаляр ( $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ ), которые удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u}; \\ \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}; \\ \mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{u}; \\ \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= \mathbf{0};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\mathbf{u} &= \mathbf{u}; \\ a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= a\mathbf{u} + a\mathbf{v}; \\ (a + b)\mathbf{u} &= a\mathbf{u} + b\mathbf{u}; \\ a(b\mathbf{u}) &= (ab)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Обычно  $V = \mathbb{R}^n = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle : x_1, \dots, x_n\}$ , при этом  $\mathbf{0}$  – начало координат, операция  $+$  – обычная сумма кортежей длины  $n$ , а умножение на скаляр  $a \in \mathbb{R}$  определяется как

$$a\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle ax_1, \dots, ax_n \rangle.$$

Это векторное пространство называется *вещественным  $n$ -мерным аффинным пространством*. Оно еще не является евклидовым, потому что не определены понятия расстояния и угла, но уже обладает значительным геометрическим наполнением. В  $\mathbb{R}^n$  имеются прямые, в т. ч. параллельные, а также понятие «длины в данном направлении». Например, можно сказать, что  $\frac{1}{2}\mathbf{v} \in \mathbb{R}$  – *средняя точка* отрезка от  $\mathbf{0}$  до  $\mathbf{v}$ , а в общем случае  $a\mathbf{v}$  отстоит от  $\mathbf{0}$  в  $a$  раз дальше, чем  $\mathbf{v}$ . В векторной геометрии имеет смысл также понятие *центра масс*. В частности, центром масс треугольника с вершинами  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  является точка  $\frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$ .

Чтобы дополнить векторную геометрию до евклидовой, необходимо ввести понятие *скалярного произведения* векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , которое обозначается  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ :

**Определение.** Если  $\mathbf{u} = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$  и  $\mathbf{v} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  то

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

В частности, в  $\mathbb{R}^2$  имеем

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2,$$

поэтому евклидова длина  $|\mathbf{u}|$  вектора  $\mathbf{u}$  равна  $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ . Грассман в работе Grassmann (1847) заметил, что при таком определении скалярного произведения теорема Пифагора верна чуть ли не по определению.

Понятие евклидова угла также вытекает из скалярного произведения, поскольку

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta,$$

где  $\theta$  – угол между прямыми, соединяющими  $\mathbf{0}$  соответственно с  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Таким образом, в работе Grassmann (1847) найден еще один способ описать ев-

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)