Оглавление

Введение

Дисциплина «Математическая логика и теория алгоритмов» закладывает прочный фундамент для изучения практически всех специализированных курсов, преподаваемых в технических вузах и университетах для направлений подготовки, связанных с изучением компьютеров, информационных технологий и коммуникационных сетей.

Непосредственная цель дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» — дать основы теории математического обеспечения для современных компьютерных и информационных технологий.

Логика необходима в любой формальной дисциплине и состоит из правил получения обоснования вывода (заключения). Логику можно выделить из контекста тех дисциплин, в которых она используется, и изучать как отдельный раздел науки. Приложения изучаемых методов в информатике, например, логические методы доказательств используются при проверке корректности алгоритмов.

Логика лежит в основе неоспоримых рассуждений и доказательств. В том виде, в котором будем рассматривать математическую логику, она имеет два аспекта.

С одной стороны, — это логика — аналитическая теория искусства рассуждения, целью которой является систематизация и кодификация принципов правильного рассуждения. Она возникла из изучения использования языка в споре для убеждения слушателя и основывается на выделении и исследовании тех сторон языка, которые существенны для этих целей. Она формальна в том смысле, что не делает ссылок на значение. Посредством этого она достигает многосторонности: она может быть использована для суждения о корректности цепи рассуждений (в частности, «математического доказательства») исключительно на основании формы (а не содержания), последовательности утверждений, образующих эту цепь. Существует много символических логик. В рамках дисциплины рассматривается лишь логика, охватывающая большинство выводов того рода, какие встречаются в математике. В пределах самой логики — это «классическая» символическая логика.

Другой аспект символической логики переплетается с проблемами, связанными с основаниями математики. Вкратце, он состоит в формулировании математической теории как логической системы, расширенной дополнительными аксиомами. Идея рассмотрения математической теории как «прикладной» системы логики принадлежит немецкому математику Г. Фреге (1848–1925 гг.), который разработал систему логики для применения в своем труде об основаниях арифметики. Уайтхед и Рассел в Principia mathematica (1910–1913 гг.) продолжили работу Фреге и показали, что математика может быть «сведена к логике».

Так, немецкий математик Г. Фреге (1846–1926 гг.) и итальянский математик Д. Пеано (1858–1932 гг.) применили математическую логику для обоснования арифметики и теории множеств.

В рамках данного раздела дисциплины предполагается изучить:

1. Логику высказываний: принцип дедукции, метод резолюций, аксиоматические системы.
2. Логику предикатов.

История возникновения логики как науки

Для получения информации о каком-либо предмете используют два пути:

1. Изучение того, что уже сделано, то есть обращение к справочникам и энциклопедиям.
2. Самостоятельный поиск решения, наблюдения, эксперименты и как результат — умозаключение, то есть новое знание, полученное на основе известного.

Именно вторым путем получена вся собранная до нас информация. Второй путь познания является логической категорией. Именно этим путем шли древние философы 2300 лет назад, пытаясь понять законы мышления.

Логика — древняя наука (от греческого слова «логос» — мысль). Древние философы стремились понять, по каким законам мыслит человек, какими путями можно прийти к истине в рассуждении о событиях и явлениях окружающего мира. Задачей логики является изучение правильных способов рассуждения, которые приводят к верным результатам в тех случаях, когда верны исходные посылки. Предметом логики является изучение законов человеческого мышления.

По дошедшим рукописям Аристотеля считают основателем логики, как науки. В логике Аристотеля сформулированы логические категории «понятие», «суждение», «умозаключение», законы логики, метод дедукции, понятие гипотезы. Логика Аристотеля — это классическая формальная логика, которая просуществовала без серьезных изменений более двадцати столетий и в своем развитии привела к математической логике.

Словесная форма рассуждений стала тормозить развитие логики. В логике появились математические методы исследования. Логика обретает символьный язык, конкретность законов и выходит за рамки гуманитарных наук. Но формальная логика не утратила своего значения со временем и используется в гуманитарных науках: криминалистика, юриспруденция, философия, психология.

Математика является наукой, в которой все утверждения доказываются с помощью умозаключений, т. е. путем использования законов человеческого мышления. Математика является основным потребителем логики. Развитие математики выявило недостаточность Аристотелевой логики и поставило задачу о ее дальнейшем построении на математической основе. Появление математической логики связано с именем математика Г. Лейбница (1646–1716 гг.). Он считал, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по определенным правилам, и это позволяет всякие рассуждения заменить вычислением.

