# ОГЛАВЛЕНИЕ

# Предисловие

Эта книга задумывалась как введение в теорию дисперсионных волн — нового раздела нелинейной физики, получившего значительное развитие в последние годы. Однако при работе над книгой быстро выяснилось, что сколько-нибудь детальное изложение этой теории требует также достаточно подробного рассказа о вязких ударных волнах, не говоря уж об основных эффектах нелинейности и дисперсии, влияющих на распространение волновых импульсов. В результате книга превратилась в общий курс теории нелинейных волн. Тем не менее отбор материала отличает эту книгу от других книг со сходными названиями — в частности, почти половина ее посвящена в основном теории дисперсионных ударных волн, не излагавшейся сколько-нибудь подробно в других монографиях.

В основу книги были положены отчасти лекции разного уровня сложности, прочитанные автором для студентов ВШЭ и МФТИ, в Институте спектроскопии РАН, а также в Парижском университете-XI, Национальном университете Тайваня и других местах. Поэтому в первых главах дается довольно много элементарного материала по теории линейных волн, по методам газовой динамики и по элементарной теории солитонов. Везде используются математические методы, не выходящие за рамки стандартных курсов математики для физических факультетов. Более того, книга написана физиком и для физиков, и поэтому нередко вместо доказательств используются наводящие соображения качественного характера, а их справедливость подтверждается конкретными примерами. После некоторых колебаний я исключил упражнения — книга большая и насыщена математикой, так что читатель достаточно поупражняется, внимательно изучая изложенный материал.

Работая в области теории дисперсионных ударных волн, я общался, естественно, со многими другими физиками и математиками, специализирующимися в нелинейной физике, и это во многом повлияло на содержащийся в книге материал. Прежде всего хотел бы сказать, что мой интерес к этой области науки возник в результате изучения классической статьи А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского (1973 г.), и общение с этими выдающимися учеными было для меня чрезвычайно поучительным, что способствовало прояснению некоторых важных вопросов теории дисперсионных ударных волн. Научное сообщество российских физиков, работающих в области нелинейной науки, во многом сохранило свое единство благодаря огромной организующей роли В.Е. Захарова и Е.А. Кузнецова, которые с примечательной стабильностью проводят ежегодные Научные сессии Совета РАН по нелинейной динамике и регулярные международные конференции «Солитоны, коллапсы и турбулентность», где многие рассматриваемые в книге задачи впервые обсуждались, и очень часто замечания коллег и задаваемые ими вопросы были для меня полезны. Сотрудничество с многочисленными коллегами, студентами и аспирантами простиралось от простых замечаний до полноценного соавторства; невозможно перечислить всех, кто внес таким образом свой вклад в эту книгу. Но я не могу не выделить двух коллег, Г.А. Эля и Н. Павлоффа (N. Pavloff), совместная работа с которыми длилась долгие годы — без их вклада книга была бы совсем другой. Наконец, я благодарен своей жене Валентине, постоянная поддержка которой этого долголетнего проекта во многом способствовала его завершению.

*А.М. Камчатнов*
*август 2022 г.*

# Глава 1
## ЗВУК

Главная цель этой книги — развить теорию распространения волн в таких средах, в которых скорость распространения волны зависит как от ее амплитуды (нелинейность), так и от длины волны (дисперсия среды). Задача эта очень трудная, так что естественно будет начать с более простых частных случаев, когда хотя бы одним из этих эффектов можно пренебречь. А еще лучше начать с того, чтобы освоиться с простейшим случаем, когда ни нелинейность, ни дисперсия не играют никакой роли в распространении импульса — даже этот простейший случай весьма поучителен, а его тщательное изучение создаст необходимую основу для перехода к более сложным ситуациям. Кроме того, этот случай и практически важен, так как охватывает огромную область *линейной акустики*, т.е. теории распространения звука в воздухе, физические свойства которого для рассматриваемых процессов характеризуются единственным основным параметром — постоянной скоростью звука $c_0$.

