

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
Глава 1. Звук	15
1.1. Распространение звука в газах	15
1.1.1. Приближение сплошной среды	16
1.1.2. Уравнение непрерывности	17
1.1.3. Уравнение Эйлера	18
1.1.4. Уравнение адиабатичности течения и уравнения газовой динамики	19
1.1.5. Волновое уравнение	22
1.1.6. Законы сохранения импульса и энергии в газовой динамике	28
1.1.7. Энергия и импульс звуковых волн	32
1.1.8. Лагранжева формулировка законов сохранения для звуковых волн	35
1.1.9. Лагранжиан уравнений гидродинамики для потенциальных течений	38
1.1.10. Звуковые и энтропийные волны	40
1.1.11. О математике звуковых волн	42
1.1.12. Влияние диссипации на распространение звука	48
1.2. Волны на поверхности воды	50
1.2.1. Формулировка проблемы	50
1.2.2. Законы сохранения массы, импульса и энергии для волн на воде	53
1.2.3. Теория мелкой воды	57
1.2.4. Двухслойная жидкость	59
1.3. Динамика бозе-эйнштейновского конденсата	65
1.3.1. Однокомпонентный конденсат	65
1.3.2. Лагранжева и гамильтонова формулировка уравнения Гросса–Питаевского	67
1.3.3. Двухкомпонентный конденсат: основные уравнения	71
1.4. Заключение	74
Глава 2. Нелинейность	75
2.1. Уравнение Хопфа	75
2.1.1. «Пылевидная материя»	75
2.1.2. Общее решение уравнения Хопфа и его свойства	76
2.2. Задача об истечении газа в пустоту и волна разрежения	81
2.3. Простая волна	87
2.4. Задача о поршне	90
2.5. Уравнение Хопфа в теории возмущений	94
2.6. Инварианты Римана для системы двух уравнений первого порядка	99
2.6.1. Уравнения газовой динамики в диагональной римановой форме	99
2.6.2. Общая система двух уравнений первого порядка	102
2.7. Обтекание газом угла: течение Прандтля–Майера	105
2.8. Метод годографа для уравнений газовой динамики	113

2.9. Задача о расширении газового слоя	122
2.10. Расширение газового облака в пустоту	128
2.11. Эволюция импульса плотности в одноатомном газе	134
2.11.1. Монотонное начальное возвышение плотности	135
2.11.2. Локализованные начальные возвышения плотности	137
2.12. Эволюция облака бозе-эйнштейновского конденсата, расширяющегося в вакуум	142
2.13. Метод Римана	148
2.14. Эволюция импульса плотности в бозе-эйнштейновском конденсате	157
2.14.1. Монотонный начальный импульс плотности	157
2.14.2. Локализованный начальный импульс плотности	158
2.15. Релятивистская гидродинамика	163
2.15.1. Основные уравнения	164
2.15.2. Скорость звука, римановы инварианты, простые волны	166
2.15.3. Адиабатическое течение	170
2.15.4. Преобразование годографа и функция Римана в ультрарелятивистской гидродинамике	173
2.15.5. Задача Ландау–Халатникова	176
2.16. Бездисперсионные волны в двухкомпонентном конденсате	186
2.16.1. Простые волны	186
2.16.2. Динамика волн поляризации	189
2.17. Одномерное расширение бозе-конденсата, выпущенного из ловушки	195
2.18. Неавтономные решения	198
2.18.1. Неавтономное расширение облака конденсата	198
2.18.2. Волновой прибой вблизи наклонного берега	201
2.19. Заключение	204
Глава 3. Нелинейность и вязкость: ударные волны	205
3.1. Возможны ли нелинейные волны со стационарным профилем?	205
3.2. Адиабата Рэнкина–Гюгонно	208
3.2.1. Теория Рэнкина	209
3.2.2. Условия на разрыве Гюгонно	212
3.2.3. Теорема Жуге–Цемплена	218
3.2.4. Эволюционность ударной волны	219
3.3. Задача о поршне	223
3.4. Эволюция скачка в распределении плотности и контактные разрывы	228
3.5. Распад начальных разрывов	230
3.5.1. Случай политропных газов	231
3.5.2. Общий случай баротропных газов	234
3.6. Косая ударная волна и течение мимо вогнутого угла	241
3.7. Отражение звука от ударной волны	245
3.8. Устойчивость ударных волн	247
3.9. Эволюция нелинейного импульса в малоамплитудном пределе	255
3.10. Уравнение Бюргерса	260
3.10.1. Вывод уравнения Бюргерса	261
3.10.2. Формирование ударной волны	263

