СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе математики на изучение геометрии отводится до 40% учебного времени. Поэтому проверке уровня усвоения геометрического материала учащимися, оканчивающими 9 и 11 классы, уделяется серьёзное внимание. Каждая третья задача контрольных измерительных материалов (КИМ) обязательного государственного экзамена (ОГЭ) и единого государственного экзамена (ЕГЭ) – геометрическая. В экзаменационные материалы включены задачи базового, повышенного и высокого уровня трудности. Решения задач базового уровня предъявлять не требуется, нужно только записать ответ. Решения задач более высокого уровня необходимо записать.

Геометрические задачи в экзаменационных материалах ЕГЭ относятся к двум разделам: планиметрии и стереометрии, а для ОГЭ используются только планиметрические задачи. Большинство планиметрических задач, предъявляемых на выпускных экзаменах, можно отнести к одной из следующих тем:

1) треугольники;
2) четырёхугольники;
3) окружности;
4) окружности, вписанные в треугольники и многоугольники;
5) окружности, описанные около треугольников и многоугольников.

В стереометрических задачах рассматриваются:

1) призмы;
2) пирамиды;
3) цилиндры;
4) конусы,
5) сфера (шар).

Во всех задачах на вычисления требуется найти значение одной из геометрических величин:

1) расстояния (длины отрезка);
2) градусной меры угла (тригонометрической функции угла);
3) площади планиметрической фигуры или поверхности тела;
4) объёма тела.

Поскольку в данном пособии рассматриваются и планиметрические, и стереометрические задачи, оно может быть полезно учащимся как 11, так и 9 классов.

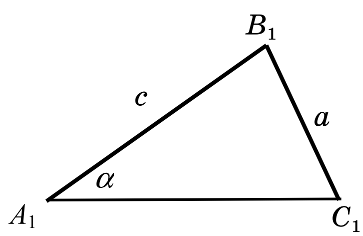
Автор благодарит преподавателя математики Московского колледжа архитектуры и строительства № 7 Е.А. Зудину за ряд ценных замечаний, сделанных в процессе подготовки пособия.

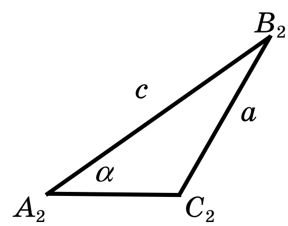
ГЛАВА 1. ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задач необходимо, прежде всего, знать и понимать определения и теоремы школьного курса планиметрии. Неточное знание геометрических утверждений, например, пропуск или замена даже одного слова, может полностью исказить их смысл, сделать неверной формулировку. А это, в свою очередь, приведёт к ошибкам в решении и, соответственно, к неверному ответу.

Например, утверждение «Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°» становится неверным, если пропустить слово «острых».

Утверждение «Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны» (признак равенства треугольников) становится неверным утверждением, если пропустить слова «**между ними**». Тогда равные углы могут лежать **против** пары равных сторон. На рисунке видно, что в этом случае утверждение неверно.





Действительно, могут быть два неравных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, имеющих равные две стороны и угол.

Верное утверждение «Вертикальные углы равны» становится неверным, если слово «вертикальные» заменить словом «смежные». Дело в том, что в утверждении «Вертикальные углы равны», как и в подавляющем большинстве других, подразумеваются слова «**любые два**», т.е. оно верно для любой пары вертикальных углов. А в паре смежных углов один угол может быть острым и тогда второй – обязательно тупой, т.е. **не любые два** смежных угла обязательно равны.

Итак, утверждение такого типа считается верным, если оно выполняется для любых объектов, о которых в нём говорится. Если хотите доказать, что утверждение неверно, достаточно привести пример хотя бы одного объекта, для которого выполняется условие утверждения, но не выполняется заключение (вывод).

Утверждение «Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником» становится неверным, если слово «параллелограмм» заменить словом «четырёхугольник». Например, прямоугольная трапеция – четырёхугольник с прямым углом, но не прямоугольник.

Неосознанная подмена одного понятия другим – одна из наиболее распространённых причин ошибок в решении задач.

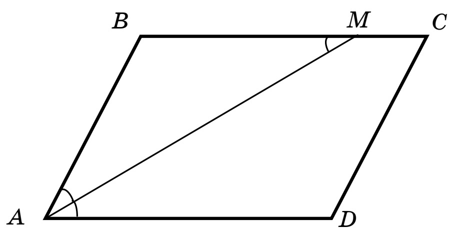
Пример 1.

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую BC в точке M. Найдите периметр параллелограмма, если $MB = 5$, $MC = 2$.

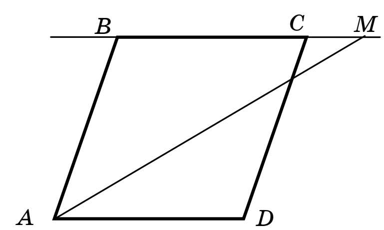
Решение.

В условии задачи нет указаний на взаимное расположение точек B, C и M. Поэтому следует рассмотреть все возможные случаи. Их два:

1) точка M – между точками B и C;



2) точка C – между точками B и M.



В первом случае сторона $BC = 5 + 2 = 7$, во втором случае $BC = 3$.

Т.к. AM – биссектриса угла A, и $BC \parallel AD$, то $\angle BAM = \angle BMA$, следовательно, треугольник ABM равнобедренный. Поэтому $BA = BM$.

Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $AB = CD$, $AD = BC$.

Поэтому в первом случае периметр параллелограмма равен 24. Во втором случае периметр равен 16.

Ответ: 24; 16.

Типичная ошибка при решении этой задачи — подмена понятия «прямая BC» понятием «сторона BC» или «отрезок BC». В результате такой подмены остаётся только один (первый) вариант решения и, соответственно, только один ответ. Поэтому необходимо внимательно читать текст задачи, проверять, правильно ли поняты данные.

Отметим, что на рисунках изображена биссектриса острого угла параллелограмма. Но угол A может быть также тупым или прямым (прямоугольник – частный случай параллелограмма). Поэтому стоит убедиться, что и при этих условиях получатся те же ответы. Сделайте это самостоятельно.

При решении геометрических задач важно помнить все определения и теоремы, иначе можно получить неверный ответ.

Пример 2.

Две стороны равнобедренного треугольника равны 6 и 13. Найдите его периметр.

Решение.

Т.к. в условии задачи не сказано, какая из сторон является основанием треугольника, а какая – боковой стороной, нужно рассмотреть два случая:

1) основание равно 13, соответственно, боковая сторона равна 6;

2) основание равно 6, а боковая сторона равна 13.

В первом случае вторая боковая сторона треугольника также равна 6, поэтому сумма боковых сторон равна 12. Но $12<13$, т.е. получилось, что сумма двух сторон треугольника меньше его третьей стороны, а это противоречит **неравенству треугольника**. Значит, треугольника с такими сторонами не существует.

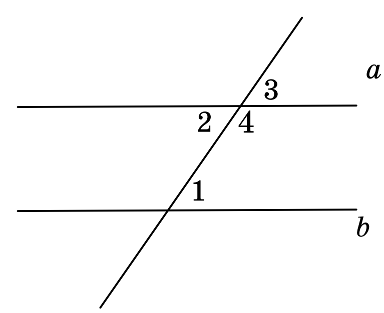
Во втором случае сумма боковых сторон треугольника больше его основания, следовательно, такой треугольник существует, и можно вычислить его периметр: $6 + 13 + 13 = 32$.