Следует сказать, что хотя изучение таких линейных *волн без дисперсии* началось в акустике, при дальнейшем развитии науки аналогичные ситуации стали довольно часто встречаться и в других областях физики, причем в очень фундаментальных ее областях. Достаточно вспомнить, например, что электромагнитные волны в вакууме описываются линейными уравнениями Максвелла и распространяются с постоянной *скоростью света,* не зависящей от длины волны. При распространении волн разнообразной природы в различных средах также часто бывает, что амплитуда волны недостаточно велика, чтобы проявились нелинейные эффекты, так что в главном приближении ими можно пренебречь. Дисперсионные же эффекты определяются какими-либо характерными размерами (или частотами), присущими рассматриваемой среде, так что если длина волны много больше такого характерного размера (или частота существенно отличается от характерных внутренних частот в среде), то в главном приближении дисперсионными эффектами также можно пренебречь и мы опять приходим к задаче о распространении звука.

Осваивать любую науку лучше всего на разборе конкретных задач. Поэтому мы начнем наш курс с описания нескольких физических систем, в которых понятие звука или его аналога играет фундаментальную роль.

### 1.1. Распространение звука в газах

О том, что слышимый нами звук представляет собой колебания плотности воздуха, распространяющиеся со скоростью $c_0 \approx 330$ м/с, мы прекрасно знаем из элементарной физики. Впервые скорость звука вычислил еще Ньютон в 1687 г. Однако он сделал при этом весьма нетривиальную ошибку, на исправление которой ушло более ста лет — лишь Лаплас в 1816 г. понял, в чем была ошибка Ньютона, и дал правильную формулу для скорости звука. Тем не менее исходные физические представления у Ньютона были верные: аналогично грузу на пружине воздух обладает *массой* и *упругостью*, так что движение воздуха можно рассчитать на основе ньютоновской механики. Это кажущееся сейчас таким тривиальным замечание вряд ли было таким же очевидным во времена Ньютона. Мы, однако, не будем вдаваться в эти интересные исторические подробности и обратимся к более современному подходу, сформулированному Эйлером.

**1.1.1. Приближение сплошной среды.** Метод Эйлера представляет собой образец построения физической теории. Прежде всего, в ней определяются физические параметры, характеризующие систему. Поскольку нас интересует движение газа на масштабах, много больших, чем длина свободного пробега молекул, и на периодах времени, много больших, чем среднее время между их столкновениями, то молекулярным строением газа можно пренебречь. Мы увидим потом, что в теории ударных волн эти предположения не выполняются и теория потребует модификации; но эта модификация будет проведена таким образом, что рассматриваемое нами *приближение сплошной среды* (или *континуальное* приближение) сохранит свое значение как составная часть этой более общей теории.

В континуальном приближении, рассматривающем газ как непрерывную среду, его массовые свойства описываются плотностью $\rho$, т.е. массой на единицу объема. При этом мы предполагаем здесь, что плотность существенно изменяется лишь на масштабах, много больших, чем длина свободного пробега, т.е. ее можно считать непрерывной функцией координаты $\mathbf{r}$ и времени $t$: $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. Этим мы вводим одну из переменных, описывающих непрерывную среду, а именно переменную, характеризующую массовые свойства среды. Переменная $\rho(\mathbf{r}, t)$ является аналогом массы в ньютоновской механике материальных точек.

При распространении звука газ движется, т.е. маленькая частичка газа, находящаяся в точке $\mathbf{r}$ в момент $t$ имеет скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (в компонентах $\mathbf{u} = (u,\, v,\, w)$), что определяет еще одну, на этот раз векторную, переменную, описывающую кинематику среды. Очевидно, что переменная $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ является аналогом скорости материальной точки. Для формулировки аналога закона движения Ньютона необходимо еще определить переменную, являющуюся аналогом ускорения материальной точки. Для этого нам надо учесть, что скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ относится к частичке газа, находящейся в момент $t$ в точке $\mathbf{r}$; через малый промежуток времени $\Delta t$ скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ будет относиться уже к другой частичке газа, пришедшей в точку $\mathbf{r}$ в момент $t + \Delta t$. Однако в уравнение Ньютона входит ускорение, относящееся к фиксированной частице, и его можно вычислить следующим образом. За время $\Delta t$ интересующая нас частица перемещается в точку с координатами, равными в первом приближении $\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \Delta t$. Поэтому изменение ее скорости равно

