СОДЕРЖАНИЕ

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте *www.dmkpress.com*, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу *dmkpress@gmail.com*; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу *http://dmkpress.com/authors/publish_book/* или напишите в издательство по адресу *dmkpress@gmail.com*.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу *dmkpress@gmail.com*. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

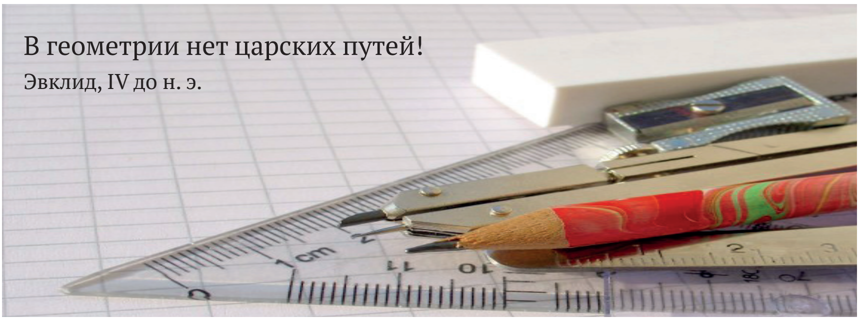
Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты *dmkpress@gmail.com*.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

ПРЕДИСЛОВИЕ



В геометрии нет царских путей!

Эвклид, IV до н. э.

«*Я больше не могу!*» — мой старший сын Алекс отложил домашнее задание по геометрии. — «*И пожалуйста, не говори мне, что я когда-нибудь воспользуюсь этим кошмаром где-нибудь, как-нибудь в жизни!*»

Мои героические попытки объяснить ему решение задачи о свойствах биссектрисы треугольника с треском провалились.

«*Тебе должно быть стыдно за себя. Я недавно опубликовал статью о свойствах биссектрисы,* — (см. главу 4), — *а у тебя не хватает терпения даже меня выслушать*».

Я привел этот последний аргумент, пытаясь привлечь его внимание к этой теме. Внезапно в его глазах вспыхнула искра, и он посмотрел на меня с явным выражением интереса на лице.

«*Могу я это увидеть?*»

«*Конечно, вот оно*», — я очень гордился собой.

Он просмотрел статью, прочитал несколько абзацев, а затем терпеливо позволил мне закончить объяснение решения его домашнего задания.

«*Не мог бы ты сделать для меня копию этой статьи?*» — спросил он, когда мы закончили делать домашнее задание. Это было настоящее удовольствие — услышать от него что-то подобное. Очевидно, ребенок хотел показать копию своим школьным друзьям и завоевать популярность благодаря математическим способностям отца.

Через несколько дней он вернулся из школы и рассказал мне, что получил пятерку за свою последнюю контрольную по геометрии. Мои усилия наконец окупились, и я был очень счастлив в течение нескольких дней. Потом я встретил его школьного друга. Он рассказал мне правдивую историю о том, как была получена пятерка.

Алекс — очень хороший теннисист. Его интересы всегда были связаны со спортом, и он никогда не был хорошим учеником по математике. Недостаток знаний и желания изучать предмет он компенсировал шутками и рассказами забавных историй во время занятий. Учителям всегда было трудно заставить его замолчать. Кстати, он ни разу не упомянул на уроках, что его отец был профессиональным математиком.

В тот день он раздражал учителя больше, чем обычно. В конце занятия Алекс объявил, что ему не нужно делать домашнее задание, поскольку он просто изучал эти свойства вместе со своим отцом, читая опубликованную статью в математическом журнале. Очевидно, было трудно представить, что он говорит правду.

«*Мне надоели твои фантазии. На этот раз я преподам тебе урок. Если ты принесешь эту статью завтра в класс, получишь пятерку на следующей контрольной, даже не выполняя ее. Но если у тебя статьи нет, домашнее задание увеличится втрое, и тебе придется сдавать мне каждую задачу*», — сказал учитель.