Ответ: 32.

Если же забыть о неравенстве треугольника, то получим два значения периметра, одно из которых неверное.

В формулировках определений и теорем важную роль играют союзы.

Например, сравнивая углы, образованные при пересечении двух прямых (допустим, a и b) третьей прямой, можно выяснить, параллельны ли эти прямые a и b:



Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой

а) равны накрест лежащие углы ($\angle 1=\angle 2$)
или

б) равны соответственные углы ($\angle 1=\angle 3$),
или

в) сумма односторонних углов равна 180° ($\angle 1+\angle 4=180^\circ$), то прямые a и b параллельны ($a \parallel b$).

Т.е. если выполняется хотя бы одно (любое) из условий а) – в), можно утверждать, что $a \parallel b$.

И ситуация совершенно иная, если рассматриваются свойства параллельных прямых.

Если известно, что прямые a и b параллельны, то

а) равны накрест лежащие углы ($\angle 1=\angle 2$)

и

б) равны соответственные углы ($\angle 1=\angle 3$),

и

в) сумма односторонних углов равна 180° ($\angle 1+\angle 4=180^\circ$).

В этом случае, если $a \parallel b$, то верны все три утверждения а) – в).

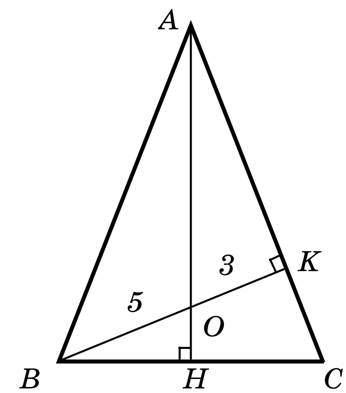
Ещё очень важно понимать, что если какое-то утверждение верно, то обратное может быть и неверным.

Например, практически все учащиеся знают теорему: «Если два угла – вертикальные, то они равны».

Обратное утверждение: «Если два угла равны, то они – вертикальные», – неверное. Достаточно привести опровергающий пример (контрпример): «Углы при основании равнобедренного треугольника равны». Эти углы не являются вертикальными.

Трудность геометрии состоит в том, что зачастую для решения даже не очень сложных задач требуется применить большое количество определений и теорем.

Пример 3. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O так, что $BO = 5$, $OK = 3$. Найдите AH.



Решение.

Высота AH равнобедренного треугольника ABC является и его биссектрисой. Значит, и отрезок AO – биссектриса треугольника ABK, а потому выполняется равенство:

$$BO : OK = AB : AK$$

(свойство биссектрисы треугольника).

Отсюда

$$AK : AB = 3 : 5.$$

Пусть $AK = 3x$, тогда $AB = 5x$, и в прямоугольном треугольнике ABK

$$(5x)^2 - (3x)^2 = (5+3)^2.$$

Следовательно, $16x^2 = 64$, т.е. $x = 2$.

Итак, $AB = 10$, $AK = 6$.

Поскольку $AC = AB$, получаем:

$$KC = 10 - 6 = 4.$$

И в прямоугольном треугольнике BCK

$$BC^2 = 8^2 + 4^2.$$

Отсюда получаем: $BC = 4\sqrt{5}$.

Используя дважды формулу площади для треугольника ABC, получаем:

$$BC \cdot AH = AC \cdot BK,$$

т.е.

$$4\sqrt{5} \cdot AH = 10 \cdot 8.$$

Следовательно,

$$AH = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

В представленном решении использовались следующие геометрические факты:

1. Определение равнобедренного треугольника.
2. Определение высоты треугольника.
3. Свойство высоты равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию.
4. Определение биссектрисы треугольника.
5. Свойство биссектрисы треугольника: отрезки, на которые биссектриса треугольника разделяет его сторону, пропорциональны прилежащим к ним сторонам.
6. Определение прямоугольного треугольника.
7. Теорема Пифагора.
8. Теорема о площади треугольника.

Кроме того, потребовалось умение составлять пропорцию и, используя основное свойство пропорции, вычислять ее неизвестный член.

Предлагаем проверить знание некоторых определений и теорем по планиметрии.

Проверочная работа

Выясните, верны ли следующие утверждения.

1) Если сумма двух углов равна 180°, то эти углы смежные.
2) Сумма вертикальных углов равна 180°.
3) Сумма смежных углов равна 180°.
4) Если два угла с общей вершиной равны, то они вертикальные.
5) Если углы вертикальные, то они равны.
6) Если две прямые a и b перпендикулярны третьей прямой c, то a и b перпендикулярны.
7) Если две прямые a и b параллельны третьей прямой c, то a и b параллельны.
8) Если две прямые a и b перпендикулярны третьей прямой c, то a и b параллельны.
9) Если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
10) Если катеты одного прямоугольного треугольника равны катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.
11) Если гипотенуза одного прямоугольного треугольника равна гипотенузе второго треугольника, то такие треугольники равны.
12) Каждая сторона треугольника меньше разности двух других сторон.
13) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.
14) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
15) Сумма острых углов треугольника равна 90°.
16) Сумма углов треугольника равна 180°.
17) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 180°.
18) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.
19) Высота равнобедренного треугольника является его медианой.
20) Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является высотой этого треугольника.
21) Сумма противолежащих углов параллелограмма равна 180°.
22) Сумма противолежащих углов равнобедренной трапеции равна 180°.
23) Сумма углов трапеции, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
24) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
25) Четырёхугольник, две стороны которого параллельны, является параллелограммом.

26) Четырёхугольник, две стороны которого параллельны, является параллелограммом или трапецией.

27) Четырёхугольник, в котором две стороны параллельны и две стороны равны, является параллелограммом.

28) Противоположные стороны трапеции попарно параллельны.

29) Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

30) Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

31) Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

32) Диагонали равнобедренной трапеции равны.

33) Параллелограмм, диагонали которого равны, является ромбом.

34) Четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.

35) Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.

36) Параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.

37) Диагонали прямоугольника равны.

38) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

39) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

40) Отношение площадей подобных треугольников равно отношению их периметров.

41) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон.

42) Площадь треугольника равна половине произведения длин стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

43) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению длин его катетов.

44) Площадь параллелограмма равна произведению длин двух его смежных сторон.

45) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

46) Центральный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

47) Сумма противолежащих углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равна $360°$.

48) Суммы противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

49) Площадь круга радиуса R равна $2\pi R^2$.

50) Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Номера верных утверждений: 3; 5; 7; 8; 10; 13; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 29; 31; 32; 35; 36; 37; 38; 41; 45; 48; 50.

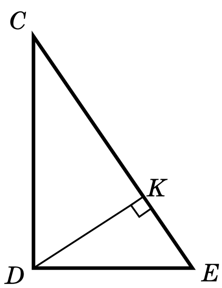
§ 1. Треугольники

В задачах, относящихся к теме «Треугольники», требуется вычислить величины углов или отрезков, площади треугольников. Для их решения требуется использовать определения и свойства углов различных видов (острых, тупых, прямых, вертикальных смежных и т.д.), признаки равенства треугольников, свойства треугольников различных видов (равнобедренного, прямоугольного и др.), их медиан, высот и биссектрис, находить равные и подобные треугольники, уметь вычислять площадь треугольника разными способами. Поэтому полезно иметь под рукой учебник или справочник.