3.10.3. Условие формирования ударной волны в теории Бюргерса	267
3.10.4. Устойчивость ударной волны Бюргерса	268
3.11. Заключение.	271
Глава 4. Дисперсия	272
4.1. Эффекты дисперсии для волн на воде	273
4.1.1. Закон дисперсии	273
4.1.2. Линейное уравнение КдФ	276
4.2. Модуляция линейных волн	279
4.3. Перенос энергии волнами и групповая скорость.	283
4.3.1. Перенос энергии линейными волнами на воде	283
4.3.2. Перенос энергии: вариационный подход	285
4.4. Параболическое уравнение	287
4.5. Метод стационарной фазы.	290
4.6. Корабельные волны Кельвина	293
4.7. «Корабельные волны» в бозе-эйнштейновском конденсате	298
4.8. Оптико-механическая аналогия	302
4.9. Движение волновых пакетов вдоль крупномасштабных волн	306
4.9.1. Движение пакета вдоль простой волны	307
4.9.2. Распространение пакета по волне разрежения	309
4.9.3. Движение пакета по локализованному импульсу	312
4.9.4. Движение пакета по волне, описываемой общим решением	314
4.10. Лучевая теория и сохранение энергии	317
4.11. Волновое действие	319
4.11.1. Сохранение волнового действия	319
4.11.2. Волновое действие для линейного уравнения КдФ	320
4.12. Заключение.	321
Глава 5. Нелинейность и дисперсия: солитоны	322
5.1. Уравнение Кортевега–де Фриза	323
5.1.1. Вывод уравнения Кортевега–де Фриза для волн на мелкой воде	324
5.1.2. Кноидальная волна и солитон	329
5.1.3. Устойчивость солитона КдФ	333
5.2. Нелинейное уравнение Шрёдингера.	336
5.2.1. Периодическая волна и темный солитон для дефокусирующего НУШ	337
5.2.2. Энергия и импульс темного солитона	340
5.2.3. Мелкие солитоны	343
5.2.4. Фокусирующее нелинейное уравнение Шрёдингера	345
5.3. Солитоны обобщенного НУШ	348
5.3.1. Темные солитоны обобщенного НУШ	348
5.3.2. Светлые солитоны обобщенного НУШ	349
5.3.3. Критерий Вахитова–Колоколова для устойчивости светлых солитонов	351
5.4. «Косые» солитоны	355
5.5. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили	358
5.6. Изгибная неустойчивость солитона КдФ	360

5.7. Изгибная неустойчивость темного солитона НУШ	364
5.7.1. Уравнения для возмущений солитонного решения	364
5.7.2. Интервал волновых чисел неустойчивых мод	366
5.7.3. Инкремент роста неустойчивых мод при $p \ll p_c$	368
5.7.4. Интерполяционная формула для инкремента неустойчивых мод	370
5.8. Конвективная неустойчивость косых солитонов	371
5.9. Солитон как частица	374
5.9.1. Теорема Эренфеста	375
5.9.2. Движение яркого солитона НУШ под действием потенциала	376
5.9.3. Внутренняя динамика солитона	379
5.10. Темный солитон как квазичастица	382
5.10.1. Темный солитон для уравнения Гросса–Питаевского	382
5.10.2. Динамика темных солитонов на переменном фоне	384
5.11. Уравнение Бенджамена–Оно	392
5.12. Условия для формирования солитона из начального импульса	395
5.13. Заключение	397
Глава 6. Нелинейные волновые уравнения в физике	399
6.1. Волны на мелкой воде	399
6.1.1. Решение Рэлея	399
6.1.2. Уравнения Серра	402
6.2. Уравнения для волн в двухкомпонентном конденсате с учетом дисперсии	405
6.2.1. Основные уравнения и линейные волны	406
6.2.2. Волны плотности: уравнение КдФ	408
6.2.3. Волны поляризации: уравнение КдФ	410
6.2.4. Волны поляризации: уравнения мКдФ и Гарднера	410
6.3. Волны поляризации при близких значениях нелинейных постоянных	412
6.3.1. Приближение нелинейного уравнения Шрёдингера	415
6.3.2. Приближение Каупа–Буссинеска	416
6.3.3. Периодические и солитонные решения для волн поляризации	416
6.4. Нелинейное уравнение Шрёдингера	419
6.4.1. Эволюция электромагнитного импульса в нелинейной среде	419
6.4.2. Волны в цепочке связанных маятников	422
6.4.3. Распространение пакета волн на мелкой воде	430
6.4.4. Волны на глубокой воде	433
6.5. Нелинейное уравнение Шрёдингера с производной	436
6.5.1. Бездисперсионный предел, характеристические скорости и римановы инварианты	438
6.5.2. Модуляционная неустойчивость плоских волн	439
6.5.3. Нелинейные волны с малой амплитудой	440
6.6. Заключение	442
Глава 7. Теория модуляций Уизема	443
7.1. Общая идея теории Уизема	443
7.2. Модуляция линейной волны в теории линейного уравнения Клейна–Гордона	446
7.3. Модуляция волн в теории нелинейного уравнения Клейна–Гордона	449

