Оглавление

От авторов

Книга «Математика. ЕГЭ. Теория вероятностей» предназначена учащимся выпускных классов общеобразовательных учреждений и учителям. Пособие будет полезно всем выпускникам — как претендующим на высокий экзаменационный балл, так и желающим только преодолеть минимальный порог.

Книга содержит восемь модулей, семь из которых — тематические, а один направлен на отработку навыков решения сложных задач. При этом практически все предлагаемые задания аналогичны заданиям открытого банка ЕГЭ*. Книга включает в себя также краткий справочник (все основные формулы).

Каждый модуль, кроме 6-го, содержит диагностическую работу, необходимые теоретические сведения, примеры выполнения заданий, варианты для самостоятельной работы.

Каждый вариант мы рекомендуем выполнять в течение 30–40 минут, а затем проверять правильность решения с помощью ответов, данных в конце пособия. Если ответы не совпадут, попробуйте ещё раз решить задачу, а при необходимости найдите подобную среди разобранных примеров.

В четвёртое издание добавлен модуль 8 «Элементы статистики» и расширен круг задач для отдельных тем, что отражает изменения в открытом банке заданий ЕГЭ.

Желаем успеха на экзамене!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты издательства: `legionrus@legionrus.com`.

---

*См. сайт http://mathege.ru.

Модуль 1. Классическое определение вероятности

В этом модуле рассматриваются задачи, для решения которых достаточно применения определения вероятности. Иногда здесь мы будем применять также формулу для вычисления вероятности противоположного события. Хотя без этой формулы здесь можно обойтись, она всё равно понадобится при решении задач следующих модулей.

Диагностическая работа

1. На стоянке находится 56 автомобилей, из них в 42 есть кондиционер. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на стоянке автомобиле есть кондиционер.

2. В среднем из 1000 садовых шлангов, поступивших в продажу, 16 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля шланг не подтекает.

3. Фабрика выпускает рюкзаки. В среднем на 100 качественных рюкзаков приходится восемнадцать рюкзаков со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный рюкзак окажется качественным. Результат округлите до сотых.

4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет орёл, во второй и третий — решка.

5. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

6. На клавиатуре телефона 10 цифр — от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет нечётной и меньше 8?

7. На экзамене участников рассаживают по семи аудиториям. В первых шести — по 15 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию на другом этаже. При подсчёте выяснилось, что всего было 100 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал экзаменационную работу в запасной аудитории.

8. Телефон передаёт СМС-сообщение. В случае неудачи он делает следующую попытку. Вероятность того, что СМС-сообщение удастся передать без ошибок, в каждой отдельной попытке равна 0,88. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

Теоретическая часть

Случайным называют событие, которое может произойти или не произойти (заранее предсказать невозможно) во время наблюдения или испытания.

Пусть при проведении испытания (бросание монеты или кубика, вытягивание экзаменационного билета и т. д.) наступает один из n равновозможных исходов. Например, при подбрасывании монеты число всех исходов n равно 2, так как кроме выпадения «решки» или «орла» других исходов быть не может. При броске игрального кубика возможны 6 исходов, так как на верхней грани кубика равновозможно появление любого из чисел от 1 до 6. Пусть также некоторому событию A благоприятствуют m исходов.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов*. Пишем $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Например, пусть событие A состоит в выпадении нечётного числа очков при бросании кубика. Всего возможны 6 исходов: выпадение на верхней грани кубика 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом благоприятными для события A являются исходы с выпадением 1, 3, 5. Таким образом, $P(A) = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$.

*Это так называемое *классическое* определение вероятности. Существуют и другие определения (например, геометрическое), однако в школьном курсе они не рассматриваются.

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство $0 \leqslant m \leqslant n$, поэтому вероятность любого события A лежит на отрезке $[0;1]$, то есть $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Если у вас в ответе вероятность получается больше единицы, значит, вы где-то ошиблись и решение нужно перепроверить.

События A и B называются **противоположными** друг другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них. Например, при бросании кубика событие «выпало нечётное число» является противоположным событию «выпало чётное число».

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. Из определения противоположных событий следует, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, значит, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Задачи о выборе объектов из набора

В этих задачах нужно подсчитать общее число объектов (равно общему числу исходов) и число подходящих объектов (равно числу благоприятных исходов). После этого следует воспользоваться определением вероятности.

Задача 1. Антон, Боря, Вова и Гриша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Вова.

Решение.

Общее число исходов равно 4 (число ребят, бросавших жребий). Благоприятный исход один — выиграл Вова. По определению искомая вероятность равна $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Задача 2. В чемпионате мира участвуют 24 команды. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по шесть команд в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в третьей группе?

Решение.

Общее число исходов равно числу карточек — их 24. Благоприятных исходов 6 (так как номер 3 написан на шести карточках). Искомая вероятность равна $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Задача 3. В урне 14 красных, 9 жёлтых и 7 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

Решение.

Общее число исходов равно числу шаров: $14 + 9 + 7 = 30$. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 9. Искомая вероятность равна $\dfrac{9}{30} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

Ответ: 0,3.

Задача 4. На клавиатуре телефона 10 цифр — от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной и больше 5?

Решение.

Исходом здесь является нажатие определённой клавиши, поэтому всего имеется 10 равновозможных исходов. Указанному событию благоприятствуют исходы, означающие нажатие клавиши 6 или 8. Таких исходов два. Искомая вероятность равна $\dfrac{2}{10} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

Задача 5. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 4 до 23 делится на три?

Решение.

На отрезке от 4 до 23 имеется $23 - 4 + 1 = 20$ натуральных чисел, значит, всего возможны 20 исходов. На этом отрезке кратны трём следующие числа: 6, 9, 12, 15, 18, 21. Всего таких чисел 6, поэтому рассматриваемому событию благоприятствуют 6 исходов. Искомая вероятность равна $\frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

Ответ: 0,3.

Задача 6. Из 20 билетов, предлагаемых на экзамене, школьник может ответить только на 17. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить на выбранный наугад билет?

Решение.

1-й способ.

Так как школьник может ответить на 17 билетов, то на 3 билета он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов по определению равна $\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0{,}15$.

2-й способ.

Обозначим через A событие «школьник может ответить на билет». Тогда $P(A) = \frac{17}{20} = \frac{17 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{85}{100} = 0{,}85$. Вероятность противоположного события равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

Ответ: 0,15.

Задача 7. В чемпионате по художественной гимнастике участвуют 20 спортсменок: 6 — из России, 5 — из Германии, остальные — из Франции. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая седьмой, окажется из Франции.

Решение.

Всего 20 спортсменок, у всех равные шансы выступать седьмой. Поэтому имеются 20 равновероятных исходов. Из Франции $20 - 6 - 5 = 9$ спортсменок, поэтому имеются 9 благоприятных для указанного события исходов. Искомая вероятность равна $\dfrac{9}{20} = \dfrac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \dfrac{45}{100} = 0{,}45$.

Ответ: 0,45.

Задача 8. Научная конференция проводится в течение 5 дней. Всего запланировано 50 докладов — первые три дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение.

Сначала найдём, сколько докладов запланировано на последний день. На первые три дня запланировано $12 \cdot 3 = 36$ докладов. Остаются ещё $50 - 36 = 14$ докладов, которые распределяются поровну между оставшимися двумя днями, поэтому в последний день запланировано $\dfrac{14}{2} = 7$ докладов.

Будем считать исходом порядковый номер доклада профессора Н. Всего таких равновозможных исходов 50. Благоприятствуют указанному событию 7 исходов (последние