Наиболее просто задачи на вычисление сторон, углов и площадей решаются в **прямоугольных треугольниках**. Для «решения» прямоугольных треугольников необходимо знать, что

1) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).
2) Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе, косинус – отношению прилежащего катета к гипотенузе, тангенс – отношению противолежащего углу катета к прилежащему.
3) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов или половине произведения гипотенузы и проведенной к ней высоты, или половине произведения гипотенузы, катета и синуса угла, заключенного между ними.

Перечисленным утверждениям соответствуют следующие формулы.



Пусть в треугольнике CDE $CE = d$, $ED = c$, $CD = e$, $\angle D = 90^\circ$, $DK \perp CE$ и $DK = h$. Тогда

1) $d^2 = e^2 + c^2$
2) $\sin C = \dfrac{c}{d}$, $\cos C = \dfrac{e}{d}$, $\operatorname{tg} C = \dfrac{c}{e}$ $\left(\operatorname{tg} C = \dfrac{\sin C}{\cos C}\right)$
3) $S = 0{,}5\,c\,e$, $S = 0{,}5\,d\,h$, $S = 0{,}5\,d\,c \cdot \sin E$

Полезно также помнить, что синус одного острого угла прямоугольного треугольника равен косинусу другого его острого угла, например, $\sin C = \cos E$, $\cos C = \sin E$. Полезно также помнить основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. По этой формуле, зная синус острого угла прямоугольного треугольника, можно найти его косинус, и наоборот.

Если условия задачи позволяют установить, что данный треугольник прямоугольный, то вычисления неизвестных элементов становятся проще.

Признаком прямоугольного треугольника служит, например, теорема, обратная теореме Пифагора: «Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник прямоугольный».

Еще одним признаком является равенство суммы двух углов треугольника 90°.

Пример 4. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = 0{,}6$, $AC = 8$. Найдите AB.

Решение.

Стороны AB и AC связаны с углом A соотношением:

$$\frac{AC}{AB} = \cos A. \qquad (*)$$

Значит, чтобы найти AB, нужно вычислить $\cos A$. Используя основное тригонометрическое тождество, получим: $0{,}6^2 + \cos^2 A = 1$. Откуда $\cos A = \pm\sqrt{1 - 0{,}6^2}$. Косинус острого угла положительный, следовательно,

$$\cos A = 0{,}8.$$

Из формулы (*) получаем: $\dfrac{8}{AB} = 0{,}8$. Откуда $AB = \dfrac{8}{0{,}8} = 10$.

Ответ: 10.

Пример 5. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

Решение.

Пусть дан треугольник ABC с прямым углом C. Тогда

$$S = 0,5AC \cdot CB = 0,5AB \cdot h,$$

где h – высота треугольника, проведенная к гипотенузе. Отсюда получаем:

$$15 \cdot 20 = AB \cdot h.$$

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{3^2 5^2 + 4^2 5^2} = 5\sqrt{3^2 + 4^2} = 25.$$

Итак, $15 \cdot 20 = 25 \cdot h$, следовательно, $h = \dfrac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

Ответ: 12.

Замечание. Обратите внимание: найти неизвестную сторону или высоту треугольника можно, вычислив его площадь по двум разным формулам!

Пример 6. В треугольнике KMT $KM = 15$, $MT = 12$, $TK = 9$. Найдите высоту треугольника, проведенную к его большей стороне.

Решение.

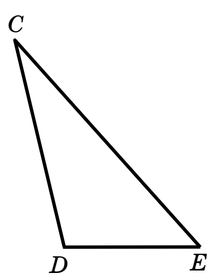
Поскольку $12^2 + 9^2 = 15^2$, треугольник KMT является прямоугольным, а его гипотенуза – наибольшая сторона KM – равна 15. Используя две формулы площади прямоугольного треугольника, получаем: $0,5 \cdot 15 \cdot h = 0,5 \cdot 12 \cdot 9$. Отсюда $h = \dfrac{12 \cdot 9}{15} = 7,2$.

Ответ: 7,2.

Наиболее важными для решения произвольных (не прямоугольных) треугольников являются три теоремы:

1) Теорема косинусов.
2) Теорема синусов.
3) Теорема Герона.

Перечисленным утверждениям соответствуют следующие формулы.



Пусть в треугольнике CDE $CE = d$, $DE = c$, $CD = e$. Тогда

1) $d^2 = c^2 + e^2 - 2ce\cos D$.

2) $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin D}{d} = \dfrac{\sin E}{e}$.

3) $S = \sqrt{p(p-c)(p-d)(p-e)}$, где $p = \dfrac{c+d+e}{2}$.

Пример 7. В треугольнике ABC $\angle B = 135^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 5$. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть $BC = x$. Тогда по теореме косинусов получаем:

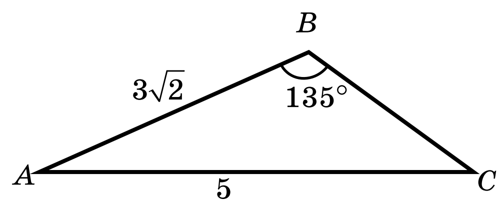
$$AC^2 = AB^2 + x^2 - 2AB \cdot x \cdot \cos B.$$

Подставив данные, получим:

$$5^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + x^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot x \cdot \cos 135^\circ,$$

т.е. $25 = 18 + x^2 + 6x$ или $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Корни уравнения – числа -7 и 1. Следовательно, длина стороны BC равна 1.



Применив формулу $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$, найдем площадь треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

Пример 8. В треугольнике ABC $AB=\sqrt{6}$, $BC=2$, $\angle C=60^\circ$. Найдите градусную меру угла B.

Решение.

Известны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Требуется найти угол, противолежащий третьей стороне.

По теореме синусов можно найти угол A, противолежащий второй из данных сторон, а затем, вычитая из 180° сумму углов A и C, получим искомый угол B.

Итак, $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sin A}$, откуда $\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, значит,

$$\angle A=45^\circ \text{ или } \angle A=180^\circ-45^\circ=135^\circ.$$

Поскольку в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а $\sqrt{6}>\sqrt{4}=2$, т.е. $AB>BC$, то $\angle C>\angle A$. Следовательно, угол A не может быть тупым, и потому он равен 45°.

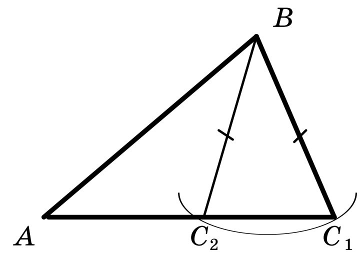
Тогда $\angle B=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$.

Ответ: 75°.

Пример 9. В треугольнике ABC $AB=\sqrt{6}$, $BC=2$, $\angle A=45^\circ$. Найдите угол C.

Решение.

Известны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Требуется найти угол, противолежащий второй из данных сторон.