Желание учителя посмеяться над этим назойливым подростком было вполне понятно.

Вы знаете конец истории. Учитель сдержал свое слово.

Это был пока единственный опыт моего сына по использованию геометрии в реальной жизни. Признаюсь, хотя на уроках геометрии он и не преуспел, но методы, которым я его учил, он применял. Как насчет введения вспомогательных элементов (см. главу 8) для достижения цели получить хорошую оценку, не прилагая при этом особых усилий? Он использовал мою публикацию как вспомогательный элемент, чтобы спровоцировать учителя. Проблему получения хорошей оценки решали, не углубляясь в материал, даже без выполнения контрольного задания.

Прошло много лет. Алекс — взрослый мужчина, у него теперь своя семья. Когда мы оба вспоминаем эту забавную историю, он сожалеет, что не уделил больше времени математическим темам, и признает неоспоримую пользу изучения геометрии для развития и укрепления логического мышления.

Нет необходимости упоминать о важности математики, в том числе геометрии, в дошкольном образовании. Однако для многих детей математика зачастую является самым трудным предметом, и они теряют интерес и мотивацию.

Я надеюсь, что методы и концепции, обсуждаемые в книге, побудят читателей исследовать незнакомые или малоизвестные аспекты геометрии. Моей целью было пригласить к геометрии тех, кто страстно любит великий мир математики и восхищается им, в том числе моего младшего сына Брайана, который только что с отличием окончил колледж со степенью бакалавра по математике (очень горжусь им!). Его интерес к математике был одним из факторов, вдохновивших меня на создание этой книги. Он также оказал мне большую помощь при редактировании нескольких глав, и я благодарен ему за это.

Обычно мы испытываем самые большие трудности в начале процесса решения проблемы. С чего начать? Как вообще можно связать воедино условия задачи? Я думаю, ответом на эти типичные вопросы будет «распознать» проблему сразу после ее обнаружения. Под «распознаванием» я подразумеваю способность идентифицировать ее тип и определить наиболее важные из заданных условий, которые можно использовать в качестве кирпичиков при построении логической цепочки. Эта книга посвящена геометрическому мышлению — что оно означает, как его развивать и как его распознавать.

Платон, один из величайших философов в истории человечества, вывесил перед своей Академией лозунг: «*Пусть не войдет сюда никто, не знающий геометрии*».

Цель этой книги — дать представление о некоторых интересных и увлекательных аспектах геометрии и раскрыть множество интересных геометрических свойств. Темы охватывают хорошо известные свойства и теоремы, в том числе классические примеры, такие как закон рычага Архимеда, теорема Пифагора, формула Герона, формула Брахмагупты, теорема Аполлония, свойства линии Эйлера и окружности девяти точек, задача Фаньяно, теорема Штейнера—Лемуса, теорема Наполеона, теорема Чевы, теорема Помпейю и «чудо Морли». Книга «Геометрический калейдоскоп» состоит из калейдоскопа, казалось бы, не связанных на первый взгляд тем. Однако это восприятие исчезает по мере того, как вы переходите от главы к главе и исследуете множество удивительных отношений, неожиданных связей и взаимодействий. Наибольшее внимание следует уделять основополагающим принципам и основным этапам в решении проблем.

Читатели, решающие цепочку задач, узнают из этого общие приемы, а не отдельные случаи применения того или иного метода. Они могут использовать задачу в качестве ядра, вокруг которого можно построить набор более сложных проблем, приводящих к одному и тому же методу решения. Также мы демонстрируем, как поиск множественных решений проблемы помогает получить важные обобщения и новые неожиданные результаты.

Я считаю, что лучший способ выучить математику — это заниматься математикой.

Маркус дю Сотой, известный своей работой по популяризации математики, сказал: «*Сила математики часто заключается в том, чтобы превращать одну вещь в другую, превращать геометрию в язык*». Я надеюсь, что эта книга станет еще одним небольшим шагом в данном направлении и что темы и проблемы принесут читателям приятные впечатления.

Я очень благодарен читателям, которые написали рецензии на книгу на сайтах Amazon и LinkedIn и поделились со мной своим мнением. Их конструктивная критика и ободряющие комментарии сыграли важную роль в моем решении обновить и пересмотреть издание книги 2017 года и подготовить к публикации новое издание.

Эта книга посвящается обоим моим сыновьям, Брайану и Алексу, и их семьям, а особое внимание уделяется моим очаровательным внучкам Лиане и Лу́не. Я их очень люблю и желаю видеть их всех счастливыми и успешными в достижении своих целей в жизни. Посвящается она и моей жене Ирине, которая почти не жаловалась и терпеливо переживала недостаток моего внимания во время работы над книгой. Наконец, она посвящена моим покойным родителям, чьи любовь, поддержка и вдохновение всегда помогали мне в прошлом и останутся со мной до конца моей жизни.

ОБ АВТОРЕ

Борис Прицкер родился в Киеве, Украина. Он изучал математику в Киевском государственном педагогическом университете, который окончил с отличием и получил в США степень бакалавра наук в области преподавания математики. Прицкер работал учителем математики в средних школах, в том числе в специальной математической школе для одаренных и талантливых учеников с углубленными программами по алгебре, геометрии, тригонометрии и анализу. Разработал образовательные семинары для изучения классических математических задач, побуждая студентов искать альтернативные решения. Он также готовил школьные математические команды для участия в математических олимпиадах; несколько учеников из этих математических команд выиграли престижные местные и региональные олимпиады по математике.

Иммигрировав в Соединенные Штаты, Б. Прицкер получил степень MBA[1] с отличием в аспирантуре колледжа Баруха Городского университета Нью-Йорка. Б. Прицкер является лицензированным CPA[2] в штате Нью-Йорк. Последние 25 лет он работал в нью-йоркской бухгалтерской и консалтинговой фирме CBIZ Marks Paneth LLC, где стал директором.

Никогда не оставляя своего любопытства и преданности развитию математического образования и исследований, Прицкер на протяжении многих лет исследовал различные сложные и интересные темы из евклидовой геометрии, алгебры, тригонометрии и pre-

[1] **MBA** (*master of business administration*, мастер делового администрирования) — квалификационная степень магистра в области управления. — *Здесь и далее прим. перев.*

[2] **CPA** (*certified public accountant*, дипломированный бухгалтер) — сертификат высшей квалификации в области бухгалтерии.

calculus[1], которые он предлагал для публикации в математических образовательных журналах. Он публиковал задачи и статьи в Советском Союзе, США, сингапурских и австралийских журналах, таких как «Математика в школе» (на русском языке), нью-йоркский журнал для учителей математики NY State Mathematics Teachers' Journal, Quantum[2], математический журнал Новой Англии New England Mathematics Journal, журнал математики и информатики Mathematics and Informatics, журнал творческой математики Journal of Recreative Mathematics, журнал для учителей математики Mathematics Teacher, журнал Всемирной федерации национальных математических соревнований Mathematics Competitions.

Борис Прицкер является автором четырех всемирно известных книг по математике: «Геометрический калейдоскоп» («Geometrical Kaleidoscope», Dover Publications, 2017; вы держите в руках перевод второго издания), «Мир уравнений» («The Equations World», Dover Publications, 2019), «Математические лабиринты» («Mathematical Labyrinths», Pathfinding, World Scientific, 2021) и «Расширение набора математических инструментов: переплетение тем, проблем и решений» («Expanding Mathematical Toolbox: Interweaving Topics, Problems, and Solutions», Chapman & Hall/CRC, 2023).

---

1 **Precalculus** — специфический англоязычный термин, означающий курс разделов алгебры и тригонометрии на уровне, предназначенном для подготовки учащихся к изучению математического анализа (*calculus* — исчисления). В русскоязычной практике аналога не имеет.