Общим между формальной и математической логикой являются законы и категории логики. В формальной логике они имеют абстрактную форму, а в математической они более конкретны, обладают строгой определенностью и реализуются на практике конкретными техническими средствами.

Первая реализация идеи Лейбница принадлежит английскому математику Дж. Булю (1815–1864 гг.). Буль создал алгебру, в которой буквами обозначены высказывания, и это привело к алгебре высказываний. Сочинение Дж. Буля, в котором подробно исследовалась эта алгебра, было опубликовано в 1854 г., т. е. 150 лет назад. Оно называлось «Исследование законов мысли» (Investigation of the Laws of Thought). Отсюда ясно, что Дж. Буль рассматривал свою алгебру как инструмент изучения законов человеческого мышления, т. е. законов логики.

Основное назначение математической логики определилось в конце XIX в., когда стала ясна необходимость обоснования понятий и идей самой математики. Главная роль математической логики состоит в изучении основания математики, принципов построения математических теорий.

Математическая логика — это наука о средствах и методах математических доказательств.

Родоначальником науки о логике является греческий философ Аристотель (384–322 г. до н. э.). Он, используя законы человеческого мышления, формализовал известные до него правила рассуждений. Лишь в конце XVII в. немецкий математик Г. Лейбниц предложил математизировать формальные рассуждения Аристотеля, вводя символьное обозначение для основных понятий и используя особые правила, близкие к вычислениям. Лейбниц утверждал, что «мы употребляем знаки не только для того, чтобы передать наши мысли другим лицам, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления».

Применение математики в логике определило новую науку — математическую логику. Математическое описание рассуждений позволило получить точные утверждения и эффективные процедуры в решении конкретных задач логики. Рассуждения в математической логике изучаются с точки зрения формы описания процесса, явления или события и формального преобразования этого описания. Такой процесс называют выводом заключения. Иногда математическое описание рассуждений называют логико-математическим моделированием.

Основными объектами при изучении математической логики являются формальный язык логики и правила вывода. Формальный язык необходим для символьного описания процессов, явлений или событий и логических связей между ними. Правила вывода необходимы для формирования процедуры рассуждения. Для обеспечения вывода вводится система аксиом, формализующая весь механизм вывода заключения.

Математическое описание логики следует воспринимать, как некую формальную систему, оперирующую с символами по определенным правилам, облегчающим интерпретацию в реальном мире.

Выделяют несколько типов математических моделей формальной логики. Среди них можно выделить Логику высказываний, Логику предикатов, Логику нечетких множеств и отношений, Реляционную логику и др.

Логика высказываний (*prepositional calculus*) есть модель формальной системы, предметом которой являются высказывания или повествовательные предложения, взятые целиком без учета их внутренней структуры.

Логика предикатов (*predicate calculus*) есть модель формальной системы, предметом которой являются повествовательные предложения с учетом их внутренних состава и структуры.

Логика нечетких множеств и отношений (*fuzzy calculus*) есть модель формальной системы, предметом которой являются повествовательные предложения с учетом их внутренних состава и структуры и при нечетком (размытом) задании характерных признаков отдельных элементов или отношений между ними.

Логика реляционная (*relation calculus*) есть модель формальной системы, предметом которой являются отношения в виде множества однородных повествовательных предложений, существенно расширяющие логику предикатов.

1. Исчисление высказываний

1.1. Введение в исчисление высказываний и основные понятия

Исчислением или формальной теорией принято называть совокупность понятий и правил, которая позволяет решать определенный класс задач.

Исчисление высказываний составляет основу математической логики, определяет способы получения правильных (верных) умозаключений из заданных высказываний. В основу исчисления высказываний положено требование, чтобы его собственные построения, формулируемые в общем виде, были истинными вне зависимости от заданных высказываний.

Высказывание — это предложение естественного или формализованного, например, математического языка, для которого есть смысл говорить о его истинности и ложности.

Умозаключение — это форма мышления, в которой от одного или нескольких высказываний осуществляется переход к новому высказыванию.

Этим высказывания отличаются от повелительных или вопросительных предложений естественного языка, то есть высказывание имеет форму утвердительного предложения. Высказывания, из которых выводится новое высказывание, называют посылками, начальными данными или исходными условиями. Выведенное из посылок высказывание называют заключением или выводом.

Логический вывод — это переход от посылок к заключению. По количеству посылок умозаключения делятся на непосредственные, когда одна посылка, силлогизмы — две посылки и индуктивные — больше двух посылок.

По характеру вывода умозаключения делятся на необходимые и вероятностные. Необходимыми называют умозаключения, в которых из истинных посылок нельзя сделать ложное заключение. Вероятностное умозаключение при истинности посылок и соблюдении соответствующих правил заключения может быть, как истинным, так и ложным.

Если из посылок A, B, C и D следует умозаключение F, то оно записывается: $A, B, C, D \mid = F$.

Умозаключение называется неправильным, если из истинности посылок получено ложное заключение.

Умозаключение называется правильным, если из истинных посылок оно не приводит к ложному заключению.

Теорема: для того, чтобы умозаключение A, B, C, $D \mid = F$ было правильным, необходимо и достаточно, чтобы импликация $ABCD \to F$ было тождественно истинным высказыванием (тавтологией).

Получение истинных высказываний при ложных посылках, вообще говоря, возможно.

Пример: «x» — ложно;

«не x» — истинно.

Исчисление высказываний интересуют именно такие тождественно истинные высказывания. Они и позволяют находить верные заключения при любой истинности посылок.

Из высказываний путем соединений их различными способами можно составлять новые более сложные высказывания. Мы будем рассматривать только истинностно-функциональные комбинации, в которых истинность или ложность определяется истинностью или ложностью составляющих высказываний.

Логику также называют наукой о способах доказательств, но существует различие в построении доказательств в логике высказываний и в логике (алгебре) Буля.

В Булевой логике все доказательства строились на отношении эквивалентности. Даже, если во множественных выражениях и фигурировало отношение включения, что является частным случаем отношения порядка, то его мы переводили в тождество. Две логические функции считаются эквивалентными, если они давали на соответствующих наборах аргументов абсолютно одинаковые значения нулей и единиц.

При использовании формальной записи логических выражений отдельные звенья цепи доказательств там были связанны через символ «=». Отношению эквивалентности удовлетворяют три закона:

Рефлексивность $A = A$.

Симметричность (если $A = B$, то $B = A$).

Транзитивность (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$).

В логике высказываний все доказательства строятся на отношении порядка, то есть на отношении, которое существует между причиной и следствием. Здесь уже отдельные звенья цепи доказательства связаны символом импликации. Однако символ логического следования «→» в математической логике заменяется «⇒», подобно тому, как в логике Буля используется два символа эквивалентности:

«~» — объектный символ эквивалентности;

«=» — субъектный символ эквивалентности.

Таким образом, следует различать язык логики высказываний и метаязык исследования.

Для избежания путаницы введем еще два метасимвола. Вместо объектной конъюнкции « $\wedge$ », будем использовать субъектный символ метаконъюнкции — «,», а вместо объектной дизъюнкции « $\vee$ », используется символ субъектной метадизъюнкции «;».

1.2. Пропозициональные связки

С помощью шести логических связок можно образовывать сложные высказывания. Другие логические связки, известные нам по алгебре Буля, в логике высказываний не используются.

Запишем логические связки и кванторы в *табл. 1* и сделаем пояснения.

1. Отрицание или инверсия

«Неверно, что 2 × 2 = 5».

«Завтра мы не будем работать на компьютере».

Данные высказывания истинны, когда их отрицания ложны, и наоборот.

2. Дизъюнкция.

Пример высказывания: «В природе бывает, что солнце при дожде светит или прячется в тучах».

В этом высказывании связка «или» реализует дизъюнкцию, при этом сложное высказывание истинно, если истинно хотя бы одно из простых высказываний, в том числе, если истинны сразу оба высказывания.

Таблица 1

Логические связки и кванторы

Название логических связок и кванторов	Как читаются логические связки и кванторы	Математические обозначения
1. Отрицание	неверно, что…	- $\rceil$ [$\overline{A}$, $\rceil$ A]
2. Дизъюнкция	…или…	$\vee$;