По теореме синусов получаем: $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin C}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$.

Отсюда $\sin C=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\angle C=60^\circ$ или $\angle C=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

Из рисунка видно, что возможны оба варианта.

Ответ: 60° или 120°.

Пример 10. В треугольнике CDE $DE=11$, $EC=13$, $\sin E=\dfrac{12}{13}$. Найдите CD.

Решение.

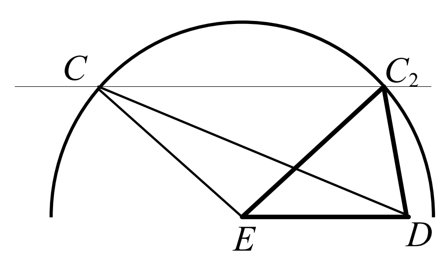
Известны две стороны треугольника и тригонометрическая функция угла между ними. Требуется найти третью сторону.

Почти типичная задача на применение теоремы косинусов, только надо вычислить сначала косинус угла E. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем: $\left(\dfrac{12}{13}\right)^2+\cos^2 E=1$, откуда $\cos^2 E=\left(\dfrac{5}{13}\right)^2$. Для получения значения косинуса важно знать, каков угол E – острый или тупой, т.к. косинус тупого угла отрицательный. Поскольку синус и острого, и тупого угла положительный, определить по нему вид угла невозможно.

Попытаемся построить данный треугольник.

Построим отрезок ED длиной 11 ед. и полуокружность с центром E радиусом 13 ед. Проведем CC_2 параллельно ED.

Очевидно, существуют два треугольника, у которых синусы угла E равны: тупоугольный (CED) и остроугольный (C_2ED).



Поэтому получаем два значения $\cos E=\pm\dfrac{5}{13}$.

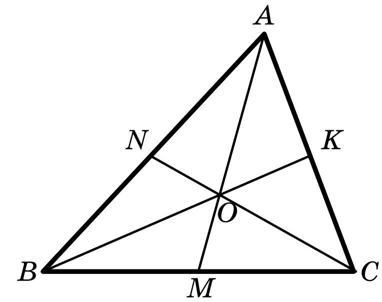
Применяя теорему косинусов, получаем:

$$CD^2=13^2+11^2-2\cdot 13\cdot 11\cdot\frac{5}{13} \text{ или } CD^2=13^2+11^2+2\cdot 13\cdot 11\cdot\frac{5}{13}.$$

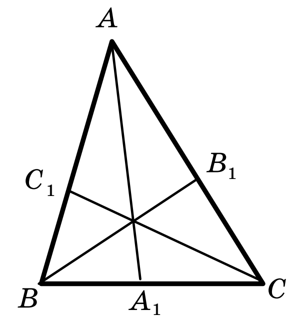
Следовательно, $CD=6\sqrt{5}$ или $CD=20$.

Ответ: $6\sqrt{5}$ или 20.

В задачах о треугольниках часто рассматриваются высоты, медианы и биссектрисы. В равностороннем треугольнике все три отрезка, проведённые из одной вершины, совпадают. В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают.



Все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины. Например, если отрезки AM, BK и CN – медианы треугольника ABC, то
$AO : OM = BO : OK = CO : ON = 2 : 1$.



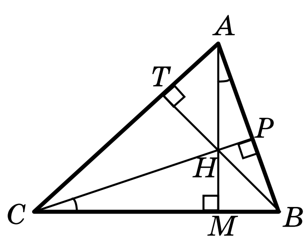
Все три биссектрисы треугольника также пересекаются в одной точке, и каждая биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Например, если отрезок AA_1 – биссектриса треугольника ABC, то $A_1B : A_1C = AB : AC$.

Важно помнить, что медианы и биссектрисы всегда пересекаются во внутренней точке треугольника. Прямые, содержащие высоты остроугольного треугольника, пересекаются во внутренней точке, а тупоугольного – во внешней.

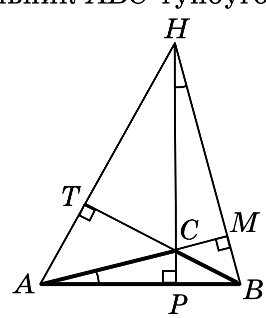
Пример 11. Прямые, на которых лежат высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, $CH=AB$. Найдите угол C.

Решение. Возможны две ситуации:

1) треугольник ABC остроугольный;



2) треугольник ABC тупоугольный.



Рассмотрим первую ситуацию.

Прямоугольные треугольники BAM и BCP имеют общий угол B, следовательно, $\angle BAM=\angle BCP$. Значит, $\triangle ABM = \triangle CHM$ (по гипотенузе и острому углу). Отсюда получаем $CM=AM$, а в равнобедренном прямоугольном треугольнике CAM, острый угол равен 45°, т.е. $\angle C=45^\circ$.

Рассмотрим вторую ситуацию.

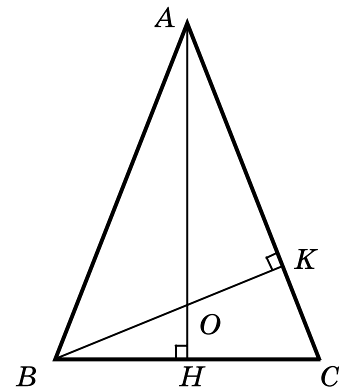
Прямоугольные треугольники BAM и BHP имеют общий угол B, следовательно, $\angle BAM=\angle BHP$. Значит, $\triangle BAM = \triangle CHM$ (по гипотенузе и острому углу). Отсюда получаем $CM=BM$, а в равнобедренном прямоугольном треугольнике CBM острый угол BCM равен 45°.

Следовательно, в треугольнике ABC $\angle C=135^\circ$.

Ответ: 45° или 135°.

Пример 12. Площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равна 160, боковая сторона равна 20. Высоты BK и AH пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABO.

Решение.



$S_{ABC} = 0,5BK \cdot AC$, значит, $BK = \dfrac{2 \cdot 160}{20} = 16$.

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

Высота AH равнобедренного треугольника ABC является его биссектрисой, следовательно, AO – биссектриса треугольника ABK. Поэтому

$\dfrac{KO}{OB} = \dfrac{AK}{AB}$, а значит, $\dfrac{KO}{OB} + 1 = \dfrac{AK}{AB} + 1$ и $\dfrac{BK}{OB} = \dfrac{AK + AB}{AB}$.

Отсюда получаем $\dfrac{16}{OB} = \dfrac{32}{20}$, т.е. $OB = 10$.

Т.к. AK – высота треугольника ABO,

$$S_{ABO} = 0,5BO \cdot AK = 0,5 \cdot 10 \cdot 12 = 60.$$

Ответ: 60.

Замечание. В решении использован простой, но эффективный прием: построение производной пропорции: прибавляя к обеим частям (вычитая из обеих частей) число 1, можно получить новую необходимую пропорцию.

Например, по свойству биссектрисы AT треугольника ABC имеем:

$\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB}{AC}$. Нам известны стороны AB и AC и нужно найти отношение $\dfrac{TC}{BC}$.