2 **Quantum: The Magazine of Math and Science** — дочернее издание российского журнала «Квант», выходившее раз в два месяца в Соединенных Штатах с 1990 по 2001 год. Quantum содержал переводы из «Кванта» и оригинальные материалы. Архив журнала: *https://www.nsta.org/quantum-magazine-math-and-science*.

1

МЕДИАНЫ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЦЕНТР И ЦЕНТР МАСС СИСТЕМЫ ТОЧЕК

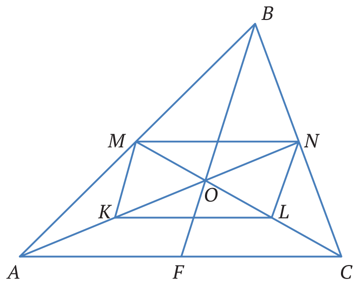
В каждом треугольнике есть три важных особых отрезка: медианы, высоты и биссектрисы. Мы рассмотрим некоторые интересные их свойства и продемонстрируем их применение при решении проблем. Начнем с медиан треугольника.

Медианой треугольника называется отрезок, проведенный из вершины треугольника к середине противоположной стороны.

Три медианы в треугольнике пересекаются в одной общей точке, которая называется геометрическим центром треугольника[1].

[1] Для **геометрического центра** треугольника (он же центр масс, см. далее) в русскоязычной литературе также употребляют название *центроид* (от термина *centroid*, принятого за рубежом). Мы в этом переводе оставляем более традиционное название.

Она расположена на 2/3 пути от вершины до противолежащей средней точки. То есть медианы треугольника делят друг друга в соотношении 2:1.



Докажем приведенные выше утверждения.

В треугольнике ABC медианы — отрезки AN, BF и CM. Нам нужно доказать, что они проходят через общую точку O и эта точка разделяет каждую медиану в соотношении 2:1.

Треугольники MBN и ABC подобны, поскольку имеют общий угол B и соответственные стороны, образующие угол B, находятся в одинаковом соотношении: $MB = \frac{1}{2}AB$ и $BN = \frac{1}{2}BC$.

Следовательно, равны углы $\angle BMN = \angle BAC$ и $\angle BNM = \angle BCA$ как соответственные углы подобных треугольников; откуда $MN \| AC$. Если мы выберем точки K и L на OA и OC соответственно так, что $OK = KA$ и $OL = LC$, то по аналогичным рассуждениям $KL \| AC$ (треугольники KOL и AOC подобны).

Отсюда следует, что отрезки $MN = KL = \frac{1}{2}AC$ и $MN \| KL$ (и MN, и KL параллельны AC). Таким образом, $KMNL$ — параллелограмм, а O — точка пересечения его диагоналей, которая делит диагонали пополам.

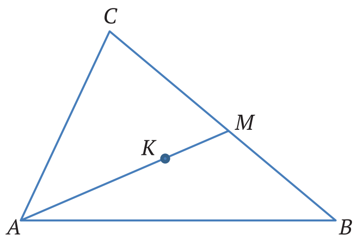
Тогда $ON = O$К и $OM = OL$. Поскольку мы выбрали K и L так, что $OK = KA$ и $OL = LC$, мы получаем, что $AK = KO = ON$ и $CL = LO = OM$, поэтому точка O делит медианы AN и CM на три части. Так как мы могли бы с таким же успехом начать с другой пары медиан, три медианы совпадают, и точка их пересечения делит каждую медиану в соотношении 2:1. Доказательство завершено.

В ходе доказательства появилось мощное свойство:

Средняя линия треугольника (отрезок, соединяющий две середины двух сторон) параллелен противоположной стороне треугольника и ровно вдвое короче.

Треугольник, образованный соединением середин сторон треугольника, называется срединным треугольником. Как мы заметили, у срединного треугольника три стороны параллельны сторонам исходного треугольника, поэтому треугольники подобны. Отношение соответственных сторон равно $\frac{1}{2}$.