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\cdot\Delta t, t + \Delta t\right) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \left[\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right]\Delta t.$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, очевидно является ускорением выбранной нами частицы газа. Обозначается оно как

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \tag{1.1}$$

Первое слагаемое в правой части является производной по времени от скорости в точке $\mathbf{r}$, а второе слагаемое учитывает перенос частицы со скоростью $\mathbf{u}$. Выражение (1.1) является результатом применения оператора *полной или субстанциональной производной*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tag{1.2}$$

к скорости $\mathbf{u}$ и дает скорость изменения скорости, связанной с частицей, т.е. с «субстанцией». Ясно, что наше рассуждение можно применить не только к скорости частицы, но и к любой другой ее характеристике. Например, скорость изменения плотности частицы газа равна

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho, \tag{1.3}$$

и эту формулу можно интерпретировать следующим образом: если распределение плотности описывается функцией $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, то ее производная по времени вдоль траектории жидкой частицы $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}(t)$, равна (1.3). Точно так же получается скорость изменения температуры $T$ или энтропии $s$ на единицу массы вдоль траекторий жидких частиц.

**1.1.2. Уравнение непрерывности.** Последняя оговорка насчет энтропии *на единицу массы* подразумевает, что масса выделенной частицы газа при ее движении не меняется, и это накладывает определенное условие на изменение плотности при течении газа, которое называется *уравнением непрерывности*. Хотя масса частицы не меняется, плотность газа в ней может изменяться вследствие изменения объема. Это отличает механику непрерывной среды от механики материальных точек: в последней масса материальных точек обычно считается фиксированной, тогда как плотность (массовая характеристика непрерывной среды) может изменяться, а условие сохранения массы выделенной частички среды при ее движении должно учитываться отдельным уравнением.

Изменение плотности легко подсчитать следующим образом. Пусть выделенная частица газа ограничена деформирующейся со временем (вследствие течения газа) поверхностью $S$. Выберем на этой поверхности элемент $dS$ и введем вектор $\mathbf{dS}$, равный по величине площади $dS$ и направленный по внешней нормали $\mathbf{n}$ к поверхности: $\mathbf{dS} = \mathbf{n}dS$. Тогда скалярное произведение $\mathbf{u} \cdot \mathbf{dS}$ скорости жидкости $\mathbf{u}$ в области $dS$ на вектор $\mathbf{dS}$ дает объем, «заметаемый» элементом $dS$ за единицу времени, а интеграл от $\mathbf{u} \cdot \mathbf{dS}$ по всей поверхности $S$ даст нам как раз скорость изменения объема $V$, заключенного внутри поверхности $S$. С помощью теоремы Гаусса для малого объема $V$ получим

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{dS} = \int\limits_V (\nabla\cdot\mathbf{u})dV \approx V(\nabla\cdot\mathbf{u}). \tag{1.4}$$

Обозначим через $m$ сохраняющуюся массу выделенной частицы, так что $\rho = m/V$. Тогда плотность газа в выделенной частице изменяется со скоростью

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m}{V} = -\frac{m}{V^2}\frac{dV}{dt} = -\rho(\nabla\cdot\mathbf{u}). \tag{1.5}$$

Объединяя уравнения (1.3) и (1.5), получаем с использованием элементарных формул векторного анализа уравнение непрерывности в привычном виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0. \tag{1.6}$$