Выполним преобразования: $\dfrac{TB}{TC} + 1 = \dfrac{AB}{AC} + 1$, $\dfrac{TB + TC}{TC} = \dfrac{AB + AC}{AC}$, $\dfrac{BC}{TC} = \dfrac{AB + AC}{AC}$,

$\dfrac{TC}{BC} = \dfrac{AC}{AB + AC}$. Искомое отношение получено.

Для вычисления площади треугольника можно использовать несколько различных формул.

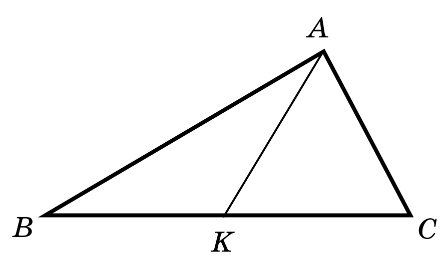
Обозначим длины сторон треугольника ABC, противолежащих углам A, B и C, буквами a, b, c соответственно, проведенные к этим сторонам высоты – буквами h_a, h_b, h_c соответственно, полупериметр треугольника – буквой p, а площадь треугольника – буквой S. Тогда основная формула площади треугольника выглядит следующим образом:

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c.$$

Из этой формулы следует:

«Если точка K лежит на стороне BC треугольника ABC, то

$$S_{ABK} : S_{ACK} = BK : KC».$$



В частности, если AK – медиана, то

$$S_{ABK} : S_{ACK} = 1,$$

значит,

$$S_{ABK} = S_{ACK} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

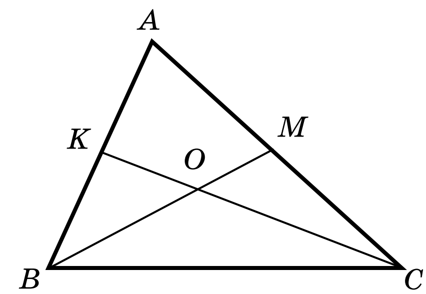
Если AK – биссектриса треугольника ABC, то

$$BK : KC = AB : AC,$$

значит,

$$S_{ABK} : S_{ACK} = AB : AC.$$

Пример 13. В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$. Найдите площадь треугольника, образованного стороной AC, медианой BM и биссектрисой CK данного треугольника.



Решение. Пусть медиана BM и биссектриса CK треугольника ABC пересекаются в точке O. Тогда CO – биссектриса треугольника BCM, и по свойству биссектрис треугольника

$$BO : OM = BC : CM = 21 : 10 .$$

По формуле Герона:

$S_{ABC} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 7} = 126$ (27 – полупериметр треугольника).

BM – медиана треугольника ABC, следовательно, $S_{BCM} = 0,5 S_{ABC} = 63$.

Так как $\dfrac{BO}{OM} = \dfrac{21}{10}$, то $\dfrac{S_{COB}}{S_{COM}} = \dfrac{21}{10}$.

Отсюда получаем: $\dfrac{S_{COB}}{S_{COM}} + 1 = \dfrac{21}{10} + 1$,

следовательно, $\dfrac{S_{BCM}}{S_{COM}} = \dfrac{31}{10}$, и $S_{COM} = \dfrac{10}{31} S_{BCM}$.

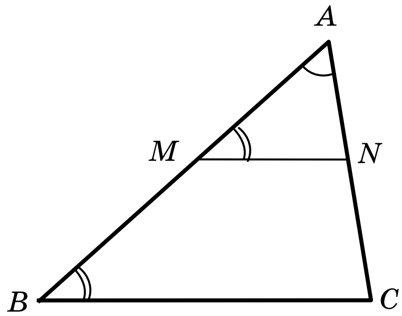
Итак, $S_{COM} = \dfrac{630}{31} = 20\dfrac{10}{31}$.

Ответ: $20\dfrac{10}{31}$.

Задания для самостоятельного решения

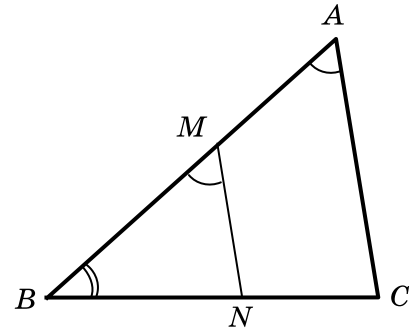
1. В треугольнике KMH угол M прямой, синус угла H равен 0,25. Найдите косинус угла K.
2. В треугольнике BCD $\angle D = 90°$, $BC = 26$, $\cos C = \dfrac{12}{13}$. Найдите CD.
3. В треугольнике OPT $\angle O = 90°$, $PT = 15$, $\cos P = 0,8$. Найдите OT.
4. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $AB = 14\sqrt{3}$. Найдите высоту, проведенную из вершины наибольшего угла треугольника.
5. В треугольнике CDE $CD = 1$, $DE = 2\sqrt{6}$, $EC = 5$. Найдите высоту треугольника, проведенную к его большей стороне.
6. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O, $AH = BC = 8\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABO.
7. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O, $AK = 12$, $KC = 8$. Найдите AO.
8. Биссектриса AM и медиана BK прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке O, $AB = 8$, $BC = 6$. Найдите отношение $BO : OK$.
9. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $AB = 8$, $BC = 7$. Найдите периметр треугольника.
10. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, отрезок AT – биссектриса треугольника, $\angle BAT : \angle ATB = 1 : 5$, $AB = 12\sqrt{2}$. Найдите AC.
11. В треугольнике ABC $AB = 17$, $BC = 15$, $AC = 8$, отрезок AO – биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольника ABO.
12. В треугольнике CDE $\angle D = 60°$, CD=6, $CE = 2\sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CDE.

Решение большого количества задач основано на подобии треугольников. Ситуации, в которых встречаются подобные треугольники, весьма разнообразны. Например, имеется отрезок, соединяющий внутренние точки двух сторон треугольника так, что отсекается треугольник, два угла которого равны двум углам исходного треугольника (рис. 1–4). По первому признаку подобия эти треугольники подобны.



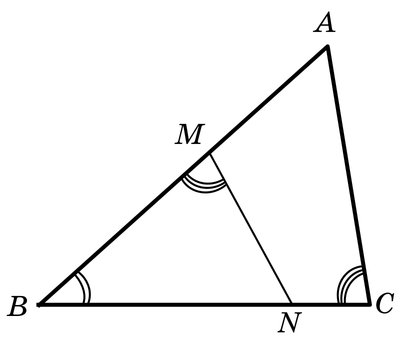
$\triangle AMN \sim \triangle ABC$

Рис. 1



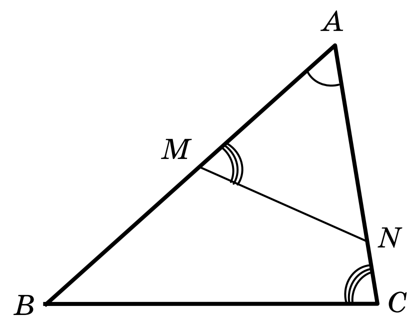
$\triangle MBN \sim \triangle ABC$

Рис. 2



$\triangle NBM \sim \triangle ABC$

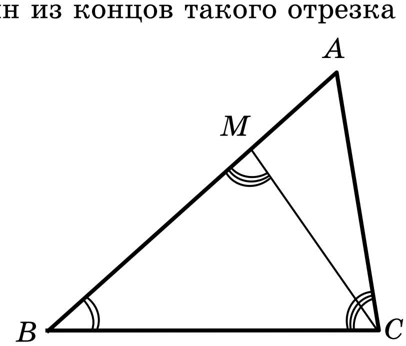
Рис. 3



$\triangle ANM \sim \triangle ABC$

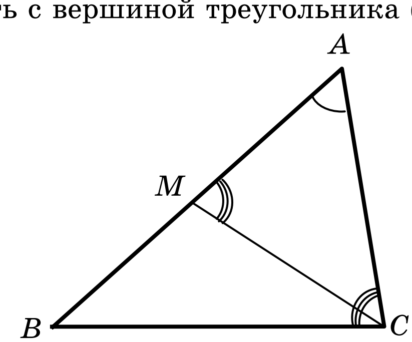
Рис. 4

Один из концов такого отрезка может совпадать с вершиной треугольника (рис. 5–6).