Задача 1. Имеются три неколлинеарные[1] точки A, B и K. Постройте треугольник ABC так, чтобы точка K была его геометрическим центром, а точки A и B — вершинами.



Решение. Для решения достаточно заметить, что если K — геометрический центр треугольника ABC, то, расположив точку M на продолжении AK так, что $MK = \frac{1}{2}AK$, мы получим середину стороны BC. Нарисовав BM и расположив на его продолжении точку C так, что $MC = MB$, мы получим третью вершину треугольника. Последний шаг – соединить точки A и C. ABC – искомый треугольник.

Наши построения выполняются только с помощью циркуля и линейки (линейки без разметки — для проведения прямых линий), если специально не указано иное. Пояснения основных операций с циркулем и линейкой будут опущены[2] (мы их опустили в задаче выше). Однако мы рекомендуем читателям тщательно выполнить каждый шаг процесса выстраивания доказательства и его обоснования, определить уникальность решения и просмотреть альтернативные способы.

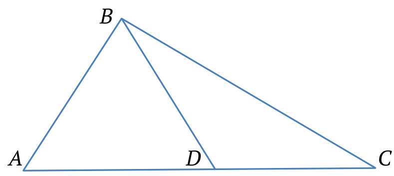
---

[1] То есть не лежащие на одной прямой.

[2] Подробности метода построения геометрических фигур «с помощью циркуля и линейки» см. в школьных учебниках геометрии или, например, в соответствующей статье в «Википедии»: *https://ru.wikipedia.org/wiki/Построение_с_помощью_циркуля_и_линейки*.

Медианы треугольника обладают несколькими важными свойствами.

Теорема 1 (теорема Аполлония). *Сумма квадратов любых двух сторон любого треугольника равна удвоенной сумме квадрата половины третьей стороны и квадрата медианы, делящей третью сторону пополам.*



Доказательство. Если BD — медиана треугольника ABC, то нам нужно доказать, что

$$AB^2 + BC^2 = 2(BD^2 + AD^2).$$

Обозначим $\angle ADB = \alpha$ и $\angle BDC = \beta$. Углы α и β являются дополнительными (до 180°)[1].

Таким образом, $\beta = 180° - \alpha$ и, следовательно,

$$\cos\beta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (1)$$

Теперь применим закон косинусов к треугольникам ABD и BDC:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\alpha,$$

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2CD \cdot BD \cdot \cos\beta.$$

Вспомнив, что $AD = DC$ (поскольку BD — медиана) и подставив (1) во второе равенство, получим, что $AB^2 + BC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$, что и требовалось доказать.

Если обозначить стороны треугольника ABC как $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и положить медиану $BD = m_b$, то после несложных манипу-

[1] **Дополнительными** (supplementary) называются углы, которые взаимно дополняют друг друга до угла 180°. Если такие углы прилегают к общей прямой, то их называют *смежными*. В школьных учебниках дополнительными называют *комплементарные* углы (complementary — дополняющие друг друга до 90°), поэтому во избежание разночтений мы здесь указываем значение суммарного угла.

ляций выражение медианы треугольника через его стороны будет иметь вид:

$$m_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

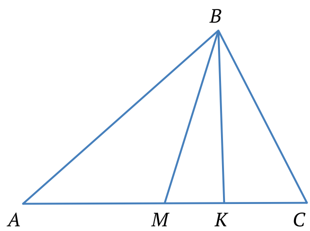
Аналогичные выражения справедливы и для других медиан:

$$m_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$
$$m_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Нетрудно будет использовать приведенные выше формулы, чтобы выразить каждую сторону треугольника через его медианы. Мы предлагаем читателям выполнить эти манипуляции и запомнить формулы как важные и эффективные инструменты для использования в будущем:

$$b = \tfrac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2},$$
$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2},$$
$$c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

Теорема 2. *Каждая медиана треугольника делит площадь треугольника пополам.*

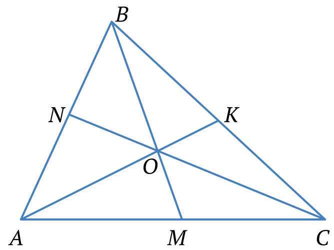


Доказательство. BM — медиана, а BK — высота в треугольнике ABC. Нам нужно доказать, что площади треугольников ABM и BMC равны.

Для доказательства применим формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ah$ (a — основание, h — высота, опущенная к этому основанию) и заметим, что треугольники AMB и MBC имеют общую высоту BK и равные основания. $AM = MC$.

Прямое следствие:

Теорема 3. *Треугольник разделен медианами на шесть треугольников одинаковой площади.*



Доказательство. Доказательство становится очевидным, если сравнить равные площади треугольников ABM и CBM с площадями треугольников, на которые они разделены медианами.

Из равенств $S_{AMB} = S_{AOB} + S_{AOM}$ и $S_{BMC} = S_{BOC} + S_{COM}$ следует, что

$$S_{AOB} + S_{AOM} = S_{BOC} + S_{COM}. \qquad (1)$$

Обратите внимание, что OM, ON и OK (O — геометрический центр) — это медианы в треугольниках AOC, AOB и BOC соответственно. Следовательно, $S_{AOM} = S_{COM}$, $S_{AON} = S_{BON}$ и $S_{BOK} = S_{COK}$.

Мы видим, что из (1) следует $S_{AOB} = S_{BOC}$, или $2S_{BON} = 2S_{BOK}$ и окончательно $S_{BON} = S_{BOK}$.

Аналогично легко показать, что $S_{KOC} = S_{MOC}$. Мы видим, что площади каждого из шести маленьких треугольников равны, и каждая площадь составляет $\frac{1}{6}$ площади большого треугольника ABC.

Геометрический центр треугольника имеет еще одно распространенное название — центр масс, или центр тяжести. Прежде чем объяснить причину этого второго названия, мы введем общее определение центра масс для любой системы материальных точек.

М. Балк и В. Болтянский написали прекрасную статью «Применение понятия центра масс на факультативных занятиях по математике» (в журнале «Математика в школе» № 2, 1984, стр. 45–50), в котором они рассмотрели основные применения различных механических законов в геометрии. Мы ограничиваемся здесь изложением лишь нескольких приемов, тесно связанных с применением свойств центра масс системы точек при решении задач.

В физике материальная точка определяется как объект, размер которого пренебрежимо мал по сравнению с расстояниями в задаче. Для простоты такой объект рассматривается просто как точка (предполагается, что вся его масса сосредоточена в этой одной точке). Если масса m сосредоточена в точке A, то обозначим эту материальную точку как mA. По определению точка Z будет центром масс системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, ..., m_nA_n, если сумма всех соответствующих векторов равна нулевому вектору:

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}.$$

Центр масс — это точка, в которой вся система будет идеально сбалансирована, предполагая однородную плотность и однородное гравитационное поле.

Чтобы лучше понять следующий материал, условимся переводить слова «сосредоточить массу m в точке A» как «отнести количество m к точке A». Выражение «материальная точка mA» должно тогда означать «точку A вместе с количеством m, связанным с точкой A». Количество m будем называть «массой материальной точки mA». Докажем теперь основную теорему о центре масс системы материальных точек.

Теорема 4. *Если точка Z является центром масс (центром масс) системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, ..., m_nA_n, то для любой точки O будет выполняться векторное равенство*:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \tag{1}$$

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы воспользуемся следующим свойством векторов: для любых точек O, A и Z вектор ZA можно выразить как разность векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{ZA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ}$. Когда каждый вектор умножается на m, это дает

$$m\overrightarrow{ZA} = m(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ}). \tag{2}$$

Теперь обратимся к определению центра масс системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, ..., m_nA_n. Если Z — центр масс этой системы материальных точек, то

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}.$$