Это уравнение допускает также и непосредственную наглядную интерпретацию. Для ее пояснения выделим объем $V$, теперь не связанный с жидкой частицей, а фиксированный в пространстве, так что жидкость может втекать в него и вытекать из него через граничную поверхность $S$. Скорость изменения содержащейся в $V$ массы равна, с одной стороны,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV,$$

с другой стороны, она может быть подсчитана как интеграл от потока массы $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ сквозь поверхность $S$:

$$-\int\limits_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{dS} = -\int\limits_V \nabla(\rho\mathbf{u})dV$$

(здесь знак *минус* отражает то, что вектор $\mathbf{dS}$ направлен по *внешней* нормали к $S$). Поскольку объем $V$ неподвижен, то имеем равенство

$$\int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int\limits_V \nabla(\rho\mathbf{u})dV,$$

и вследствие произвольности выбора объема $V$ мы сразу приходим к уравнению непрерывности (1.6). Это уравнение следует из определения величин $\rho$ и $\mathbf{u}$, а также из предположения, что они являются непрерывными функциями координаты $\mathbf{r}$, причем в системе нет источников или стоков газа.

**1.1.3. Уравнение Эйлера.** Перейдем теперь к выводу следствия из уравнения динамики Ньютона. Здесь нам будет удобно иметь дело с частицей непрерывной среды в виде маленького кубика, имеющего в данный момент времени $t$ ребра единичной длины, параллельные осям координат. Соответственно кубик имеет единичный объем и его масса равна $\rho$, так что произведение массы на ускорение, см. (1.1), равно

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right). \tag{1.7}$$

Эта величина должна равняться силе, действующей в момент $t$ на кубик.

Если газ находится в поле внешних сил, то на него действует сила $\rho\mathbf{f}$, где $\mathbf{f}$ есть сила, приходящаяся на единицу массы среды. Кроме того, частица подвергается действию соседних частиц среды. В случае жидкости или газа часть этой силы характеризуется давлением $p$, т.е. нормальной силой, действующей на единицу поверхности. Согласно закону Торричелли эта сила не зависит от ориентации площадки, на которую она действует, т.е. давление является скалярной функцией координаты и времени: $p = p(\mathbf{r}, t)$. Сила, действующая на наш кубик, возникает из-за того, что давления на противоположные грани кубика слегка различны, так что их разности не равны нулю. Поэтому в направлении оси $x$ на кубик, левая грань которого находится в точке $x$, действует сила $-[p(x+1) - p(x)] \approx -\dfrac{\partial p}{\partial x}$, так как мы считаем, что единичная длина ребра маленького кубика много меньше тех расстояний, на которых существенно меняются характеристики газа; в частности, изменение давления можно учесть лишь в виде первого члена разложения в ряд Тейлора. Обобщение на трехмерный случай очевидно: сила, действующая на единичный объем и обусловленная давлением, равна $\mathbf{f}_{\text{давление}} = -\nabla p$. Приравнивая (1.7) сумме объемной силы и силы, обусловленной градиентом давления, мы приходим к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{1.8}$$

Как мы видим, при его формулировке мы ввели еще одну характеристику непрерывной среды — давление $p(\mathbf{r}, t)$, описывающую *упругость* среды.

Ясно, что такое описание сил годится лишь до тех пор, пока справедлив закон Торричелли, найденный на эксперименте в статическом случае покоящихся сред. Если же в среде есть течение, то, как мы знаем из опыта, на его характер большое влияние может оказывать *вязкость* среды. Поэтому необходимо сформулировать условия, при которых вязкостью можно пренебречь и использовать для описания динамики среды уравнение (1.8). Вязкость среды обычно характеризуется *коэффициентом вязкости* $\eta$, определяемым из эксперимента. Тогда можно показать, что если параметры течения такие, что безразмерное *число Рейнольдса*

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u d}{\eta}, \tag{1.9}$$

где $u$ — характерная скорость течения и $d$ — характерный размер, на котором существенно изменяется $u$, много больше единицы, $\mathrm{Re} \gg 1$, то вязкими силами можно пренебречь.

**1.1.4. Уравнение адиабатичности течения и уравнения газовой динамики.** В уравнениях (1.6) и (1.8) неизвестными являются плотность $\rho$, давление $p$ и три компоненты скорости $\mathbf{u}$, т.е. пять функций, а уравнений, если записать (1.8) в покомпонентном виде, имеется всего четыре. Очевидно, что для описания течения газа нам не хватает одного уравнения, и причина этого тоже ясна: пока что не учтено, что при сжатии газа в процессе течения давление тоже изменяется, а в уравнениях (1.6) и (1.8) эта зависимость никак не отражается.

Однако следует учесть, что при сжатии газа изменяется и его температура, вследствие чего тепло может перетекать из более нагретых областей в менее нагретые благодаря теплопроводности газа. Если теплопроводность мала, то этим относительно медленным процессом можно пренебречь и соответствующее условие можно записать в виде, аналогичном условию $\mathrm{Re} \gg 1$, т.е.

$$\mathrm{Pe} = \frac{ud}{\chi} \gg 1, \tag{1.10}$$

где $\chi$ — коэффициент температуропроводности, а безразмерный параметр Pe называется *числом Пекле*. Таким образом, когда числа Рейнольдса и Пекле много больше единицы, можно одновременно пренебречь как вязкостью, так и теплопроводностью.

Раз диссипативные процессы пренебрежимо малы, то энтропия каждой жидкой частицы сохраняется и это условие можно записать как закон сохранения энтропии $s$ на единицу массы. С учетом смысла субстанциональной производной (1.2) мы записываем это уравнение в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)s = 0. \tag{1.11}$$

Уравнение непрерывности (1.6), уравнение Эйлера (1.8) и уравнение адиабатичности (1.11) составляют полную систему уравнений газовой динамики в пренебрежении диссипативными процессами, причем предполагается, что нам известно термодинамическое соотношение, связывающее энтропию с давлением и плотностью: $s = s(p, \rho)$.

Обратимся к самому простому случаю, когда газ можно рассматривать как идеальный не только в механическом и кинетическом смысле (отсутствие вязкости и теплопроводности), но и в термодинамическом, т.е. в нем отсутствует взаимодействие между молекулами, а внутренняя энергия газа сводится к средней кинетической энергии молекул. Как известно из элементарной физики, в этом случае давление связано с температурой и объемом одного моля вещества *уравнением состояния* $pV = RT$, где $R$ — газовая постоянная (если температура измеряется в градусах, то $R = N_A k_B$, где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро, представляющее собой число молекул в одном моле, $k_B$ — постоянная Больцмана, переводящая энергетические единицы в градусы; в дальнейшем мы обычно будем измерять температуру в энергетических единицах, и постоянная Больцмана будет опускаться). С учетом этого уравнения состояния выражение для энтропии получается из элементарной термодинамики, и его вывод можно найти в любом учебнике общей физики, так что энтропия одного грамма газа равна

$$s = c_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right), \tag{1.12}$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкости $c_p$ одного грамма газа при постоянном давлении к теплоемкости $c_v$ одного грамма при постоянном объеме, причем обе теплоемкости являются постоянными (такой газ называется *политропным*). Тогда давление равно

$$p = e^{s/c_v} \cdot \rho^\gamma, \tag{1.13}$$

и эта формула позволяет выразить $s$ в уравнении адиабатичности через $p$ и $\rho$, так что система уравнений газовой динамики для адиабатического течения политропного газа приобретает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0.\end{gathered} \tag{1.14}$$

Наконец, если ввести переменную $c^2$ согласно определению

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}, \tag{1.15}$$

то подстановка $p = c^2\rho/\gamma$ преобразует систему (1.14) для адиабатического течения ($dp = c^2 d\rho$) в уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{c^2}{\rho}\nabla \rho = \mathbf{f}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}}\right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}}\right) = 0\end{gathered} \tag{1.16}$$

для переменных $\rho, \mathbf{u}, c^2$, и эта форма оказывается иногда более удобной.

Мы написали уравнения в общем виде, не предполагая, что течение обладает какой-либо симметрией. Но в аналитических исследованиях конкретных задач имеют дело, как правило, с частными случаями течений, обладающих большой симметрией, что очень упрощает исследование. Например, в случае *плоских волн* все переменные зависят только от одной пространственной координаты, в качестве которой можно выбрать ось $x$, скорость $\mathbf{u}$ становится скаляром $u$; не составляет труда выписать уравнения для переменных в такой волне. Для течений, обладающих цилиндрической или сферической симметрией, вектор $\mathbf{u}$ направлен в радиальном направлении и очевидно, что $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \equiv u\partial/\partial r$. Несколько большего внимания требует дивергентный член в уравнении непрерывности. Здесь удобно исходить из физического смысла дивергенции как зависящего от координат изменения потока массы, приходящегося на единицу площади в двумерном или единицу объема в трехмерном случае. Беря в качестве элемента площади кольцо, а в качестве элемента объема сферический слой с радиусом $r$, получаем соответственно:

$$\begin{gathered}\frac{\Delta(2\pi r \cdot \rho u)}{2\pi r \Delta r} \to \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u)}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{\rho u}{r}, \\ \frac{\Delta(4\pi r^2 \cdot \rho u)}{4\pi r^2 \Delta r} \to \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\rho u)}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r}.\end{gathered}$$

Если обозначить через $\nu$ размерность пространства, уравнения динамики (1.14) для соответствующих симметричных течений примут вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial r}+\frac{(\nu-1)\rho u}{r}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=f(r),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0; \tag{1.17}$$

аналогичным образом можно преобразовать систему (1.16).

Если мы имеем дело с такой задачей, что все частицы газа начинают движение из состояния с одинаковыми давлением $p_0$ и плотностью $\rho_0$, то выражение (1.13) для давления можно представить в виде

$$p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \tag{1.18}$$

где одинаковый для всех частиц энтропийный множитель $\exp(s_0/c_v)$ выражен через эти фиксированные значения $p_0$ и $\rho_0$. В этом случае уравнение адиабатичности для постоянной для всех частиц энтропии $s=s_0$ можно опустить, и уравнения газовой динамики сводятся к системам из только двух уравнений для плотности и скорости течения, а давление исключено с помощью формулы (1.18).

Ясно, что предположение об адиабатичности течения должно быть справедливым для достаточно малых периодов звуковых волн, когда теплопроводность не успевает «включиться». Если же мы рассматриваем очень медленные процессы, когда температура в интересующих нас объемах газа успевает выровняться вследствие теплопроводности, то зависимость давления от плотности сразу следует из уравнения состояния $pV=RT$; если учесть, что масса одного моля газа равна $N_A m$ и $\rho=N_A m/V$, то

$$p=\frac{\rho}{m}T, \tag{1.19}$$

где температура $T$ считается постоянным параметром. Уравнения (1.18) и (1.19) дают нам два характерных простых примера зависимости давления от плотности, которыми мы пока и ограничимся.

Покажем, что полученные уравнения газовой динамики описывают распространение звука. Это позволит нам выяснить заодно и физический смысл переменной $c$ в выражении (1.15).

**1.1.5. Волновое уравнение.** Обратимся теперь к основной теме этой главы — распространению звука. При написании уравнений газовой динамики в форме (1.16) мы уже ввели обозначение (1.15) для переменной $c$, которая, как мы вскоре убедимся, равна скорости звука при данных значениях давления и плотности. Выясним, при каких условиях можно пренебречь внешней силой $\mathbf{f}$ в уравнении Эйлера.

Если газ неподвижен, то второе уравнение (1.16) сводится к статическому $c^2\nabla\rho=\rho\mathbf{f}$. Например, если $\mathbf{f}$ является силой тяжести, то вблизи поверхности Земли в системе координат с осью $z$, направленной вверх и обозначающей,