$\triangle CBM \sim \triangle ABC$

Рис. 5

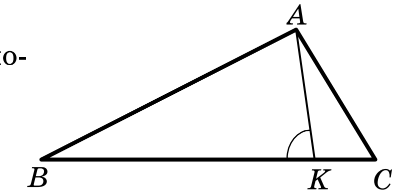


$\triangle ACM \sim \triangle ABC$

Рис. 6

Пример 14. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B + \angle C = \angle AKB$, $AK = 5$, $BK = 16$, $KC = 2$, Найдите AB.

Решение.



Угол AKB является внешним углом треугольника AKC, поэтому

$$\angle AKB = \angle KAC + \angle C .$$

Но по условию задачи $\angle B + \angle C = \angle AKB$, значит, $\angle KAC = \angle B$.

В треугольниках ABC и KAC угол C общий, $\angle KAC = \angle B$, следовательно, они подобны. Отсюда получаем:

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{KC}.$$

Из пропорции $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{AC}{KC}$ получаем $\dfrac{16+2}{AC}=\dfrac{AC}{2}$.

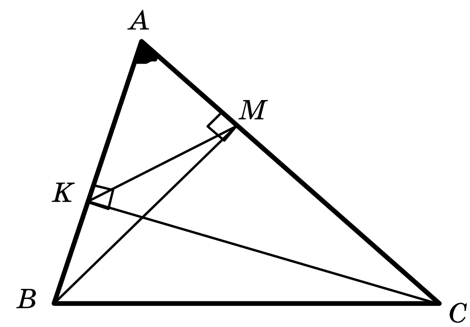
Значит, $AC^2=36$, $AC=6$.

Из пропорции $\dfrac{AB}{AK}=\dfrac{BC}{AC}$ получаем $\dfrac{AB}{5}=\dfrac{18}{6}$.

Следовательно, $AB=15$.

Ответ: 15.

Пример 15. В остроугольном треугольнике $\angle A=60^\circ$, $BC=10$, отрезки BM и CK – высоты. Найдите KM.



Решение. Прямоугольные треугольники ABM и ACK подобны (по двум углам), следовательно, $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AK}{AC}$.

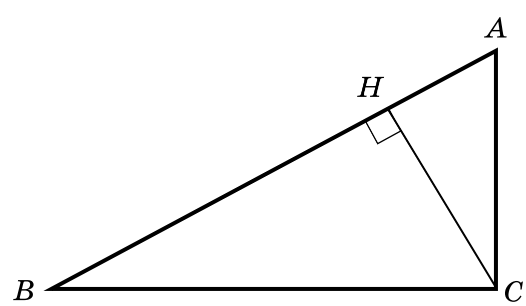
В треугольниках ABC и AMK угол A общий, $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AK}{AC}$. следовательно, $\triangle ABC\sim\triangle AMK$ (второй признак подобия), поэтому $\dfrac{KM}{BC}=\dfrac{AM}{AB}=\cos A$.

Итак, $\dfrac{KM}{10}=\dfrac{1}{2}$, следовательно, $KM=5$.

Ответ: 5.

Если треугольник прямоугольный, а отрезок, проведенный из вершины прямого угла, является его высотой, то получается три подобных треугольника:

$\triangle ACH\sim\triangle CBH\sim\triangle ABC$.

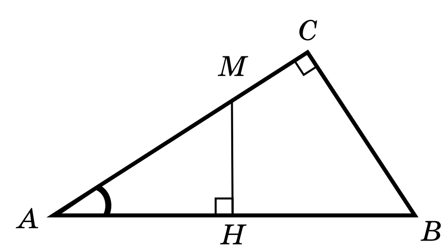


Отсюда получаем:

1. $AH:CH=CH:BH$, значит,
   $CH^2=AH\cdot BH$.
2. $AH:AC=AC:AB$, значит, $AC^2=AH\cdot AB$.
3. $BH:BC=BC:AB$, значит, $BC^2=BH\cdot AB$.
4. Разделив почленно равенство $AC^2=AH\cdot AB$ на равенство $BC^2=BH\cdot AB$, получаем:
$AC^2:BC^2=AH:BH$.

Впрочем, достаточно помнить лишь первую формулу. Например, зная длины отрезков AH и BH, легко вычислить CH^2, а затем по теореме Пифагора найти AC^2.

Пример 16. Из точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Найдите площадь треугольника AMH, если $AB=10$, $AM=5$, $MC=3$.



Решение.

В прямоугольном треугольнике ABC

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-(5+3)^2}=6.$$

$$S_{ABC}=0,5\cdot AC\cdot BC=0,5\cdot 8\cdot 6=24.$$

$\triangle AMH\sim\triangle ABC$, следовательно,

$$\frac{S_{AMH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем:

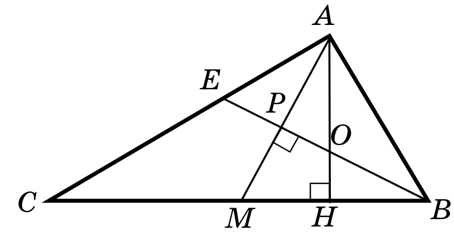
$$S_{AMH}=\frac{1}{4}\cdot 24=6.$$

Ответ: 6.

В приведенном решении было использовано свойство площадей подобных фигур: отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия (для многоугольников и треугольников – квадрату отношения сходственных сторон).

Рассмотрим еще одну задачу на применение этого свойства площадей.

Пример 17. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 10$, $AC = 3\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника, образованного высотой AH, медианой AM и биссектрисой BE данного треугольника.



Решение. Пусть биссектриса BE треугольника ABC пересекает высоту AH в точке O, а медиану AM – в точке P. Выразим катет AH прямоугольных треугольников ABH и ACH через их гипотенузы и катеты:

$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2.$$

Пусть $BH = x$, тогда получим:

$$5^2 - x^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 - (10 - x)^2.$$

Корень полученного уравнения равен 4, т.е. $BH = 4$. Значит,

$$AH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

В прямоугольном треугольнике AMH

$$HM = BM - BH = 5 - 4 = 1.$$

Тогда

$$AM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$S_{AHM} = 0,5 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5.$$

Так как AM – медиана,

$$BM = 10 : 2 = 5 = AB.$$

Поэтому в треугольнике ABM биссектриса BP является также высотой и медианой. Следовательно, в треугольнике APO $\angle APO = 90^\circ$, $AP = 0,5AM = 0,5\sqrt{10}$.

Прямоугольные треугольники AHM и APO подобны, следовательно,

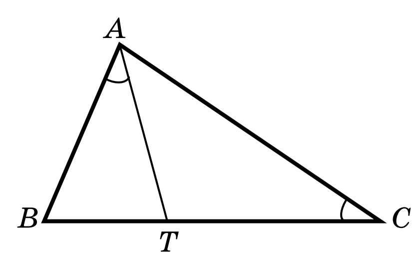
$$S_{APO} : S_{AHM} = \left(AP : AH\right)^2 = \left(0,5\sqrt{10} : 3\right)^2 = 5 : 18.$$

Итак, $S_{APO} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{12}$.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Пример 18. Сторона AC треугольника ABC равна $3\sqrt{13}$. На стороне BC отмечена точка T так, что $\angle TAB = \angle C$. Найдите площадь треугольника ABC, если $CT = 9$, $TB = 4$.

Решение. В треугольниках ABC и TAB угол B общий, $\angle TAB = \angle C$, следовательно, они подобны.



Отсюда получаем: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{TB}$.

Из этой пропорции следует: $\frac{9+4}{AB} = \frac{AB}{4}$.

Значит, $AB^2 = 13 \cdot 4$, $AB = 2\sqrt{13}$.

Так как

$$AC^2 + AB^2 = \left(3\sqrt{13}\right)^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 = 13 \cdot 13 = BC^2,$$

то треугольник ABC является прямоугольным с катетами AB и AC.

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} = 39$.

Ответ: 39.

Задания для самостоятельного решения

13. Отрезки AH и CM – высоты остроугольного треугольника ABC, $AB=15$, $BC=18$, $CA=12$, $BM=6$. Найдите периметр четырёхугольника $AMHC$.
14. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CH. Найдите MH, если $AC=16$, $\angle B = 60°$.
15. Через середину O гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к гипотенузе и пересекающая катет AC в точке M. Найдите площадь треугольника AMO, если $AM = 25$ и $MC = 7$.
16. В треугольнике ABC $AB=6$, $BC=5$, $CA=7$. Точка K лежит на луче BC, причем $\angle BAK = \angle ACB$. Найдите периметр треугольника ACK.
17. Меньший катет прямоугольного треугольника ABC равен 9, высота BK делит гипотенузу AC в отношении 3:4. Найдите площадь треугольника ABC.
18. Отрезок CH – высота прямоугольного треугольника ABC. Площади треугольников ACH и BCH равны 4 и 6 соответственно. Найдите длину гипотенузы AB.
19. В треугольнике ABC проведена биссектриса AO. Прямая, проходящая через точку O и параллельная прямой AC, пересекает сторону AB в точке M. Площадь треугольника ABC равна 6, $AB=4$, $AC=6$. Найдите площадь треугольника AOM.
20. В треугольнике ABC $AB=27$, $BC=36$. Три угла и две стороны треугольника ABC равны трем углам и двум сторонам треугольника MPT, но треугольники не равны. Найдите AC.
21. Отрезки AP, CH и BT – высоты треугольника ABC. Прямые AP, CH и BT пересекаются в точке O, $PH \parallel AC$, $AC=4$, $\sin\angle ABC = \frac{24}{25}$. Найдите площадь треугольника ABC.
22. Высота треугольника равна 2 и делит угол треугольника в отношении 1:2, а противолежащую ему сторону на части, меньшая из которых равна 1. Найдите площадь треугольника.
23. В треугольнике ABC $BC=5$, $AC=3$, медианы AM и CP взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM.
24. В треугольнике ABC медиана AM и биссектриса BT взаимно перпендикулярны. Найдите меньшую сторону треугольника, если $AM=BT=4$.
25. В треугольнике ABC $AB=42$, $BC=39$, $AC=45$. Найдите площадь треугольника, образованного стороной AC, биссектрисой BT и высотой CH.
26. Медианы AT и BM треугольника ABC пересекаются в точке O, $AB=13$, $BC=14$, $CA=15$. Найдите площадь треугольника AOM.

§ 2. Четырёхугольники

Тема «Четырёхугольники» в контрольных измерительных материалах представлена задачами о параллелограмме (и его частных видах: ромбе, прямоугольнике и квадрате), а также задачами о трапеции. Свойства четырёхугольника зависят от его вида.

Произвольный выпуклый четырёхугольник обладает небольшим количеством свойств:

1) Его диагонали пересекаются, причём, внутри четырёхугольника.
2) Сумма углов четырёхугольника равна 360°.
3) Площадь произвольного четырёхугольника можно вычислить по формуле

$$S = 0,5\, d_1 d_2 \sin\alpha,$$

где d_1 и d_2 – длины диагоналей, α – угол между прямыми, содержащими диагонали четырёхугольника. (Имеется ввиду один из четырёх углов, образованных пересекающимися прямыми, величина которого не больше величин остальных трёх углов).

В частности, если диагонали взаимно перпендикулярны, то формула принимает вид

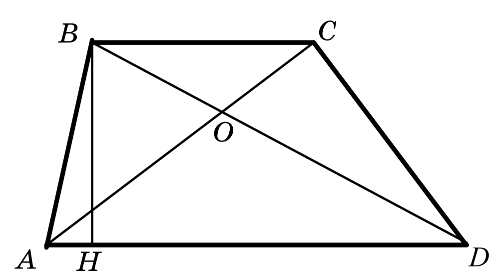
$$S = 0,5\, d_1 d_2 .$$

Если две стороны четырёхугольника сделать параллельными, получим трапецию (параллельные стороны называются основаниями, а две другие – боковыми сторонами). Наряду с перечисленными свойствами четырёхугольника трапеция обладает дополнительными свойствами:

4) Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°.
5) Биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, взаимно перпендикулярны.
6) Отрезок, соединяющий середины боковых сторон (средняя линия трапеции) параллелен основаниям, а его длина равна полусумме длин оснований.
7) Если боковые стороны равны (такая трапеция называется равнобокой или равнобедренной), то углы, прилежащие к одному основанию, равны, равны и диагонали трапеции.
8) Площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту, т.е. полусуммы оснований на высоту.

Есть ещё два важных свойства трапеции.

Проведём в трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD. Тогда:



9) Площади треугольников BAD и CAD равны (у них общее основание и равные высоты). Равны также и площади треугольников BAC и BDC.

Вычитая из площадей треугольников BAD и CAD площадь их общей части – треугольника AOD, получаем:

10) $S_{BAO} = S_{CDO}$.

Если противоположные стороны четырёхугольника попарно параллельны, то он называется параллелограммом. Параллелограмм обладает всеми свойствами трапеции. Но имеет и свои специфические свойства:

11) Диагонали точкой пересечения делятся пополам.
12) Противоположные стороны попарно равны.
13) Противолежащие углы попарно равны.
14) Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
15) Диагонали делят параллелограмм на четыре равных по площади треугольника.

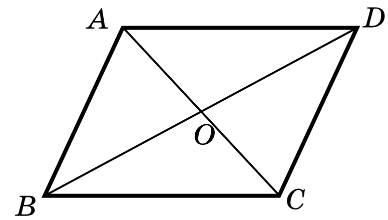
Если учесть, что средняя линия параллелограмма равна стороне, которой параллельна, то площадь параллелограмма равна произведению стороны и проведённой к ней высоты:

16) $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

17) Кроме того, площадь можно вычислить, умножив произведение двух сторон на синус угла между ними:

$$S = ab\sin\varphi\,.$$

К перечисленным утверждениям следует добавить еще одно полезное свойство параллелограмма:



18) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Т.е. в параллелограмме $ABCD$

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)\,.$$

Эту формулу легко получить, применив теорему косинусов к треугольникам ABC и BCD, а затем сложив почленно полученные равенства.

Если один из углов параллелограмма прямой, то и остальные углы тоже прямые. Такой параллелограмм называется прямоугольником. Значит, прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Но у него есть и собственное свойство:

19) Диагонали прямоугольника равны.

Упрощается и вычисление площади:

20) Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон.

Если две смежные стороны параллелограмма равны, то равны все его стороны. Такой параллелограмм называется ромбом. Значит, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, но у него есть и свои специфические свойства:

21) Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

22) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

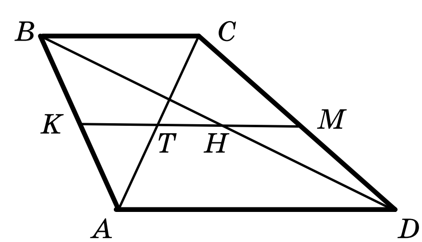
Поскольку ромб является четырёхугольником, диагонали которого взаимно перпендикулярны:

23) Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, т.е. для ромба $ABCD$ получаем формулу: $S = 0,5AC\cdot BD$.

Прямоугольник, являющийся ромбом (ромб, являющийся прямоугольником), называется квадратом. Следовательно, квадрат обладает всеми перечисленными выше свойствами. А площадь квадрата равна квадрату стороны: $S = a^2$.

Рассмотрим примеры решений задач.

Пример 19. Основания трапеции равны 8 и 10. Найдите расстояние между серединами её диагоналей.



Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, а её средняя линия KM пересекает диагонали AC и BD в точках T и H. Поскольку $KM \parallel AD$, то по теореме Фалеса, прямая KM пересекает диагонали AC и BD в их серединах. Значит, отрезки KT и MH − средние линии треугольников ABC и DBC.

Поэтому $KT = MH = \dfrac{1}{2}BC = 4$.

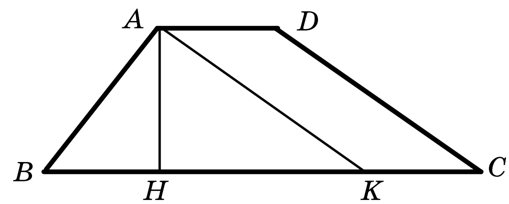
Следовательно, $TH = KM - 2KT = \dfrac{8+10}{2} - 2\cdot 4 = \dfrac{10-8}{2} = 1$.

Ответ: 1.

Замечание: фактически мы получили формулу расстояния между серединами диагоналей трапеции с основаниями a и b: $TH = \dfrac{|a-b|}{2}$.

В решении геометрических задач важную роль играют удачные дополнительные построения. Например, в трапеции нередко полезно бывает провести прямую, параллельную диагонали или боковой стороне.

Пример 20. В трапеции $ABCD$ $AB = 6$, $AD = 5$, $CD = 8$, $\angle B + \angle C = 90^\circ$. Найдите площадь трапеции.



Решение. Через точку A проведем прямую, параллельную прямой CD, и обозначим точку ее пересечения с прямой BC буквой K. Стороны четырёхугольника $AKCD$ попарно параллельны, следовательно, он – параллелограмм. Поэтому $AK = CD = 8$ и $KC = AD = 5$. Итак, треугольник ABK прямоугольный с катетами, равными 6 и 8.

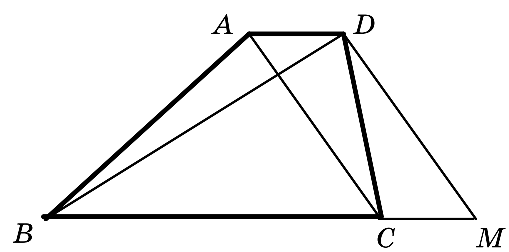
Поэтому $BK = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Найдем высоту AH треугольника: $AH \cdot BK = AB \cdot AK$, значит, $AH = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$.

Поскольку $BC = BK + KC = 10 + 5 = 15$,
то площадь трапеции равна $0,5 \cdot (15 + 5) \cdot 4,8 = 48$.

Ответ: 48.

Пример 21. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 8 и 15. Найдите среднюю линию трапеции.



Решение. Через вершину D трапеции $ABCD$ проведем прямую, параллельную прямой AC, и обозначим точку ее пересечения с прямой BC буквой M. Стороны четырёхугольника $ACMD$ попарно параллельны, следовательно, это – параллелограмм. Поэтому $CM = AD$ и $AC = MD = 8$.

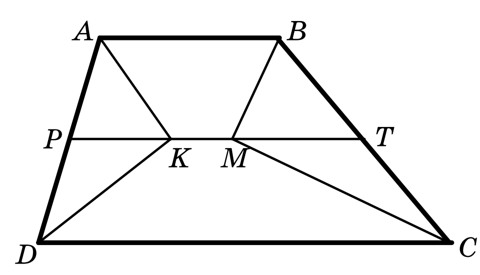
Следовательно, $BM = BC + CM = BC + AD$, а треугольник BDM прямоугольный с катетами, равными 15 и 8. Значит, $BM = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$.

Средняя линия трапеции равна $0,5\left(BC + AD\right) = 0,5\left(BC + CM\right) = 0,5BM$.

Следовательно, $0,5 \cdot 17 = 8,5$.

Ответ: 8,5.

Пример 22. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 10, $AD = 3$, $BC = 7$. Биссектрисы углов A и D пересекаются в точке K, биссектрисы углов B и C – в точке M. Найдите KM.



Решение. Луч AK – биссектриса угла A, следовательно, точка K равноудалена от его сторон AB и AD. Аналогично точка K равноудалена от сторон DA и DC. Значит, точка K равноудалена от оснований трапеции AB и CD. Аналогично доказывается, что и точка M равноудалена от оснований трапеции. Отсюда следует, что прямая KM параллельна прямым, содержащим основания трапеции, и равноудалена от них.

Пусть прямая KM пересекает боковые стороны AD и BC в точках P и T соответственно, тогда PT – средняя линия трапеции, и поэтому

$$PT = 0,5\left(AB + CD\right) = 7,5.$$

Т.к. AK и DK – биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, $AK \perp DK$. Тогда KP – медиана прямоугольного треугольника AKD, проведенная к его гипотенузе, поэтому $KP = 0,5AD = 1,5$. Аналогично $MT = 0,5BC = 3,5$.

Следовательно,

$$KM = PT - \left(KP + MT\right) = 7,5 - \left(1,5 + 3,5\right) = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

Как отмечалось выше, в параллелограмме равны площади всех четырёх треугольников, на которые он делится диагоналями.