7.4. Вариационный подход к теории модуляций	455
7.5. Усреднение лагранжиана для уравнения КдФ	457
7.6. Дисперсионная ударная волна и теория Уизема	460
7.7. Теория модуляций для уравнения Бенджамена–Оно	463
7.7.1. Периодическое решение	463
7.7.2. Модуляции периодических решений уравнения Бенджамена–Оно	465
7.7.3. Задача о «разрушении плотины» в теории уравнения БО	469
7.7.4. Уравнение Бенджамена–Оно–Бюргерса	471
7.8. Заключение	476
Глава 8. Теория модуляций для уравнения Кортевега–де Фриза	477
8.1. Модуляционные уравнения Уизема для уравнения Кортевега–де Фриза	477
8.2. Подход Гуревича–Питаевского к теории дисперсионных ударных волн	484
8.3. Обобщенный метод годографа	486
8.4. Эволюция начального разрыва	489
8.5. Опрокидывание волны с параболическим начальным профилем	493
8.6. Опрокидывание волны с кубическим начальным профилем	496
8.7. Автомодельное опрокидывание степенных профилей	502
8.7.1. Опрокидывание положительного импульса	504
8.7.2. Опрокидывание отрицательного импульса	508
8.8. Движение краев дисперсионной ударной волны	511
8.8.1. Положительный импульс	512
8.8.2. Число солитонов, образующихся из положительного импульса	515
8.8.3. Отрицательный импульс	516
8.9. Отрицательный импульс: солитонный край	519
8.10. «Квазипростая» дисперсионная ударная волна (отрицательный импульс)	522
8.10.1. Формулировка задачи	522
8.10.2. Решение при $t < t_m$	526
8.10.3. Решение при $t > t_m$	528
8.10.4. Движение краев дисперсионной ударной волны	529
8.11. Теория Уизема для уравнения КдФ с возмущением	532
8.12. Стационарные ударные волны в системах с диссипацией	533
8.13. Генерация дисперсионных ударных волн течением мимо препятствия	537
8.13.1. Течение в бездисперсионном (гидравлическом) приближении	537
8.13.2. Транскритическое течение в приближении КдФ	541
8.14. Заключение	546
Глава 9. Метод конечнозонного интегрирования и теория Уизема	547
9.1. Полная интегрируемость уравнения КдФ	547
9.1.1. Уравнение Ламе	547
9.1.2. Зонная структура уравнения Ламе	549
9.1.3. Уравнение КдФ как условие совместности двух линейных уравнений	553
9.1.4. Иерархия КдФ и законы сохранения	554
9.1.5. Уравнение КдФ как гамильтонова система	559
9.1.6. Периодическое решение уравнения КдФ	563
9.1.7. Периодические решения иерархии КдФ	566

9.1.8. Другой вывод уравнений Уизема	568
9.2. Схема Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегюра	571
9.2.1. Уравнение Каупа–Буссинеска как условие совместности линейных систем	571
9.2.2. Общая формулировка матричной схемы	571
9.2.3. Нелинейные уравнения в схеме Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегюра	573
9.3. Функция Бейкера–Ахиезера и уравнения Дубровина	577
9.3.1. Скалярная спектральная задача	577
9.3.2. Матричная спектральная задача	580
9.3.3. Связь матричной и скалярной спектральных задач	581
9.4. Уравнения Уизема в схеме АKNС	582
9.4.1. Невозмущенные уравнения	582
9.4.2. Возмущенные уравнения	584
9.5. Асимптотическая формула Карпмана	590
9.6. Заключение	591
Глава 10. Теория модуляций для нелинейного уравнения Шрёдингера	593
10.1. Задача Захарова–Шабата	593
10.2. Периодические решения	594
10.3. Уравнения Уизема	600
10.4. Эволюция начальных разрывов	602
10.5. Задача о поршне	608
10.6. Задача о равноускоренном поршне	610
10.7. Квазипростые дисперсионные ударные волны	615
10.8. Асимптотические формулы для числа солитонов	619
10.9. Течение конденсата мимо препятствия	624
10.9.1. Широкое препятствие	624
10.9.2. Узкое препятствие	631
10.9.3. Течение конденсата мимо препятствия при учете диссипации	636
10.10. Заключение	643
Глава 11. Теория модуляций для уравнения Гарднера	644
11.1. Периодические решения	645
11.2. Спектральная параметризация периодических решений	650
11.3. Основные структуры	654
11.3.1. Кноидальные боры	654
11.3.2. Волны разрежения	655
11.3.3. Солиборы ($\alpha > 0$)	655
11.3.4. Тригонометрические боры ($\alpha < 0$)	656
11.4. Классификация структур при эволюции разрыва	659
11.4.1. Классификация структур при $\alpha > 0$	660
11.4.2. Классификация структур при $\alpha < 0$	662
11.5. Заключение	662
Глава 12. Теория модуляций для нелинейного уравнения Шрёдингера с производной	664
12.1. Основные определения	664

12.2. Периодические решения	666
12.3. Уравнения Уизема	671
12.4. Элементарные волновые структуры	673
12.4.1. Волны разрежения	673
12.4.2. Кноидальные дисперсионные ударные волны	676
12.4.3. Тригонометрические дисперсионные ударные волны	679
12.4.4. Составные ударные волны	680
12.5. Классификация волновых структур	682
12.6. Заключение.	686
Глава 13. Теория модуляций для уравнения Ландау–Лифшица	687
13.1. Основные определения и закон дисперсии линейных волн	687
13.2. Периодические решения	688
13.3. Уравнения Уизема	695
13.4. Элементарные структуры	697
13.4.1. Плато и волны разрежения	698
13.4.2. Кноидальные дисперсионные ударные волны	703
13.4.3. Контактные дисперсионные ударные волны	708
13.5. Классификация волновых структур	715
13.5.1. Сектор НУШ-типа	715
13.5.2. Сектор КБ-типа	717
13.5.3. Волновые структуры, соответствующие переходам между секторами монотонности	718
13.6. Заключение.	720
Глава 14. Общая теория дисперсионных ударных волн	721
14.1. Квазипростые дисперсионные ударные волны и условие Гуревича– Мещеркина	722
14.2. Движение краев дисперсионной ударной волны	724
14.2.1. Уравнение для малоамплитудного края	724
14.2.2. Движение солитонного края	727
14.3. Эволюция начального разрыва	728
14.3.1. Обобщенное уравнение КдФ	730
14.3.2. Уравнение Серра	731
14.3.3. Обобщенное уравнение Гросса–Питаевского	736
14.4. Распространение краев квазипростой дисперсионной ударной волны.	739
14.4.1. Обобщенное уравнение КдФ: положительный импульс	739
14.4.2. Обобщенное уравнение КдФ: отрицательный импульс	741
14.4.3. Уравнения Серра: положительный импульс	743
14.4.4. Уравнения Серра: отрицательный импульс	746
14.4.5. Обобщенное уравнение Гросса–Питаевского: положительный импульс	749
14.4.6. Обобщенное уравнение Гросса–Питаевского: отрицательный импульс	750
14.5. Число солитонов, порождаемых интенсивным импульсом	751
14.5.1. Общая теория	751
14.5.2. Обобщенное уравнение КдФ	753

14.6. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана и правило квантования Бора–Зоммерфельда	755
14.6.1. Течение в виде простой волны	757
14.6.2. Общее течение гладкой части импульса	760
14.7. Скорость асимптотических солитонов	761
14.8. Распределение солитонов по скоростям: простая волна.	763
14.8.1. Обобщенное уравнение КдФ	763
14.8.2. Обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера: простая волна	763
14.9. Распределение солитонов по скоростям: произвольный начальный импульс	764
14.9.1. Нелинейность вида $f(\rho) = \rho$	764
14.9.2. Не керровская нелинейность	765
14.10. Заключение.	768
Приложение А. Формулы изтеории эллиптических функций	769
Список литературы	777

Предисловие

Эта книга задумывалась как введение в теорию дисперсионных волн — нового раздела нелинейной физики, получившего значительное развитие в последние годы. Однако при работе над книгой быстро выяснилось, что сколько-нибудь детальное изложение этой теории требует также достаточно подробного рассказа о вязких ударных волнах, не говоря уж об основных эффектах нелинейности и дисперсии, влияющих на распространение волновых импульсов. В результате книга превратилась в общий курс теории нелинейных волн. Тем не менее отбор материала отличает эту книгу от других книг со сходными названиями — в частности, почти половина ее посвящена в основном теории дисперсионных ударных волн, не излагавшейся сколько-нибудь подробно в других монографиях.

В основу книги были положены отчасти лекции разного уровня сложности, прочитанные автором для студентов ВШЭ и МФТИ, в Институте спектроскопии РАН, а также в Парижском университете-ХІ, Национальном университете Тайваня и других местах. Поэтому в первых главах дается довольно много элементарного материала по теории линейных волн, по методам газовой динамики и по элементарной теории солитонов. Везде используются математические методы, не выходящие за рамки стандартных курсов математики для физических факультетов. Более того, книга написана физиком и для физиков, и поэтому нередко вместо доказательств используются наводящие соображения качественного характера, а их справедливость подтверждается конкретными примерами. После некоторых колебаний я исключил упражнения — книга большая и насыщена математикой, так что читатель достаточно поупражняется, внимательно изучая изложенный материал.

Работая в области теории дисперсионных ударных волн, я общался, естественно, со многими другими физиками и математиками, специализирующимися в нелинейной физике, и это во многом повлияло на содержащийся в книге материал. Прежде всего хотел бы сказать, что мой интерес к этой области науки возник в результате изучения классической статьи А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского (1973 г.), и общение с этими выдающимися учеными было для меня чрезвычайно поучительным, что способствовало прояснению некоторых важных вопросов теории дисперсионных ударных волн. Научное сообщество российских физиков, работающих в области нелинейной науки, во многом сохранило свое единство благодаря огромной организующей роли В.Е. Захарова и Е.А. Кузнецова, которые с примечательной стабильностью проводят ежегодные Научные сессии Совета РАН по нелинейной динамике и регулярные международные конференции «Солитоны, коллапсы и турбулентность», где многие рассматриваемые в книге задачи впервые обсуждались, и очень часто замечания коллег и задаваемые ими вопросы были для

меня полезны. Сотрудничество с многочисленными коллегами, студентами и аспирантами простиралось от простых замечаний до полноценного соавторства; невозможно перечислить всех, кто внес таким образом свой вклад в эту книгу. Но я не могу не выделить двух коллег, Г.А. Эля и Н. Павлоффа (N. Pavloff), совместная работа с которыми длилась долгие годы — без их вклада книга была бы совсем другой. Наконец, я благодарен своей жене Валентине, постоянная поддержка которой этого долголетнего проекта во многом способствовала его завершению.

*А.М. Камчатнов
август 2022 г.*

Глава 1

ЗВУК

Главная цель этой книги — развить теорию распространения волн в таких средах, в которых скорость распространения волны зависит как от ее амплитуды (нелинейность), так и от длины волны (дисперсия среды). Задача эта очень трудная, так что естественно будет начать с более простых частных случаев, когда хотя бы одним из этих эффектов можно пренебречь. А еще лучше начать с того, чтобы освоиться с простейшим случаем, когда ни нелинейность, ни дисперсия не играют никакой роли в распространении импульса — даже этот простейший случай весьма поучителен, а его тщательное изучение создаст необходимую основу для перехода к более сложным ситуациям. Кроме того, этот случай и практически важен, так как охватывает огромную область *линейной акустики*, т.е. теории распространения звука в воздухе, физические свойства которого для рассматриваемых процессов характеризуются единственным основным параметром — постоянной скоростью звука c_0 .

Следует сказать, что хотя изучение таких линейных волн без дисперсии началось в акустике, при дальнейшем развитии науки аналогичные ситуации стали довольно часто встречаться и в других областях физики, причем в очень фундаментальных ее областях. Достаточно вспомнить, например, что электромагнитные волны в вакууме описываются линейными уравнениями Максвелла и распространяются с постоянной скоростью света, не зависящей от длины волны. При распространении волн разнообразной природы в различных средах также часто бывает, что амплитуда волны недостаточно велика, чтобы проявились нелинейные эффекты, так что в главном приближении ими можно пренебречь. Дисперсионные же эффекты определяются какими-либо характерными размерами (или частотами), присущими рассматриваемой среде, так что если длина волны много больше такого характерного размера (или частота существенно отличается от характерных внутренних частот в среде), то в главном приближении дисперсионными эффектами также можно пренебречь и мы опять приходим к задаче о распространении звука.

Осваивать любую науку лучше всего на разборе конкретных задач. Поэтому мы начнем наш курс с описания нескольких физических систем, в которых понятие звука или его аналога играет фундаментальную роль.

1.1. Распространение звука в газах

О том, что слышимый нами звук представляет собой колебания плотности воздуха, распространяющиеся со скоростью $c_0 \approx 330$ м/с, мы прекрасно знаем из элементарной физики. Впервые скорость звука вычислил еще Ньютон

в 1687 г. Однако он сделал при этом весьма нетривиальную ошибку, на исправление которой ушло более ста лет — лишь Лаплас в 1816 г. понял, в чем была ошибка Ньютона, и дал правильную формулу для скорости звука. Тем не менее исходные физические представления у Ньютона были верные: аналогично грузу на пружине воздух обладает *массой* и *упругостью*, так что движение воздуха можно рассчитать на основе ньютоновской механики. Это кажущееся сейчас таким тривиальным замечание вряд ли было таким же очевидным во времена Ньютона. Мы, однако, не будем вдаваться в эти интересные исторические подробности и обратимся к более современному подходу, сформулированному Эйлером.

1.1.1. Приближение сплошной среды. Метод Эйлера представляет собой образец построения физической теории. Прежде всего, в ней определяются физические параметры, характеризующие систему. Поскольку нас интересует движение газа на масштабах, много больших, чем длина свободного пробега молекул, и на периодах времени, много больших, чем среднее время между их столкновениями, то молекулярным строением газа можно пренебречь. Мы увидим потом, что в теории ударных волн эти предположения не выполняются и теория потребует модификации; но эта модификация будет проведена таким образом, что рассматриваемое нами *приближение сплошной среды* (или *континуальное приближение*) сохранит свое значение как составная часть этой более общей теории.

В континуальном приближении, рассматривающем газ как непрерывную среду, его массовые свойства описываются плотностью ρ , т.е. массой на единицу объема. При этом мы предполагаем здесь, что плотность существенно изменяется лишь на масштабах, много больших, чем длина свободного пробега, т.е. ее можно считать непрерывной функцией координаты \mathbf{r} и времени t : $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. Этим мы вводим одну из переменных, описывающих непрерывную среду, а именно переменную, характеризующую массовые свойства среды. Переменная $\rho(\mathbf{r}, t)$ является аналогом массы в ньютоновской механике материальных точек.

При распространении звука газ движется, т.е. маленькая частичка газа, находящаяся в точке \mathbf{r} в момент t имеет скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (в компонентах $\mathbf{u} = (u, v, w)$), что определяет еще одну, на этот раз векторную, переменную, описывающую кинематику среды. Очевидно, что переменная $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ является аналогом скорости материальной точки. Для формулировки аналога закона движения Ньютона необходимо еще определить переменную, являющуюся аналогом ускорения материальной точки. Для этого нам надо учесть, что скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ относится к частичке газа, находящейся в момент t в точке \mathbf{r} ; через малый промежуток времени Δt скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ будет относиться уже к другой частичке газа, пришедшей в точку \mathbf{r} в момент $t + \Delta t$. Однако в уравнение Ньютона входит ускорение, относящееся к фиксированной частице, и его можно вычислить следующим образом. За время Δt интересующая нас частица перемещается в точку с координатами, равными в первом при-

ближении $\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \Delta t$. Поэтому изменение ее скорости равно

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \left[\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right] \Delta t.$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, очевидно является ускорением выбранной нами частицы газа. Обозначается оно как

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.1)$$

Первое слагаемое в правой части является производной по времени от скорости в точке \mathbf{r} , а второе слагаемое учитывает перенос частицы со скоростью \mathbf{u} . Выражение (1.1) является результатом применения оператора *полной или субстанциональной производной*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \quad (1.2)$$

к скорости \mathbf{u} и дает скорость изменения скорости, связанной с частицей, т.е. с «субстанцией». Ясно, что наше рассуждение можно применить не только к скорости частицы, но и к любой другой ее характеристике. Например, скорость изменения плотности частицы газа равна

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho, \quad (1.3)$$

и эту формулу можно интерпретировать следующим образом: если распределение плотности описывается функцией $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, то ее производная по времени вдоль траектории жидкой частицы $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}(t)$, равна (1.3). Точно так же получается скорость изменения температуры T или энтропии s на единицу массы вдоль траекторий жидких частиц.

1.1.2. Уравнение непрерывности. Последняя оговорка насчет энтропии на единицу массы подразумевает, что масса выделенной частицы газа при ее движении не меняется, и это накладывает определенное условие на изменение плотности при течении газа, которое называется *уравнением непрерывности*. Хотя масса частицы не меняется, плотность газа в ней может изменяться вследствие изменения объема. Это отличает механику непрерывной среды от механики материальных точек: в последней масса материальных точек обычно считается фиксированной, тогда как плотность (массовая характеристика непрерывной среды) может изменяться, а условие сохранения массы выделенной частички среды при ее движении должно учитываться отдельным уравнением.

Изменение плотности легко подсчитать следующим образом. Пусть выделенная частица газа ограничена деформирующейся со временем (вследствие течения газа) поверхностью S . Выберем на этой поверхности элемент dS и введем вектор $d\mathbf{S}$, равный по величине площади dS и направленный по внешней нормали \mathbf{n} к поверхности: $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$. Тогда скалярное произведение $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ скорости жидкости \mathbf{u} в области dS на вектор $d\mathbf{S}$ дает объем, «заметаемый» элементом dS за единицу времени, а интеграл от $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ по всей поверхности S даст нам как раз скорость изменения объема V , заключенного

внутри поверхности S . С помощью теоремы Гаусса для малого объема V получим

$$\frac{dV}{dt} = \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV \approx V(\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (1.4)$$

Обозначим через m сохраняющуюся массу выделенной частицы, так что $\rho = m/V$. Тогда плотность газа в выделенной частице изменяется со скоростью

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m}{V} = -\frac{m}{V^2} \frac{dV}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (1.5)$$

Объединяя уравнения (1.3) и (1.5), получаем с использованием элементарных формул векторного анализа уравнение непрерывности в привычном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.6)$$

Это уравнение допускает также и непосредственную наглядную интерпретацию. Для ее пояснения выделим объем V , теперь не связанный с жидкой частицей, а фиксированный в пространстве, так что жидкость может втекать в него и вытекать из него через граничную поверхность S . Скорость изменения содержащейся в V массы равна, с одной стороны,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV,$$

с другой стороны, она может быть подсчитана как интеграл от потока массы $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$ сквозь поверхность S :

$$-\int_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV$$

(здесь знак *минус* отражает то, что вектор $d\mathbf{S}$ направлен по *внешней* нормали к S). Поскольку объем V неподвижен, то имеем равенство

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV,$$

и вследствие произвольности выбора объема V мы сразу приходим к уравнению непрерывности (1.6). Это уравнение следует из определения величин ρ и \mathbf{u} , а также из предположения, что они являются непрерывными функциями координаты \mathbf{r} , причем в системе нет источников или стоков газа.

1.1.3. Уравнение Эйлера. Перейдем теперь к выводу следствия из уравнения динамики Ньютона. Здесь нам будет удобно иметь дело с частицей непрерывной среды в виде маленького кубика, имеющего в данный момент времени t ребра единичной длины, параллельные осям координат. Соответственно кубик имеет единичный объем и его масса равна ρ , так что произведение массы на ускорение, см. (1.1), равно

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right). \quad (1.7)$$

Эта величина должна равняться силе, действующей в момент t на кубик.

Если газ находится в поле внешних сил, то на него действует сила $\rho \mathbf{f}$, где \mathbf{f} есть сила, приходящаяся на единицу массы среды. Кроме того, частица подвергается действию соседних частиц среды. В случае жидкости или газа часть этой силы характеризуется давлением p , т.е. нормальной силой, действующей на единицу поверхности. Согласно закону Торричелли эта сила не зависит от ориентации площадки, на которую она действует, т.е. давление является скалярной функцией координаты и времени: $p = p(\mathbf{r}, t)$. Сила, действующая на наш кубик, возникает из-за того, что давления на противоположные грани кубика слегка различны, так что их разности не равны нулю. Поэтому в направлении оси x на кубик, левая грань которого находится в точке x , действует сила $-[p(x+1) - p(x)] \approx -\frac{\partial p}{\partial x}$, так как мы считаем, что единичная длина ребра маленького кубика много меньше тех расстояний, на которых существенно меняются характеристики газа; в частности, изменение давления можно учесть лишь в виде первого члена разложения в ряд Тейлора. Обобщение на трехмерный случай очевидно: сила, действующая на единичный объем и обусловленная давлением, равна $\mathbf{f}_{\text{давление}} = -\nabla p$. Приравнявая (1.7) сумме объемной силы и силы, обусловленной градиентом давления, мы приходим к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.8)$$

Как мы видим, при его формулировке мы ввели еще одну характеристику непрерывной среды — давление $p(\mathbf{r}, t)$, описывающую *упругость* среды.

Ясно, что такое описание сил годится лишь до тех пор, пока справедлив закон Торричелли, найденный на эксперименте в статическом случае покоящихся сред. Если же в среде есть течение, то, как мы знаем из опыта, на его характер большое влияние может оказывать *вязкость* среды. Поэтому необходимо сформулировать условия, при которых вязкостью можно пренебречь и использовать для описания динамики среды уравнение (1.8). Вязкость среды обычно характеризуется *коэффициентом вязкости* η , определяемым из эксперимента. Тогда можно показать, что если параметры течения такие, что безразмерное *число Рейнольдса*

$$\text{Re} = \frac{\rho u d}{\eta}, \quad (1.9)$$

где u — характерная скорость течения и d — характерный размер, на котором существенно изменяется u , много больше единицы, $\text{Re} \gg 1$, то вязкими силами можно пренебречь.

1.1.4. Уравнение адиабатичности течения и уравнения газовой динамики. В уравнениях (1.6) и (1.8) неизвестными являются плотность ρ , давление p и три компоненты скорости \mathbf{u} , т.е. пять функций, а уравнений, если записать (1.8) в покомпонентном виде, имеется всего четыре. Очевидно, что для описания течения газа нам не хватает одного уравнения, и причина этого тоже ясна: пока что не учтено, что при сжатии газа в процессе течения

давление тоже изменяется, а в уравнениях (1.6) и (1.8) эта зависимость никак не отражается.

Однако следует учесть, что при сжатии газа изменяется и его температура, вследствие чего тепло может перетекать из более нагретых областей в менее нагретые благодаря теплопроводности газа. Если теплопроводность мала, то этим относительно медленным процессом можно пренебречь и соответствующее условие можно записать в виде, аналогичном условию $Re \gg 1$, т.е.

$$Re = \frac{ud}{\chi} \gg 1, \quad (1.10)$$

где χ — коэффициент температуропроводности, а безразмерный параметр Re называется *числом Пекле*. Таким образом, когда числа Рейнольдса и Пекле много больше единицы, можно одновременно пренебречь как вязкостью, так и теплопроводностью.

Раз диссипативные процессы пренебрежимо малы, то энтропия каждой жидкой частицы сохраняется и это условие можно записать как закон сохранения энтропии s на единицу массы. С учетом смысла субстанциональной производной (1.2) мы записываем это уравнение в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)s = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение непрерывности (1.6), уравнение Эйлера (1.8) и уравнение адиабатичности (1.11) составляют полную систему уравнений газовой динамики в пренебрежении диссипативными процессами, причем предполагается, что нам известно термодинамическое соотношение, связывающее энтропию с давлением и плотностью: $s = s(p, \rho)$.

Обратимся к самому простому случаю, когда газ можно рассматривать как идеальный не только в механическом и кинетическом смысле (отсутствие вязкости и теплопроводности), но и в термодинамическом, т.е. в нем отсутствует взаимодействие между молекулами, а внутренняя энергия газа сводится к средней кинетической энергии молекул. Как известно из элементарной физики, в этом случае давление связано с температурой и объемом одного моля вещества *уравнением состояния* $pV = RT$, где R — газовая постоянная (если температура измеряется в градусах, то $R = N_A k_B$, где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро, представляющее собой число молекул в одном моле, k_B — постоянная Больцмана, переводящая энергетические единицы в градусы; в дальнейшем мы обычно будем измерять температуру в энергетических единицах, и постоянная Больцмана будет опускаться). С учетом этого уравнения состояния выражение для энтропии получается из элементарной термодинамики, и его вывод можно найти в любом учебнике общей физики, так что энтропия одного грамма газа равна

$$s = c_v \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right), \quad (1.12)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкости c_p одного грамма газа при постоянном давлении к теплоемкости c_v одного грамма при постоянном объеме,

причем обе теплоемкости являются постоянными (такой газ называется *политропным*). Тогда давление равно

$$p = e^{s/c_v} \cdot \rho^\gamma, \quad (1.13)$$

и эта формула позволяет выразить s в уравнении адиабатичности через p и ρ , так что система уравнений газовой динамики для адиабатического течения политропного газа приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Наконец, если ввести переменную c^2 согласно определению

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (1.15)$$

то подстановка $p = c^2 \rho / \gamma$ преобразует систему (1.14) для адиабатического течения ($dp = c^2 d\rho$) в уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{c^2}{\rho} \nabla \rho &= \mathbf{f}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

для переменных ρ , \mathbf{u} , c^2 , и эта форма оказывается иногда более удобной.

Мы написали уравнения в общем виде, не предполагая, что течение обладает какой-либо симметрией. Но в аналитических исследованиях конкретных задач имеют дело, как правило, с частными случаями течений, обладающих большой симметрией, что очень упрощает исследование. Например, в случае *плоских волн* все переменные зависят только от одной пространственной координаты, в качестве которой можно выбрать ось x , скорость \mathbf{u} становится скаляром u ; не составляет труда выписать уравнения для переменных в такой волне. Для течений, обладающих цилиндрической или сферической симметрией, вектор \mathbf{u} направлен в радиальном направлении и очевидно, что $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \equiv u \partial / \partial r$. Несколько большего внимания требует дивергентный член в уравнении непрерывности. Здесь удобно исходить из физического смысла дивергенции как зависящего от координат изменения потока массы, приходящегося на единицу площади в двумерном или единицу объема в трехмерном случае. Беря в качестве элемента площади кольцо, а в качестве элемента объема сферический слой с радиусом r , получаем соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(2\pi r \cdot \rho u)}{2\pi r \Delta r} &\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u)}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{\rho u}{r}, \\ \frac{\Delta(4\pi r^2 \cdot \rho u)}{4\pi r^2 \Delta r} &\rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho u)}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r}. \end{aligned}$$

Если обозначить через ν размерность пространства, уравнения динамики (1.14) для соответствующих симметричных течений примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{(\nu - 1)\rho u}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = f(r), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0; \end{aligned} \quad (1.17)$$

аналогичным образом можно преобразовать систему (1.16).

Если мы имеем дело с такой задачей, что все частицы газа начинают движение из состояния с одинаковыми давлением p_0 и плотностью ρ_0 , то выражение (1.13) для давления можно представить в виде

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (1.18)$$

где одинаковый для всех частиц энтропийный множитель $\exp(s_0/c_v)$ выражен через эти фиксированные значения p_0 и ρ_0 . В этом случае уравнение адиабатичности для постоянной для всех частиц энтропии $s = s_0$ можно опустить, и уравнения газовой динамики сводятся к системам из только двух уравнений для плотности и скорости течения, а давление исключено с помощью формулы (1.18).

Ясно, что предположение об адиабатичности течения должно быть справедливым для достаточно малых периодов звуковых волн, когда теплопроводность не успевает «включиться». Если же мы рассматриваем очень медленные процессы, когда температура в интересующих нас объемах газа успевает выровняться вследствие теплопроводности, то зависимость давления от плотности сразу следует из уравнения состояния $pV = RT$; если учесть, что масса одного моля газа равна $N_A m$ и $\rho = N_A m/V$, то

$$p = \frac{\rho}{m} T, \quad (1.19)$$

где температура T считается постоянным параметром. Уравнения (1.18) и (1.19) дают нам два характерных простых примера зависимости давления от плотности, которыми мы пока и ограничимся.

Покажем, что полученные уравнения газовой динамики описывают распространение звука. Это позволит нам выяснить заодно и физический смысл переменной c в выражении (1.15).

1.1.5. Волновое уравнение. Обратимся теперь к основной теме этой главы — распространению звука. При написании уравнений газовой динамики в форме (1.16) мы уже ввели обозначение (1.15) для переменной c , которая, как мы вскоре убедимся, равна скорости звука при данных значениях давления и плотности. Выясним, при каких условиях можно пренебречь внешней силой \mathbf{f} в уравнении Эйлера.

Если газ неподвижен, то второе уравнение (1.16) сводится к статическому $c^2 \nabla \rho = \rho \mathbf{f}$. Например, если \mathbf{f} является силой тяжести, то вблизи поверхности Земли в системе координат с осью z , направленной вверх и обозначающей,

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru