ВВЕДЕНИЕ

Пособие «Стереометрия. Решение задач повышенного уровня в вариантах ЕГЭ и не только» написано на основе личного опыта автора в преподавании геометрии учащимся профильных классов. Оно будет полезно всем выпускникам, на этапе подготовки к сдаче ЕГЭ по математике на профильном уровне, учителям, осуществляющим обучение геометрии в старших классах, методистам и репетиторам, а также может быть использовано и при дистанционном обучении.

Пособие предназначено для отработки навыков решения стереометрических задач в вариантах ЕГЭ по математике профильного уровня. Особое внимание в книге уделено теоретическим сведениям, необходимым для решения стереометрических задач, и правильному их применению, особенно в пунктах заданий на доказательство, способам построения сечений многогранников плоскостью, использованию векторного и координатного методов решения задач. Также пособие содержит набор опорных задач, составляющих основу для выполнения большинства задач в формате ЕГЭ.

Материал, представленный в книге, структурирован по тематическому принципу, а внутри каждой темы распределён по типам задач. Каждый параграф включает теоретическую и наглядно-практическую (примеры решения задач различными методами) части, а также тренировочные упражнения, представляющие собой задания из вариантов ЕГЭ прошлых лет или близкие им по содержанию, и ответы к ним. Как правило, параграф начинается с изложения необходимых теоретических сведений, знакомства с набором опорных задач и их решения.

Важно понимать, что научиться решать стереометрические задачи можно только усвоив основные теоретические сведения и применив их в дальнейшем при решении тренировочных упражнений.

Автор

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. Аксиомы стереометрии и следствия из них. Опорные задачи

Основные понятия

● *Стереометрия* – раздел геометрии, изучающий свойства тел и фигур, взаимное положение линий, плоскостей, поверхностей и тел в трехмерном пространстве.

Основными неопределяемыми понятиями в стереометрии являются: точка, прямая и плоскость. Точки обозначают прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$; прямые – либо двумя прописными буквами латинского алфавита $AB, MN, \ldots$ либо строчными буквами $a, b, c, \ldots$; плоскости – либо тремя прописными буквами латинского алфавита ABC, $MNP, \ldots$ либо буквами греческого алфавита α, β, γ.

● *Фигурой* называется всякое множество точек, прямых и плоскостей в пространстве. В свою очередь, прямая, плоскость – множества точек. Пространство – множество всех точек.

Геометрическая фигура называется *пространственной*, если не все точки ее лежат в одной плоскости. Примером пространственной фигуры может служить геометрическое тело – часть пространства, занимаемая предметом. Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства поверхностью.

Две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить так, чтобы они совпали всеми своими частями. Предполагается, что при перемещении в пространстве геометрические фигуры не изменяются.

В геометрических предложениях такие слова, как «лежать», «принадлежать», «совпадать», «проходить», «пересекать», «параллельны», «перпендикулярны» выражают отношения между точками, прямыми и плоскостями. Обычно используют обозначения:

$\in$ – знак принадлежности. Так, запись $A \in a$ (или $A \in \alpha$) означает, что точка A принадлежит прямой a (или плоскости α).

$\subset$ – знак включения. Так, запись $a \subset \alpha$ означает, что множество точек прямой a включается во множество точек плоскости α.

$\bigcap$ – знак пересечения. Например, запись $\alpha \bigcap \beta$ означает пересечение плоскостей α и β, $a \bigcap b$ прямых a и b, $a \bigcap \alpha$ прямой a и плоскости α. Оно может равняться пустому множеству, если соответствующие элементы не имеют общих точек, то есть не пересекаются.

Аксиомы стереометрии

В стереометрии, так же, как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. Некоторые свойства фигур не подлежат доказательству и принимаются в качестве исходных. Основные свойства плоскостей выражаются следующими аксиомами (по учебнику [1]):

А1. Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости. В этом случае говорят, что прямая лежит в плоскости.

А3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. В этом случае говорят, что плоскости пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Следствия из аксиом

1. *Через прямую и точку, лежащую вне этой прямой, можно провести плоскость и притом только одну.*

2. *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.*

3. *Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.*

4. *Через любую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.*

Как видно из аксиом и следствий из них, плоскость задается однозначно следующим набором элементов:

а) даны три точки, не лежащие на одной прямой (рис. 1а);

б) дана прямая и не принадлежащая ей точка (рис. 1б);

в) даны две пересекающиеся прямые (рис. 1в).

Кроме этого, как будет видно из дальнейшего, две параллельные прямые в пространстве однозначно задают плоскость (рис. 1г).

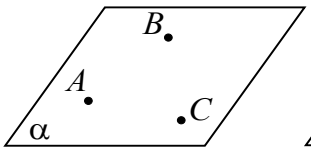

Рис. 1а

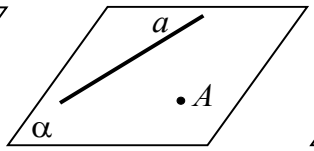

Рис. 1б

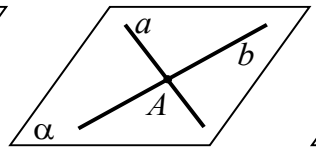

Рис. 1в

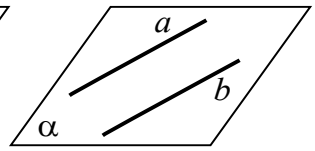

Рис. 1г

Задача 1. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости α, β, γ. Докажите, что, если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

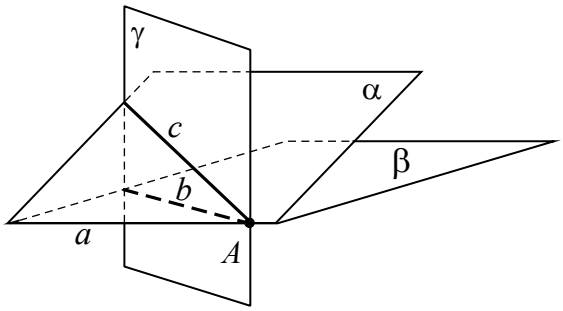

Рис. 2

Доказательство. Пусть $\alpha \bigcap \beta = a$, $\beta \bigcap \gamma = b$, $\alpha \bigcap \gamma = c$ и $a \bigcap b = A$ (рис. 2). Докажем, что $A \in c$. Поскольку $A \in a$ и $A \in b$, то точка A принадлежит всем трем плоскостям α, β, γ. Тогда по аксиоме 2 плоскости α и γ имеют общую точку, следовательно, они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Но по условию $\alpha \bigcap \gamma = c$. Значит, $A \in c$.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве либо лежат в одной плоскости, либо нет.

- Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие общую точку, называются *пересекающимися*.
- Прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.
- Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

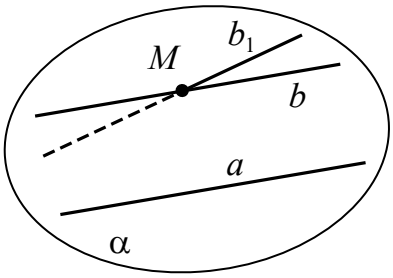

Рис. 3

Теорема 1 (пространственная теорема о параллельных прямых). Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

Доказательство. Пусть a – произвольная прямая пространства, M – точка, не принадлежащая ей (рис. 3). Через прямую a и точку M можно провести единственную плоскость (обозначим ее α). На плоскости α через эту точку M можно провести прямую b такую, что $b \parallel a$ и $M \in b$. Докажем, что прямая b единственная. Допустим, что существует другая прямая b_1,

которая не совпадает с прямой b, параллельная прямой a и проходящая через точку M. Тогда поскольку $a \parallel b_1$, то по определению они лежат в одной плоскости (пусть это плоскость α_1). Плоскости α и α_1 имеют общие элементы (прямую a и точку M, не принадлежащую ей). Следовательно, они совпадают, Тогда, прямые b и b_1 лежат в одной плоскости, параллельны и проходят через точку M, а значит, совпадают.

Теорема 2 (признак параллельности прямых). Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу или совпадают.

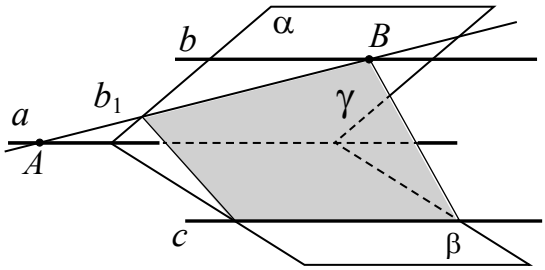

Рис. 4

Доказательство. Пусть прямые b и c такие, что $b \parallel a$, $c \parallel a$ (рис. 4). Докажем, что $b \parallel c$.

Случай, когда прямые a, b и c лежат в одной плоскости, рассматривался в планиметрии. Поэтому рассмотрим случай, когда они не лежат в одной плоскости.

Пусть плоскости α и β таковы, что $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, а $c \subset \beta$, $a \subset \beta$. Плоскости α и β различны. Выберем на прямой b точку B и проведем плоскость γ через прямую c и точку B. Она пересечет плоскость α по прямой b_1. Допустим, что b_1 пересекает прямую a в точке A. В этом случае $\alpha \bigcap \gamma = b_1$, $\alpha \bigcap \beta = a$, $\beta \bigcap \gamma = c$ и $a \bigcap b_1 = A$, следовательно $A \in c$ (см. задачу 1), то есть прямая c не параллельна прямой a, что противоречит условию теоремы. Значит, b_1 не пересекает a, но тогда $b_1 \parallel a$ и, следовательно, $b_1 = b$ (по предыдущей теореме). Значит, прямая b лежит в одной плоскости γ с прямой c и не пересекает ее, значит $b \parallel c$.

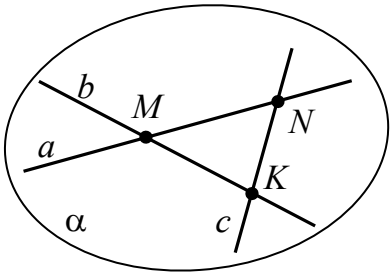

Рис. 5

Задача 2. Прямые a и b пересекаются в точке M. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямые a и b, не проходящая через точку M, лежит с ними в одной плоскости.

Доказательство. Через две пересекающиеся прямые a и b ($a \bigcap b = M$) можно провести плоскость α и притом только одну. Пусть третья прямая c (рис. 5) проходит так, что $a \bigcap c = N$, $b \bigcap c = K$. Плоскость α содержит точки N и K, лежащие на прямой c. Следовательно, $c \subset \alpha$.

Задача 3. Дана прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

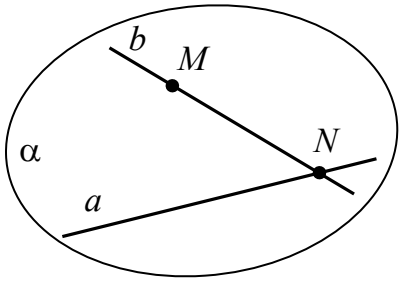

Рис. 6

Доказательство. Пусть даны прямая a и точка $M \notin a$ (рис. 6). Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну (обозначим ее α). Выберем произвольную точку на прямой a (например, точку N) и проведем прямую b через точки M и N. Две точки прямой b лежат в плоскости α, значит прямая b лежит в плоскости α. Поскольку точка N – произвольная точка прямой a, то все прямые, проходящие через точку M и пересекающие прямую a лежат в плоскости α.

Задача 4. Докажите, что все прямые, пересекающие одну из двух скрещивающихся прямых и параллельные другой, лежат в одной плоскости.

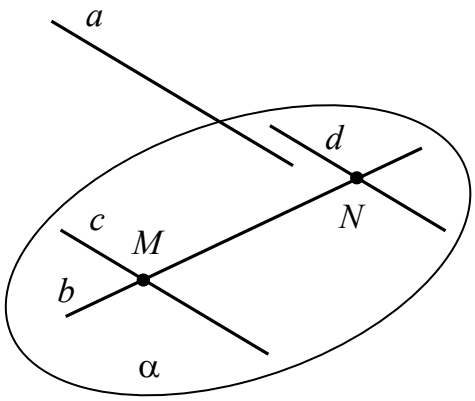

Рис. 7

Доказательство. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 7). Возьмем на прямой b произвольную точку M и проведем прямую c так, что $c \parallel a$ и $c \cap b = M$ (она единственна!). Через две пересекающиеся прямые b и c ($c \cap b = M$) можно провести плоскость α и притом только одну. Рассмотрим произвольную точку N на прямой b, отличную от точки M. В плоскости α через точку N можно провести прямую $d \parallel c$ (соответственно $d \parallel a$). Так как через точку N в пространстве можно провести единственную прямую, параллельную данной, то любая прямая, параллельная a и проходящая через точку N, совпадет с d. Соответственно все прямые, пересекающие прямую b и параллельные прямой a лежат в одной плоскости α.

Если же процесс построения плоскости начать с какой-то другой точки $M_1 \in b$ построить плоскость α_1, то в этой плоскости также будет лежать прямая c, рассмотренная выше. Тогда получаем $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$ и $b \subset \alpha_1$, $c \subset \alpha_1$. Следовательно, плоскости α и α_1.

Таким образом доказано, что все прямые, пересекающие одну из двух скрещивающихся прямых и параллельные другой, лежат в одной плоскости.

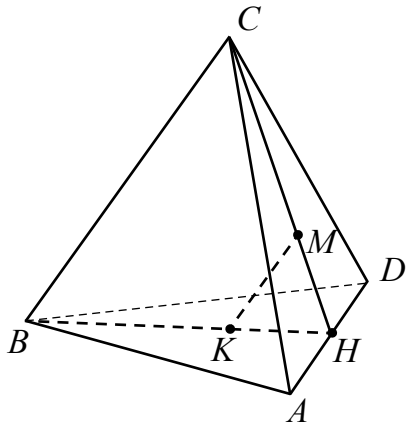

Рис. 8

Пример 1. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K – центр грани ABD, точка M – центр грани ACD. Докажите, что прямые BC и KM параллельны.

Доказательство. Все грани правильного тетраэдра – правильные треугольники. В правильном треугольнике центр грани – точка пересечения медиан. Пусть CH – медиана треугольника CAD, а BH – медиана треугольника BAD (рис. 8).

Поскольку $\frac{HM}{MC} = \frac{HK}{KB} = \frac{1}{2}$, то $\frac{HM}{HC} = \frac{HK}{HB} = \frac{1}{3}$. Значит, треугольники HKM и HBC подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, а значит прямые KM и BC параллельны.

§ 2. Основные теоремы (признаки) стереометрии

Большинство доказательств в стереометрических задачах из вариантов ЕГЭ основано на применении следующих признаков:

– признак скрещивающихся прямых;
– признак параллельности прямой и плоскости;
– признак параллельности плоскостей;
– признак перпендикулярности прямой и плоскости;
– признак перпендикулярности плоскостей.

● Две прямые в пространстве, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

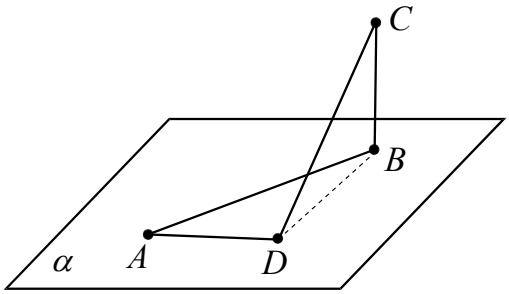

Рис. 9

Пусть точки A, B, C, D (рис. 9) не лежат в одной плоскости. Фигура, образованная отрезками AB, BC, DC и AD, называется *пространственным четырехугольником*.

Замечание. Точки *A, B, C* и *D*, в общем случае, задают несколько различных пространственных четырехугольников. Поэтому кроме вершин необходимо указывать и отрезки, являющиеся сторонами пространственного четырехугольника.

Справедливы следующие утверждения:

1. *Середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

2. *Два отрезка, соединяющие середины противоположных сторон пространственного четырехугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.*

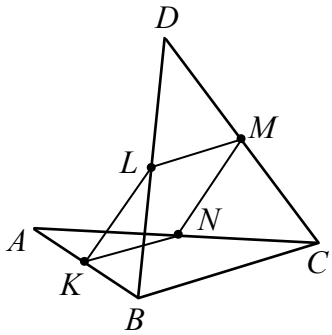

Рис. 10а

Доказательство. Пусть дан пространственный четырехугольник *ABCD*. Точки *K*, *L*, *M*, *N* – середины рёбер *AB*, *BD*, *DC*, *AC* (рис. 10а). В треугольнике ABC отрезок KN является медианой, значит $KN \parallel BC$ и $KN = \frac{1}{2}BC$. А в треугольнике BDC отрезок LM является медианой, значит, $LM \parallel BC$ и $LM = \frac{1}{2}BC$.

Так как $KN \parallel BC \parallel LM$, то $KN \parallel LM$, а так как прямые KN и LM пересекают прямую NM и параллельны, то они лежат в одной плоскости. Значит, точки K, L, M, N лежат в одной плоскости и являются вершинами четырехугольника, у которого две противоположные стороны равны и параллельны, то есть параллелограмма.

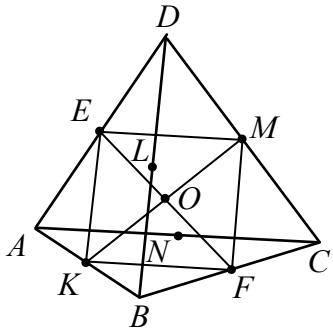

Рис. 10б

Соответственно отрезки, соединяющие середины противоположных сторон пространственного четырехугольника $ABCD$ являются диагоналями в параллелограмме $KLMN$ для параллелограмма верно, его диагонали пересекаются в точке $O = KM \cap LN$ и точкой пересечения делятся пополам.

Пусть точки E и F – середины отрезков AD и BC соответственно (AD и BC – диагонали пространственного четырехугольника) (рис. 10б). Аналогично доказывается, что четырехугольник $KEMF$ – параллелограмм, его диагонали также пересекаются в точке $O = KM \cap EF$ и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, верно, что два отрезка, соединяющие середины противоположных сторон пространственного четырехугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

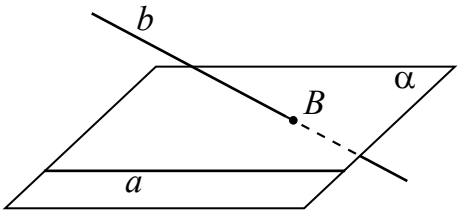

Рис. 11

Теорема 3 (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются (рис. 11).

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Возможны следующие случаи расположения в пространстве прямой и плоскости:

а) прямая лежит в плоскости (или плоскость проходит через прямую);

б) прямая и плоскость имеют одну общую точку, т. е. прямая пересекает плоскость. Точку их пересечения называют *следом прямой на данной* плоскости;

в) прямая не имеет общих точек с плоскостью, т. е. прямая параллельна плоскости.

Параллельность прямой и плоскости

- Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

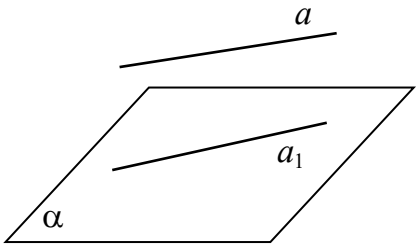

Рис. 12

Теорема 4 (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая a не лежит в плоскости α и параллельна прямой a_1, лежащей в плоскости α (рис. 12), то она параллельна плоскости α.

Теорема 5. Если две плоскости α и β, проходящие соответственно через параллельные прямые a и b, пересекаются, то прямая их пересечения c параллельна обеим данным прямым a и b (если, конечно, прямая c не совпадает ни с a, ни с b) (рис. 13).

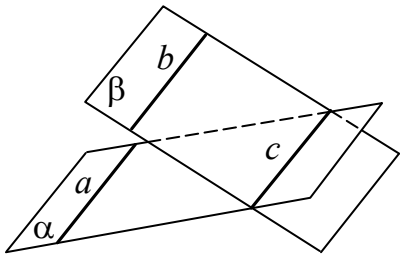

Рис. 13

Теорема 6. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Следствие: если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения.

Теорема 7. Если одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, то и другая прямая параллельна той же плоскости или лежит в ней.

Теорема 8. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость и притом только одна, параллельная другой прямой.

Пример 2. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC. Докажите, что плоскость α параллельна ребру MD.

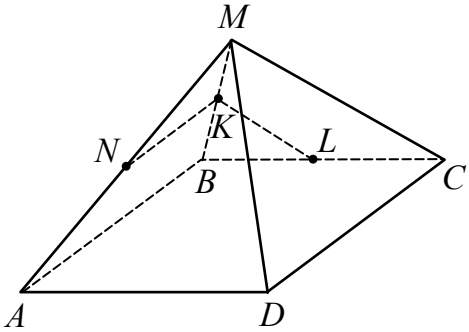

Рис. 14

Доказательство. Пусть точка N – середина ребра MA, а точка K – середина ребра MB (рис. 14). Плоскость α пересекает грань BMC по отрезку KL (точка L лежит на ребре BC), параллельному ребру MC. Ребро CD параллельно ребру AB (как стороны квадрата), а ребро AB параллельно отрезку NK (NK – средняя линия в треугольнике AMB). Следовательно, плоскость α параллельна плоскости грани CMD. Поэтому прямая MD параллельна плоскости α.

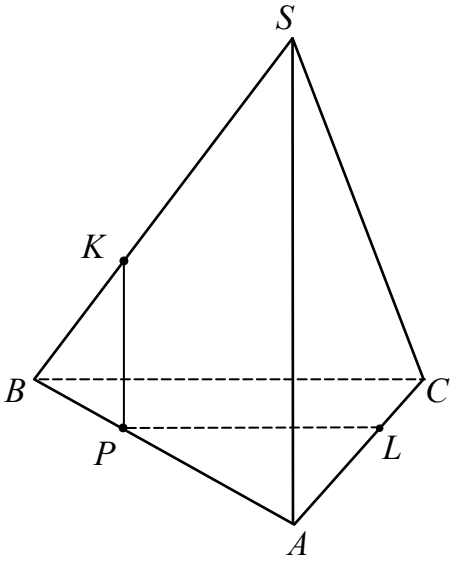

Рис. 15

Пример 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K делит сторону SB в отношении $2:1$ считая от вершины S, точка L делит сторону AC в отношении $1:2$ считая от вершины C. Через точки L и K параллельно SA проведена плоскость α. Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC.

Доказательство. Так как плоскость α параллельна прямой SA и имеет с плоскостью грани SAB общую точку K, то она пересекает эту плоскость по прямой $KP \parallel SA$, где $P = \alpha \cap AB$ (рис. 15). В таком случае по теореме Фалеса следует $\frac{BP}{PA} = \frac{BK}{KS} = \frac{1}{2}$.

Тогда, треугольники APL и ABC подобны по двум пропорциональным сторонам $\frac{PA}{BA} = \frac{AL}{AC} = \frac{2}{3}$ и углу между ними, а значит, поэтому отрезок PL параллелен BC. Поскольку точки K, P и L лежат в плоскости α и прямая BC параллельна лежащей в плоскости сечения прямой PL, она параллельна и самой плоскости α по признаку параллельности прямой и плоскости.

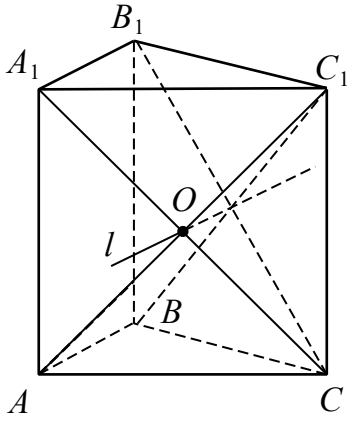

Рис. 16

Пример 4. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Докажите, что линия пересечения плоскостей ABC_1 и A_1B_1C параллельна основаниям призмы.

Доказательство. Пусть точка $O = A_1C \cap AC_1$ (рис. 16). Значит, она – общая точка плоскостей ABC_1 и A_1B_1C. Проведем через нее прямую l, параллельную AB и A_1B_1 ($AB \parallel A_1B_1$, поскольку призма прямая и все её боковые грани – прямоугольники). Поскольку прямая, проходящая через точку плоскости параллельно прямой этой плоскости, лежит в этой плоскости, то прямая l лежит в обеих плоскостях ABC_1 и A_1B_1C, то есть $l = ABC_1 \cap A_1B_1C$. А так как l параллельна AB, она параллельна плоскости основания призмы.

Перпендикуляр и наклонная к плоскости

● Прямая называется *перпендикулярной плоскости* (или перпендикуляром к плоскости), если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (перпендикулярность в данном случае понимается в смысле «угол между скрещивающимися прямыми равен 90°»).

Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью *равен* 90°.

● Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей, называется *наклонной* к этой плоскости.

Теорема 9 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, то есть она перпендикулярна плоскости.

●*Прямоугольной* (*ортогональной*) *проекцией точки на плоскость* называется след перпендикуляра, проведенного через эту точку к данной плоскости.

●*Наклонная* – отрезок, соединяющий точку вне плоскости с точкой на плоскости, отличной от ортогональной проекции на плоскость первой точки.

- *След перпендикуляра на плоскости называется* основанием перпендикуляра*, а след наклонной* – основанием наклонной.
- *Прямоугольной* (*ортогональной*) *проекцией наклонной на плоскость* называется отрезок прямой, соединяющей основание наклонной с основанием перпендикуляра, опущенного из конца наклонной на эту плоскость.

Теорема 10. Если из одной и той же точки вне плоскости провести к плоскости перпендикуляр и наклонные, то:

а) перпендикуляр короче всякой наклонной;

б) наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой;

в) из двух наклонных, имеющих разные проекции, больше та, проекция которой больше.

Теорема 11 (обратная теореме 10). Если из одной и той же точки, лежащей вне плоскости, провести к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:

а) равные наклонные имеют равные проекции;

б) из двух проекций больше та, которая соответствует большей наклонной.

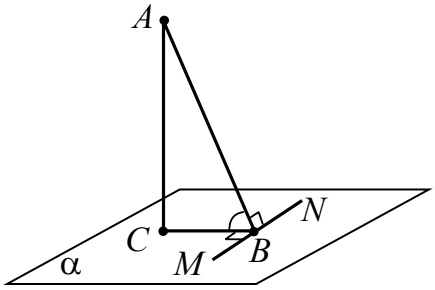

Рис. 17

Теорема 12 (теорема о трех перпендикулярах). Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно наклонной, перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.

Теорема 13 (обратная теореме к теореме о трех перпендикулярах). Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно проекции наклонной к этой плоскости, перпендикулярна самой наклонной.

На рис. 17 AB – наклонная, AC – перпендикуляр к плоскости α, прямая $MN \subset \alpha$. Тогда, если $MN \perp AB$, то $MN \perp BC$, и наоборот, если $MN \perp CB$, то $MN \perp AB$.

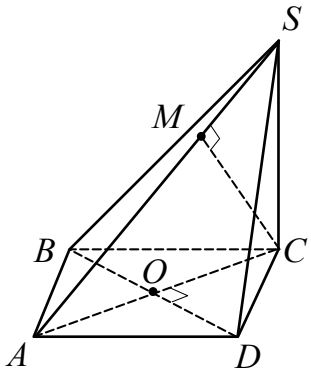

Рис. 18

Пример 5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Боковое ребро SC, равное AB, перпендикулярно основанию пирамиды. Плоскость α, проходящая через вершину C параллельно прямой BD, пересекает ребро SA в точке M, причем $SM : MA = 1:2$. Докажите, что SA перпендикулярна α.

Доказательство. Пусть сторона основания равна a. Тогда в прямоугольном треугольнике ASC ($SC \perp ABC$ по условию) $AC = \sqrt{2}a$ (диагональ квадрата со стороной a) и $SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \sqrt{3}a$ (рис. 18). Основание высоты треугольника ASC, опущенной из вершины C на гипотенузу AS, делит ее в отношении 2:1, считая от вершины A (проекции катетов AC и SC на гипотенузу AS соответственно равны $AC\cos\angle SAC = \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ и $SC\cos\angle ASC = a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{a}{\sqrt{3}}$), а значит совпадает с точкой M. Следовательно, $MC \perp SA$.

Плоскость α параллельна прямой BD. Проведем через точку M прямую l, параллельную BD. Поскольку прямая l, проходит через точку плоскости α параллельно прямой BD, то она лежит в этой плоскости. Заметим, что $BD \perp SAC$ ($BD \perp AC$, как диагонали квадрата, и $BD \perp SC$), а значит $BD \perp SA$. Так как $l \parallel BD$, то $SA \perp l$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $SA \perp \alpha$ ($MC \subset \alpha$, $SA \perp MC$ и $l \subset \alpha$, $SA \perp \alpha$).

Связь параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема 14. Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Теорема 15. (обратная теореме 14). Если две различные прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Таким образом, если $b \parallel a$ и $a \perp \alpha$ (рис. 19), то и $b \perp \alpha$, и, наоборот, если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.

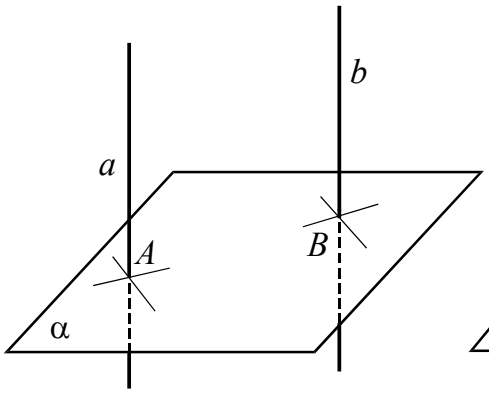

Рис. 19

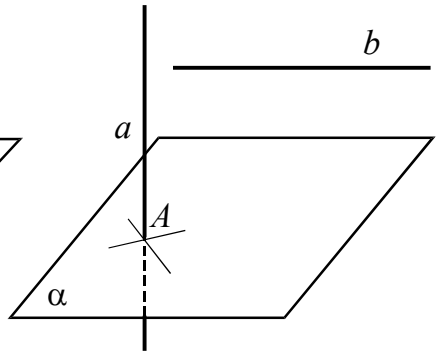

Рис. 20

Теорема 16. (признак параллельности прямой и плоскости). *Е*сли плоскость α и прямая a (рис. 20), не лежащая в плоскости α, перпендикулярны одной и той же прямой b, то они параллельны.

Параллельные плоскости

- Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

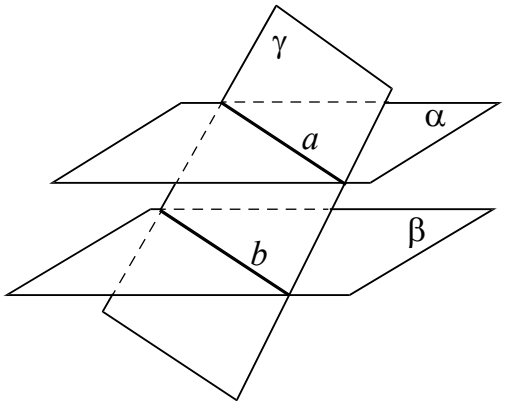

Рис. 21

Теорема 17. (признак параллельности плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие две плоскости параллельны.

Теорема 18. (признак параллельности плоскостей). Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Теорема 19. Если две параллельные плоскости α и β пересекаются третьей плоскостью γ, то прямые их пересечения параллельны (рис. 21).

Другими словами, если $\alpha \parallel \beta$ и плоскость γ такова, что $\alpha \bigcap \gamma = a$ и $\beta \bigcap \gamma = b$, то $a \parallel b$ (рис. 21).

Теорема 20. Две плоскости, параллельные одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой или совпадают.

Теорема 21. Плоскость, пересекающая одну из параллельных плоскостей, пересечет и другую плоскость.

Теорема 22. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Теорема 23. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны между собой.

Теорема 24. Два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны между собой.

Пример 6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости BA_1D и B_1D_1C параллельны.

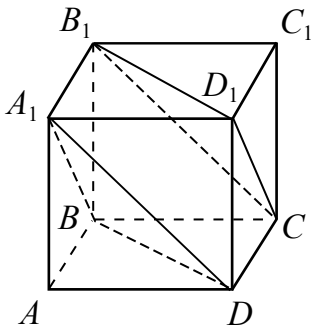

Рис. 22

Доказательство. Рассмотрим диагональные плоскости BA_1D_1 и BB_1D_1 (рис. 22). В первой из них лежит четырехугольник BA_1D_1C, который является параллелограммом ($A_1D_1 = BC$, как ребра куба, и $A_1D_1 \parallel BC$, поскольку $A_1D_1 \parallel AD$ и $BC \parallel AD$). Значит, $A_1B \parallel D_1C$.
Во второй из них лежит четырехугольник BB_1D_1D, который также является параллелограммом ($BB_1 = D_1D$, как ребра куба, и $BB_1 \parallel D_1D$, поскольку $BB_1 \perp ABC$ и $D_1D \perp ABC$). Значит, $B_1D_1 \parallel BD$.
По признаку параллельности плоскостей плоскости BA_1D и B_1D_1C параллельны ($A_1B \subset BA_1D, BD \subset BA_1D$, $D_1C \subset B_1D_1C, B_1D_1 \subset B_1D_1C$ и $A_1B \parallel D_1C$, $B_1D_1 \parallel BD$).

Перпендикулярные плоскости

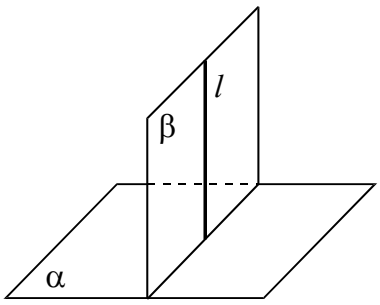

Рис. 23

Теорема 25. (признак перпендикулярности плоскостей). Если плоскость β проходит через перпендикуляр l к плоскости α, то плоскости α и β взаимно перпендикулярны (рис. 23).

Теорема 26. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна другой плоскости.

Теорема 27. Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из какой-нибудь точки одной из них опущен перпендикуляр на другую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.

Теорема 28. Плоскость, перпендикулярная двум пересекающимся плоскостям, перпендикулярна ребру образованного ими двугранного угла.

Теорема 29. Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, перпендикулярна и его граням.

Пример 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 12, а боковое ребро SA равно 17. На ребрах AB и SB отмечены точки K и L соответственно, причем $AK = SL = 7$. Плоскость α проходит через точки K, L и C. Докажите, что плоскость α перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

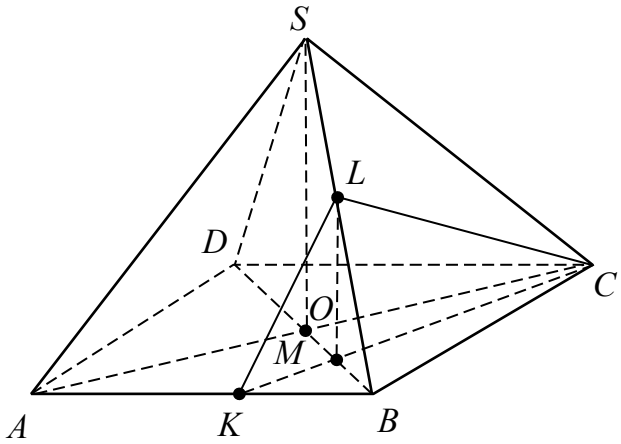

Рис. 24

Доказательство. Пусть M – точка пересечения прямых BD и CK (рис. 24). Имеем: $KB = 5$, $BD = 12\sqrt{2}$, $BO = 6\sqrt{2}$, $\frac{BM}{DM} = \frac{KB}{CD} = \frac{5}{12}$, откуда $BM = \frac{5}{17}BD = \frac{60\sqrt{2}}{17}$, $OM = \frac{42\sqrt{2}}{17}$.
Далее, $BL = 10$, $\frac{BM}{OM} = \frac{10}{7} = \frac{BL}{LS}$, следовательно, прямая LM параллельна прямой SO – высоте пирамиды. Значит, прямая LM перпендикулярна плоскости ABC. Таким образом, плоскость CKL перпендикулярна плоскости ABC по признаку перпендикулярности плоскостей.

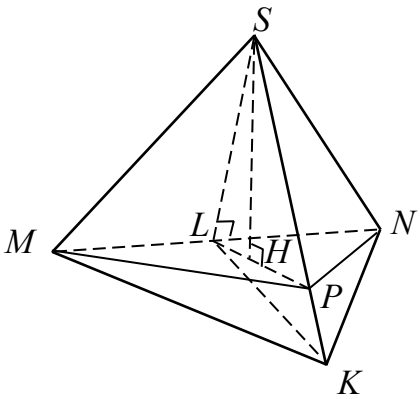

Рис. 25

Пример 8. В правильном тетраэдре $SMNK$ на ребре SK отмечена точка P такая, что $KP:PS=1:3$, точка L – середина ребра MN. Докажите, что плоскости SLK и MPN перпендикулярны.

Доказательство. Заметим, что плоскость SLK перпендикулярна прямой MN ($MN \perp SL$, как апофема боковой грани, $LK \perp MN$, как медиана и высота основания) (рис. 25). В этой плоскости из точки S опустим перпендикуляр SH на прямую LP. Таким образом, прямые SH и PL, а также SH и MN перпендикулярны между собой. Следовательно, прямая SH перпендикулярна плоскости MPN, и по признаку перпендикулярности плоскостей плоскость SLK перпендикулярна плоскости MPN.

Пример 9. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

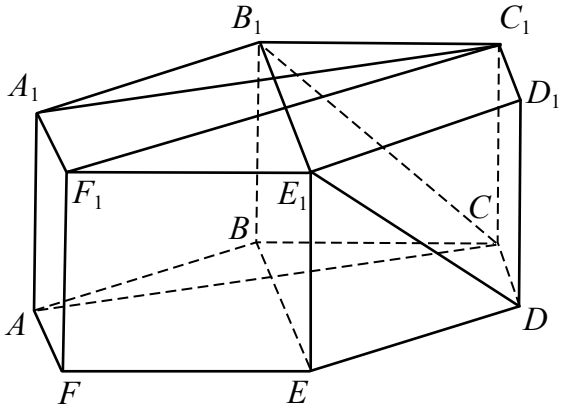

Рис. 26

Доказательство. Прямые AA_1 и CC_1 параллельны и точка C принадлежит плоскости ACA_1 (рис. 26). Значит и прямая CC_1 лежит в этой плоскости. Соответственно и прямая CA_1 лежит в этой плоскости.

Заметим, что прямая B_1E_1 перпендикулярна прямой A_1C_1 (как соответствующие диагонали правильного шестиугольника). Также , прямая B_1E_1 перпендикуляра прямой AA_1 (прямая AA_1 перпендикулярна плоскости основания призмы). Следовательно, прямая B_1E_1, лежащая в плоскости B_1CE_1, перпендикулярна плоскости ACA_1, а это значит, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 взаимно перпендикулярны по признаку перпендикулярности плоскостей.

Пример 10 (ЕГЭ 2019). В правильном тетраэдре $ABCD$ точки K и M – середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой AD.

а) Докажите, что сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью α – квадрат.

б) Найдите площадь сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB=2\sqrt{3}$.

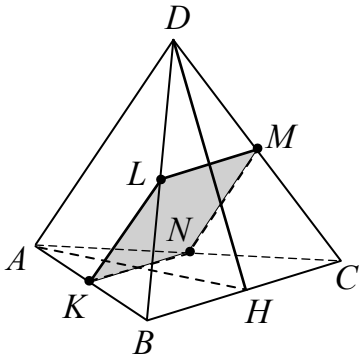

Рис. 27

Решение. а) Пусть точка H – середина ребра BC, а плоскость α пересекает рёбра BD и CD в точках L и N соответственно (рис. 27). Тогда медианы AH и DH правильных треугольников ABC и BCD соответственно являются их высотами, а значит, плоскость ADH перпендикулярны прямой BC. Следовательно, прямая AD перпендикулярна прямой BC.

Поскольку прямая AD параллельна плоскости α, отрезки KL и MN являются средними линиями треугольников ABD и ACD соответственно, причем $KL=\dfrac{AD}{2}=MN$, а отрезок KL параллелен прямой AD.

Следовательно, отрезки KL и KN перпендикулярны и равны, искомое сечение – четырехугольник $KLMN$, у которого все стороны равны, а две соседние стороны перпендикулярны. Следовательно, он является квадратом.

б) Поскольку $KL = KN = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}$, площадь сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью α равна 3.

Ответ: б) 3.

Классификация методов решения стереометрических задач

Второй пункт задания 13 заключается в вычислении некоторой искомой величины для конкретно заданной геометрической конфигурации (либо даны числовые величины элементов, ее образующих, либо она детально описана, и результат не зависит от величин образующих элементов).

Можно предложить следующую классификацию методов решения стереометрических задач на вычисление величин (углов, расстояний, площадей сечений, объемов геометрической фигуры и т.д.):

- *поэтапно-вычислительный метод* – метод позволяющий поэтапно находить искомую величину при решении известных задач, к которым сводится исходная задача;
- *координатно-векторный метод* – метод, при использовании которого задача сводится к нахождению углов между векторами с использованием скалярного произведения или расстояний между точками, заданными своими координатами или длин векторов;
- *метод ключевых* (или *опорных*) *задач* – метод, позволяющий свести вычисления искомой величины к использованию результата решения некоторого набора стандартных задач, заключающемся в применения уже известной формулы.

Необходимо отметить, что внутри каждого из приведенных методов существует различные подходы к вычислению искомой величины.

ГЛАВА 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Темы, рассмотренные в этой и следующей главах, можно было бы объединить в одну «Расстояния и углы», являющуюся основой для всех разделов стереометрии. В данном разделе остановимся на вычислении расстояний, хотя понятия углов (между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями) в решениях будут использоваться. Но в начале для их применения достаточно знаний из планиметрии. В основном в заданиях будет рассматриваться взаимное расположение точек, прямых и плоскостей на многогранниках. Во второй и третьей главах будут рассмотрены основные виды задач и методы их решения.

§ 1. Вычисление расстояния между двумя точками в пространстве

Расстояние между точками A и B в пространстве можно вычислить следующими способами:

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле $\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, (1)

если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в декартовой системе координат;

3) по формуле $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, (2)

где $\{a, b, c\}$ – координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в декартовой системе координат, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})$ – скалярное произведение вектора $\overrightarrow{AB}$ самого на себя. Также используется обозначение $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}^2$.

Рассмотрим основные методы вычисления расстояния между двумя точками в пространстве.

Поэтапно-вычислительный метод

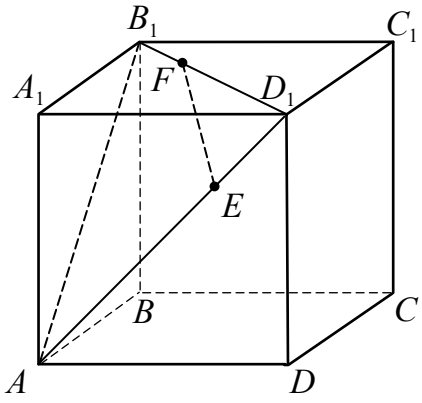

Рис. 1

Пример 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты, соответственно точки E и F так, что $D_1E=\frac{1}{3}AD_1$, $D_1F=\frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.

Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника D_1EF (рис. 1), в котором $D_1F=\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $D_1E=\frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\angle FD_1E=60°$ (треугольник AB_1D_1 является равносторонним). Имеем

$$EF^2=D_1E^2+D_1F^2-2D_1E\cdot D_1F\cdot\cos 60°=\frac{2}{9}+\frac{8}{9}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}, \text{ откуда } EF=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Координатный метод

Приступая к решению задач этим методом полезно разобрать следующую задачу (задача 1 главы 4).

Пусть точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ – концы отрезка AB. Тогда внутренняя точка C отрезка AB такая, что $AC:CB=k$, имеет координаты $C\left(\frac{x_1+k\,x_2}{k+1}; \frac{y_1+k\,y_2}{k+1}; \frac{z_1+k\,z_2}{k+1}\right)$.

Пример 2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K – середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найдите расстояние между точками Q и L, где Q – середина отрезка EM, а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.

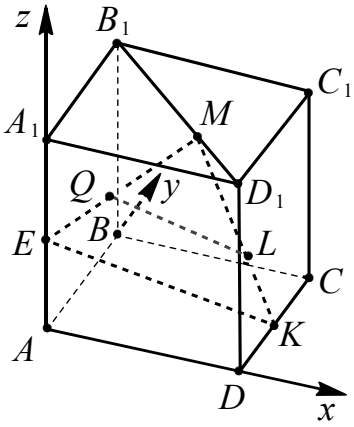

Рис. 2

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 2, взяв за начало координат вершину A и направив оси координат вдоль выходящих из этой вершины ребер.

Тогда $E\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $B_1(0;1;1)$, $D_1(1;0;1)$. Для нахождения координат точки M используем формулу координат точки (опорная задача), делящей отрезок B_1D_1 в отношении 2:1.

Имеем $M\left(\frac{0+2\cdot 1}{1+2},\frac{1+2\cdot 0}{1+2},\frac{1+2\cdot 1}{1+2}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)$.

Аналогично получим координаты точки L, делящей отрезок MK в отношении 2:1. Имеем

$$L\left(\frac{\frac{2}{3}+2\cdot 1}{1+2};\frac{\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2};\frac{1+2\cdot 0}{1+2}\right)=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right).$$

Координаты точки Q есть среднее арифметическое соответствующих координат точек E и M, поэтому $Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right)$. Применим формулу (1) для нахождения расстояния между точками, заданными своими координатами,

$$LQ=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{725}{36^2}}=\frac{5\sqrt{29}}{36}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$.

Векторный метод

Пример 3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E=\frac{1}{3}AD_1$, $D_1F=\frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.

Решение. Введем базисные векторы $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ (см. рис. 1), тогда $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Выразим вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1F}=-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}.$$

Тогда по формуле (2)

$$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{\overrightarrow{EF}^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2+\frac{4}{9}\vec{b}^2+\frac{1}{9}\vec{c}^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Замечание. Вектор $\overrightarrow{EF}$ в данном ортогональном базисе имеет координаты $\left\{-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\}$, поэтому его длину можно найти по формуле (2), то есть $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все стороны которой равны 2, найдите расстояние от точки A до точек:

а) C_1; б) D_1; в) M, где M – центр грани EE_1D_1D.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на ребрах AB и B_1C_1 выбраны точки E и K соответственно так, что $AE:EB = 1:2$, а $B_1K:KC_1 = 5:1$. Найдите длину отрезка EK, сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 2.

3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, K и L – середины ребер AA_1, CD и B_1C_1 соответственно, а точки M и N расположены соответственно на отрезках EK и LK так, что $EM:MK = 2:3$, а $LN:NK = 1:4$. Найдите длину отрезка MN.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания и боковое ребро которой равны $4\sqrt{2}$ и 5 соответственно. Найдите расстояние между точками E и K, если известно, что E лежит на боковом ребре SB и $SE = 2BE$, а K – на стороне основания AD и $AK = 3KD$.

5. Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4 и 4. Найдите расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками A и E_1.

§ 2. Вычисление расстояния от точки до прямой в пространстве

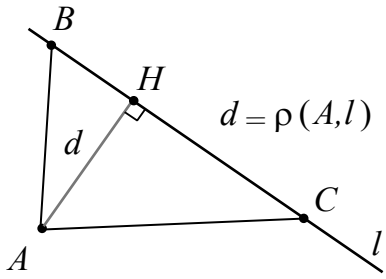

Рис. 3а

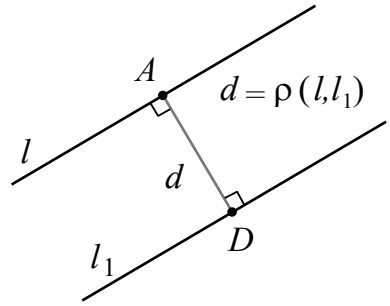

Рис. 3б

- *Расстояние от точки до прямой*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую (на рис. 3а искомое расстояние равно высоте AH треугольника ABC, опущенной из вершины A на основание BC, лежащего на прямой).
- *Расстояние между двумя параллельными прямыми* равно длине отрезка их общего перпендикуляра, что также равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой (на рис. 3б искомое расстояние равно общему перпендикуляру AD к прямым l и l_1).

Рассмотрим основные методы вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве.

Поэтапно-вычислительный метод

Расстояние от точки M до прямой AB, обозначаемое $\rho(M; AB)$, вычисляют, как длину высоты, опущенной из точки M на основание AB (или ее продолжение) треугольника ABM.

Пример 4. При условиях примера 1 найдите расстояние от точки D_1 до прямой *EF.*

Решение. Пусть h – длина высоты треугольника D_1EF, опущенной из точки D_1. Найдем h, используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна

$$\frac{1}{2}D_1F \cdot D_1E \cdot \sin\angle FD_1E = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

С другой стороны площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}FE \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{6}h$. Из уравнения $\frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{6}h$ находим искомое расстояние $h = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2 + D_1E^2 = D_1F^2$, то есть треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

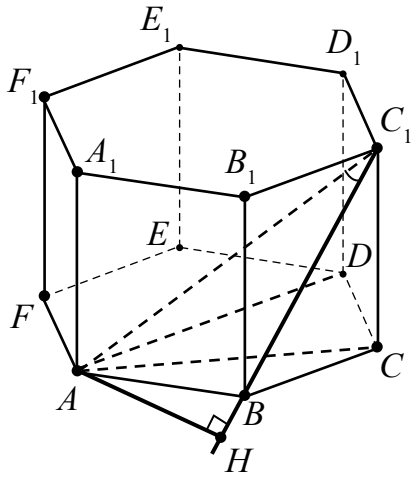

Рис. 4

Пример 5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

Решение. В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$ (рис. 4). В прямоугольном треугольнике *ACD,* где $\angle ACD = 90°$, $AD = 2$, находим $AC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника ACC_1 имеем $AC_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. В треугольнике ABC_1, используя теорему косинусов, получаем

$$\cos\varphi = \frac{2^2 + (\sqrt{2})^2 - 1^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8},$$

где $\angle AC_1B = \varphi$. Далее находим $\sin\varphi = \frac{\sqrt{14}}{8}$ и из треугольника AC_1H высоту $AH = AC_1\sin\varphi = 2\cdot\frac{\sqrt{14}}{8} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

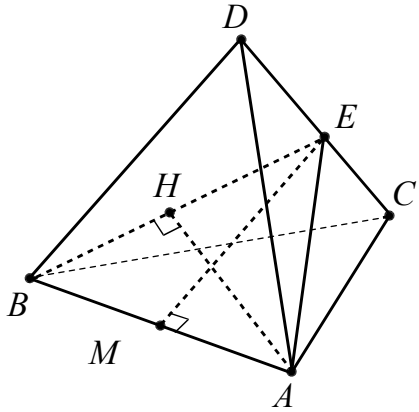

Рис. 5

Пример 6. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.

Решение. Так как все ребра $ABCD$ – равные правильные треугольники, то медианы BE и AE треугольников BDC и ADC (рис. 5) равны и $BE = AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим равнобедренный треугольник BEA и его высоты EM и AH. Выражая площадь треугольника BEA двумя способами

$$S_{BEA} = \frac{1}{2}\cdot AH \cdot BE = \frac{1}{2}\cdot EM \cdot AB,$$

получаем равенство $AH \cdot BE = EM \cdot AB$.

Так как $EM=\sqrt{BE^2-BM^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то находим $AH=\frac{EM\cdot AB}{BE}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

В некоторых задачах удобно использовать плоскость, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Пример 7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки D до прямой A_1C.

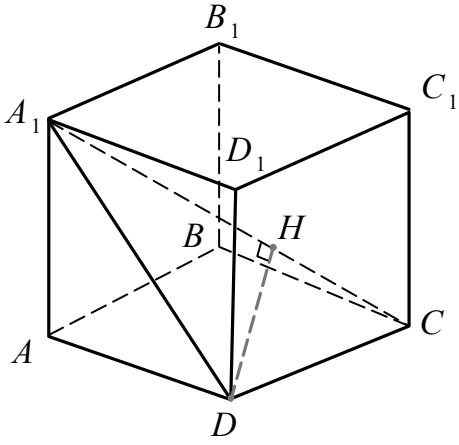

Рис. 6

Решение. Рассмотрим треугольник DA_1C, найдем его высоту DH (рис. 6). В кубе $DC\perp ADD_1$, значит треугольник DA_1C прямоугольный, $DC=1$, $A_1D=\sqrt{2}$ и $A_1C=\sqrt{3}$.

Тогда $DH=\frac{DC\cdot A_1D}{A_1C}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Значит, $\rho(D;A_1C)=DH=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Метод параллельных прямых

Данный метод основан на использовании следующего утверждения:

- *расстояние от точки M до прямой a равно расстоянию до прямой a от произвольной точки P, лежащей на прямой b, проходящей через точку M и параллельной прямой a.*

Этот метод удобен в применении, когда искомый перпендикуляр выходит за пределы многогранника. В этом случае его можно заменить перпендикуляром, расположенным внутри многогранника, либо перпендикуляром, длина отрезка которого известна.

Решим указанным методом пример 5.

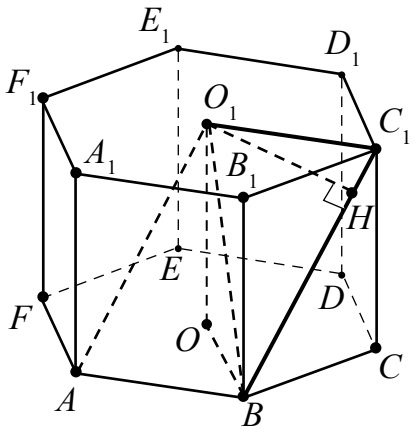

Рис. 7

Решение. В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$ (рис. 7). Пусть O и O_1 – центры нижнего и верхнего оснований соответственно. Так как $AB\parallel O_1C_1$ и $AB=O_1C_1$, то ABC_1O_1 – параллелограмм. Отсюда $AO_1\parallel BC_1$, поэтому расстояние $\rho(A;BC_1)=\rho(O_1;BC_1)$. Из прямоугольного треугольника BOO_1 находим $BO_1=\sqrt{2}$. В треугольнике BO_1C_1, используя теорему косинусов, получаем

$$\cos\varphi=\frac{1^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4},\text{ где }\varphi=\angle O_1C_1B.$$

Находим $\sin\varphi=\frac{\sqrt{14}}{4}$ и в треугольнике O_1C_1H высоту

$$O_1H=O_1C_1\sin\varphi=1\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru