

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для оказания помощи студентам строительных специальностей вузов при выполнении расчетно-графических работ по сопротивлению материалов, основам строительной механики, теории упругости и пластичности.

Пособие содержит 14 глав по темам расчетно-графических работ. В каждой главе дано краткое изложение теории, приведены основные формулы и уравнения, рассмотрены примеры решения задач, аналогичных задачам в расчетно-графических работах. В конце каждой части пособия приведен сортамент стальных прокатных стержней — уголков, двутавров и швеллеров.

В части 2 пособия содержатся главы, соответствующие учебному материалу 2-го семестра изучения сопротивления материалов — определение перемещений в балках и рамах при прямом изгибе, расчет статически неопределимых балок и рам с помощью метода сил, расчет балок на упругом основании, кручение стержней, сложное сопротивление стержней, устойчивость и продольно-поперечный изгиб стержней.

В пособии использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: сила P , площадь поперечного сечения стержня F . Соотношения между основными механическими величинами в единицах СИ и в технической системе приведены в следующей таблице:

Наименование величины	Е д и н и ц а		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	$1 \text{ Н} \approx 0,1 \text{ кгс}$ $1 \text{ кН} \approx 0,1 \text{ тс}$
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	$1 \text{ Н/м} \approx 0,1 \text{ кгс/м}$ $1 \text{ кН/м} \approx 0,1 \text{ тс/м}$
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Н·м	$1 \text{ Н·м} \approx 0,1 \text{ кгс·м}$ $1 \text{ кН·м} \approx 0,1 \text{ тс·м}$
Напряжение, давление	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ кгс/см}^2$ $1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2$

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также кН/см^2 ($1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$).

Глава 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

1.1. Основные определения и формулы

При изгибе ось балки искривляется (рис. 1.1), что сопровождается появлением прогибов $v(x)$ и углов поворота поперечных сечений $\varphi(x) = v'(x)$, которые принимаются равными углом наклона касательной к изогнутой оси. Эти величины называются линейными и угловыми перемещениями.

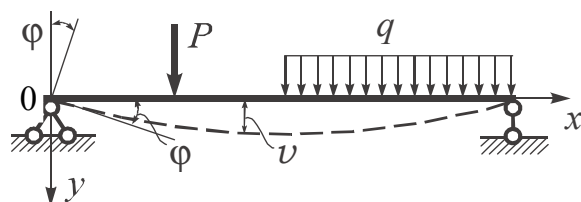


Рис. 1.1

Прогибы считаются положительными, если они происходят в положительном направлении оси Oy . Углы поворота считаются положительными при повороте касательной к изогнутой оси по ходу часовой стрелки.

Для определения законов изменения прогибов балок $v(x)$ при прямом изгибе используются дифференциальные уравнения второго порядка

$$EJv''(x) = -M(x) \quad (1.1)$$

или четвёртого порядка

$$EJv^{IV}(x) = q(x), \quad (1.2)$$

где EJ — жёсткость балки при изгибе; $M(x)$ — изгибающий момент в поперечном сечении; $q(x)$ — распределённая поперечная нагрузка.

При определении перемещений с помощью метода начальных параметров используется выражение

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2!EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3!EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi(x - a_1) \Big|_2 - \frac{M(x - a_2)^2}{2!EJ} \Big|_3 - \frac{P(x - a_3)^3}{3!EJ} \Big|_4 + \frac{q(x - a_4)^4}{4!EJ} \Big|_5 - \frac{q(x - a_5)^4}{4!EJ} \Big|_6. \quad (1.3)$$

Здесь v_0 , φ_0 , M_0 , Q_0 — начальные параметры, представляющие собой прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в начальном сечении $x = 0$, и $\Delta\varphi$ — взаимный угол поворота сечений в промежуточном шарнире. Формула (1.3) соответствует воздействиям и участкам, показанным на рис. 1.2.

Неизвестные в начале расчёта начальные параметры и величины $\Delta\varphi$ подлежат определению из соответствующих граничных условий.

Общим методом определения перемещений в стержневых системах является метод Мора. Метод Мора сводится к вычислению интегралов, которые представляют собой работу единичных сил $\bar{P} = 1$ или единичных моментов $\bar{M} = 1$ на искомах перемещениях.

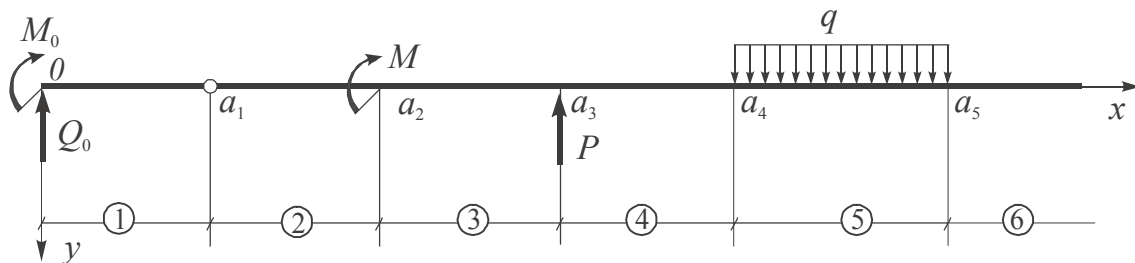


Рис. 1.2

Для балок и рам используется формула Мора, содержащая изгибающие моменты:

$$\Delta_{iP} = \sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i M_P}{EJ} ds. \quad (1.4)$$

Здесь \bar{M}_i — изгибающий момент от действия единичной силы или единичного момента, прикладываемых по направлению искомого перемещения; M_P — изгибающий момент от действия заданных нагрузок. При определении линейных перемещений прикладывается единичная сила, а при определении угловых перемещений — единичный момент.

Для балок и стержневых систем, состоящих из прямых стержней с постоянной жесткостью EJ , вычисление интегралов Мора можно произвести с помощью правила Верещагина (правило «перемножения» эпюр) по формуле

$$\Delta_{iP} = \sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i M_P}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} y_C \Omega_P, \quad (1.5)$$

где y_C — ордината в линейной эпюре \bar{M}_i под центром тяжести площади Ω_P криволинейной эпюры M_P (рис. 1.3).

При использовании формулы (1.5) сложную эпюру надо разбить на простые фигуры, у которых известны площадь и положение центра тяжести. Наиболее часто элементами разбиения являются трапеции и квадратные параболы. Площадь квадратной параболы на участке длиной l с нулевыми начальным и конечным значениями определяется по формуле

$$\Omega_q = \frac{ql^3}{12}, \quad (1.6)$$

где q — интенсивность равномерно распределенной нагрузки.

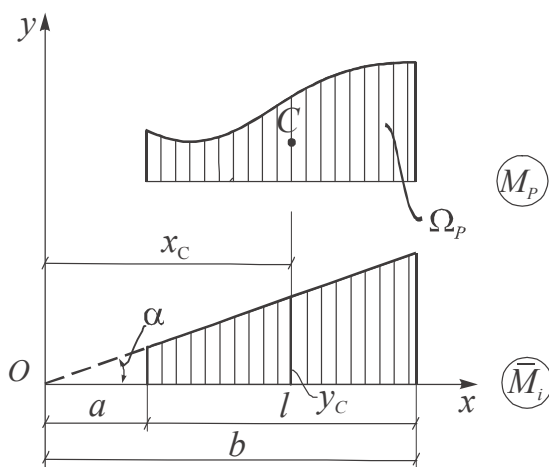


Рис. 1.3

Если эпюры M_p и \bar{M}_i на участке длиной l представляют собой трапеции (рис. 1.4), то формулу (1.5) можно привести к следующему виду (формула «перемножения» трапеций):

$$\Delta_{iP} = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (1.7)$$

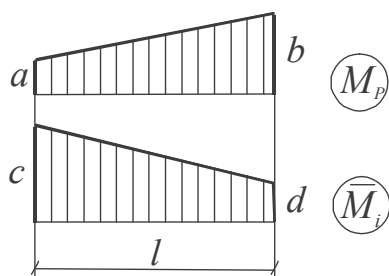


Рис. 1.4

Если интеграл Мора имеет положительное значение, то направление перемещения совпадает с направлением действия соответствующих единичной силы или единичного момента. В противном случае перемещение противоположно этому направлению.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.1

Для шарнирно опертой балки (рис. 1.5, а) построить эпюры Q и M и выполнить подбор сечения из условия прочности в виде стального прокатного двутавра. Определить с помощью метода начальных параметров и метода Мора значения прогибов и углов поворота в характерных сечениях балки и построить эпюры v и φ . Определить числовые значения v и φ . В расчетах принять $R = 21 \text{ кН/см}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_f = 1,2$ и $\gamma_c = 0,9$.

Определяем опорные реакции:
 $\Sigma M_A = 0, 10 - 15 \cdot 1 - 10 \cdot 3 \cdot 2,5 + 4R_B = 0,$
 $R_B = 20 \text{ кН};$
 $\Sigma M_B = 0; 10 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4R_A = 0,$
 $R_A = 25 \text{ кН};$
 $\Sigma Y = 0$ (проверка), $15 + 10 \cdot 3 - 25 - 20 = 45 - 45 = 0.$

Определяем значения изгибающих моментов и поперечных сил в характерных сечениях балки и строим эпюры Q и M (рис. 1.5, б, в).

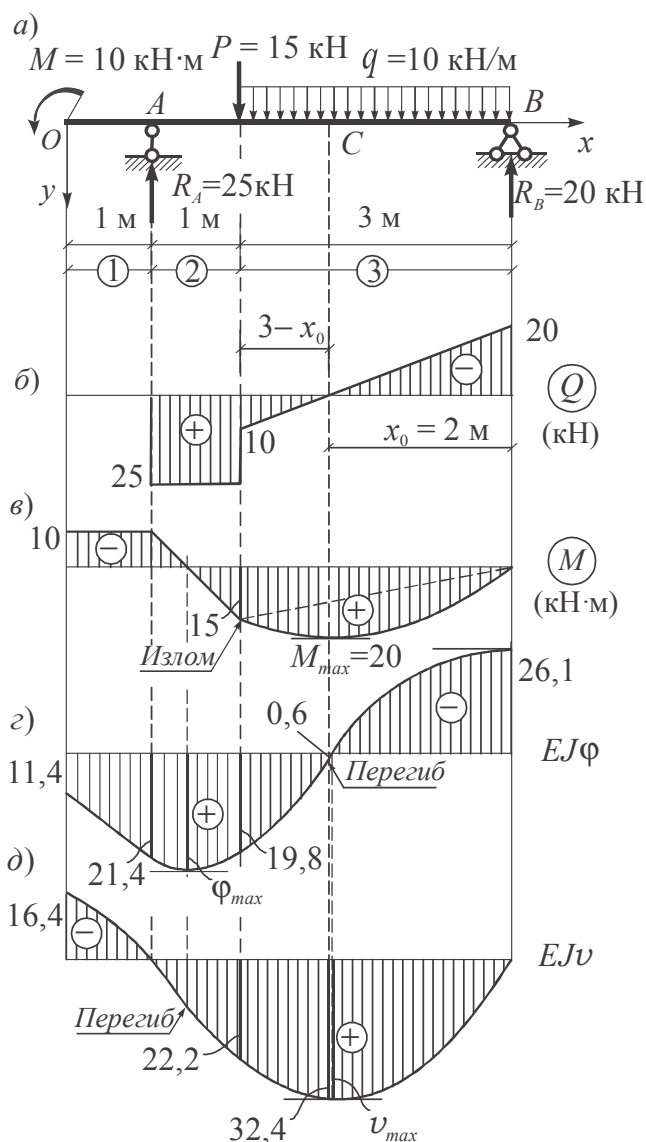


Рис. 1.5

Определяем экстремальное значение M_{\max} в пролете. Из пропорции находим положение сечения, где действует максимальный момент:

$$\frac{20}{x_0} = \frac{10}{3 - x_0}, \quad x_0 = 2 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M_C = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем расчетное значение наибольшего изгибающего момента:

$$M_P = M_H \gamma_f = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Требуемый момент сопротивления сечения равен

$$W_z \geq \frac{M_P}{\gamma_c R} = \frac{24 \cdot 10^2}{0,9 \cdot 21} = 127 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем: $\Gamma 18$, $W_z = 143 \text{ см}^3$, $J_z = 1290 \text{ см}^4$.

Составим с помощью формулы (1.3) выражение для прогиба балки в пределах трех характерных участков:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 - \frac{R_A (x-1)^3}{3! EJ} \Big|_2 + \frac{P(x-2)^3}{3! EJ} + \frac{q(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_3.$$

Начальные параметры равны:

$$x = 0, \quad M_0 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad Q_0 = 0.$$

Для определения неизвестных начальных параметров v_0 и φ_0 используем граничные условия

$$x = 1 \text{ м}, \quad v = v_0 + 1 \cdot \varphi_0 + \frac{10 \cdot 1^2}{2 EJ} = 0;$$

$$x = 5 \text{ м}, \quad v = v_0 + 5\varphi_0 + \frac{10 \cdot 5^2}{2 EJ} - \frac{25 \cdot 4^3}{6 EJ} + \frac{15 \cdot 3^3}{6 EJ} + \frac{10 \cdot 3^4}{24 EJ} = 0.$$

Решаем систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_0 + \varphi_0 &= -\frac{5}{EJ}, \\ v_0 + 5\varphi_0 &= \frac{40,42}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad v_0 = -\frac{16,4}{EJ}, \quad \varphi_0 = \frac{11,4}{EJ}.$$

В качестве проверки вычислим значения v_0 и φ_0 с помощью метода Мора. Построим единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 1.6, а, б) и вычислим интегралы Мора с помощью правила Верещагина, т.е. «перемножим» единичные эпюры с эпюрой моментов от действия заданных нагрузок $M = M_P$:

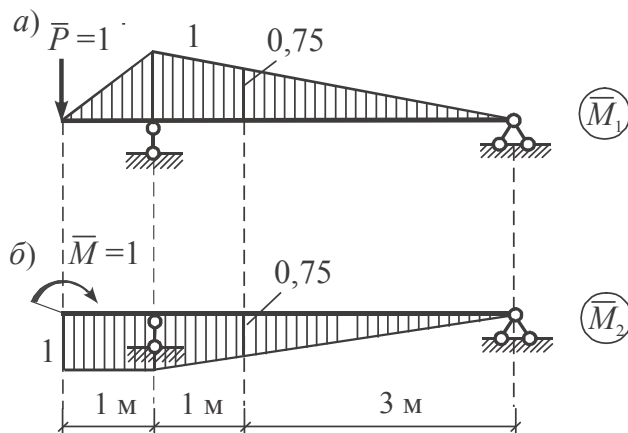


Рис. 1.6

$$v_0 = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 + \frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 10 - 2 \cdot 0,75 \cdot 15 + \right. \\ \left. + 10 \cdot 0,75 - 15 \cdot 1) - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 - \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \right] = -\frac{16,35}{EJ};$$

$$\varphi_0 = \int_0^l \frac{\overline{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-10 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{6} (-2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 0,75 - \right. \\ \left. - 10 \cdot 0,75 + 15 \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \right] = \frac{11,35}{EJ}.$$

Результаты определения v_0 и φ_0 с помощью метода начальных параметров и метода Мора практически совпали. Запишем окончательные выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$:

$$v(x) = \frac{1}{EJ} \left[-16,4 + 11,4x + \frac{10x^2}{2!} \Big|_1 - \frac{25(x-1)^3}{3!} \Big|_2 + \frac{15(x-2)^3}{3!} + \frac{10(x-2)^4}{4!} \Big|_3 \right];$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{1}{EJ} \left[11,4 + 10x \Big|_1 - \frac{25(x-1)^2}{2!} \Big|_2 + \frac{15(x-2)^2}{2!} + \frac{10(x-2)^3}{3!} \Big|_3 \right].$$

Вычислим значения v и φ в характерных сечениях балки:

$$x=0, \quad v=v_0 = -\frac{16,4}{EJ}, \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{11,4}{EJ};$$

$$x=1 \text{ м}, \quad v=0 \text{ (граничное условие)}, \quad \varphi = \frac{1}{EJ} (11,4 + 10 \cdot 1) = \frac{21,4}{EJ};$$

$$x=2 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left(-16,4 + 11,4 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^2}{2} - \frac{25 \cdot 1^3}{6} \right) = \frac{22,2}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(11,4 + 10 \cdot 2 - \frac{25 \cdot 1^2}{2} \right) = \frac{18,9}{EJ};$$

$$x=3 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left(-16,4 + 11,4 \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3^2}{2} - \frac{25 \cdot 2^3}{6} + \frac{15 \cdot 1^3}{6} + \frac{10 \cdot 1^4}{24} \right) = \frac{32,4}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(11,4 + 10 \cdot 3 - \frac{25 \cdot 2^2}{2} + \frac{15 \cdot 1^2}{2} + \frac{10 \cdot 1^3}{6} \right) = \frac{0,6}{EJ};$$

$$x=5 \text{ м}, \quad v=0 \text{ (граничное условие)},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(11,4 + 10 \cdot 5 - \frac{25 \cdot 4^2}{2} + \frac{15 \cdot 3^2}{2} + \frac{10 \cdot 3^3}{6} \right) = -\frac{26,1}{EJ}.$$

В качестве проверки вычислим некоторые значения v и φ с помощью метода Мора:

$$v(2) = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{6} (2 \cdot 15 \cdot 0,75 - 10 \cdot 0,75) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 0,75 + \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 0,75 \right] = \frac{22,19}{EJ};$$

$$\varphi(5) = \int_0^l \frac{\bar{M}_4 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{6} (-2 \cdot 15 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,25) - \right. \\ \left. - \frac{3}{6} (2 \cdot 15 \cdot 0,25 + 15 \cdot 1) - \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1 + 0,25}{2} \right] = -\frac{26,15}{EJ}.$$

Соответствующие единичные эпюры приведены на рис. 1.7, а, б.

Результаты вычислений практически совпали. Строим эпюры v и φ , отметив их особенности (рис. 1.5, з, д). Ординаты эпюр умножены на жесткость EJ .

В сечении, где Q обращается в нуль, на эпюре φ имеется точка перегиба. В сечении, где $M = 0$ (участок 2), на эпюре φ имеется экстремум φ_{\max} , а на эпюре v — точка перегиба. В сечении, где $\varphi = 0$ (участок 3), прогиб имеет экстремальное значение v_{\max} .

В пределах первого участка φ изменяется по линейному закону. В сечении B касательная к эпюре φ параллельна оси.

Определим числовые значения v и φ . Размерность длины в числителе переведем в сантиметры:

$$v(3) = \frac{32,4}{EJ} = \frac{32,4 \cdot (10^2)^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} = 1,2 \text{ см};$$

$$\varphi(5) = -\frac{26,1}{EJ} = -\frac{26,1 \cdot (10^2)^2}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} = -0,00963 \text{ рад} = -0,55^\circ.$$

Задача 1.2

Для балки с промежуточным шарниром (рис. 1.8, а) определить значения поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов и углов поворота в характерных сечениях и построить эпюры этих величин.

Разбиваем балку на несомую BC и несущую AB части (балки). Производим статический расчет несомой балки BC (рис. 1.8, б):

$$\Sigma M_B = 0, \quad -14 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 + 5R_C = 0, \quad R_C = 15 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C = 0, \quad 14 \cdot 3 \cdot 3,5 - 12 - 5R_B = 0, \quad R_B = 27 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 14 \cdot 3 - 27 - 15 = 42 - 42 = 0.$$

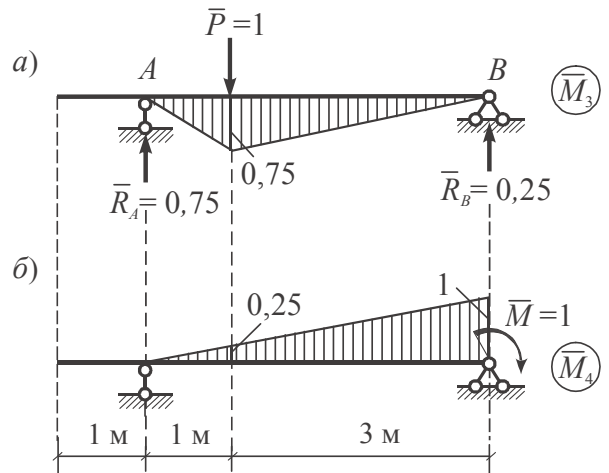


Рис. 1.7

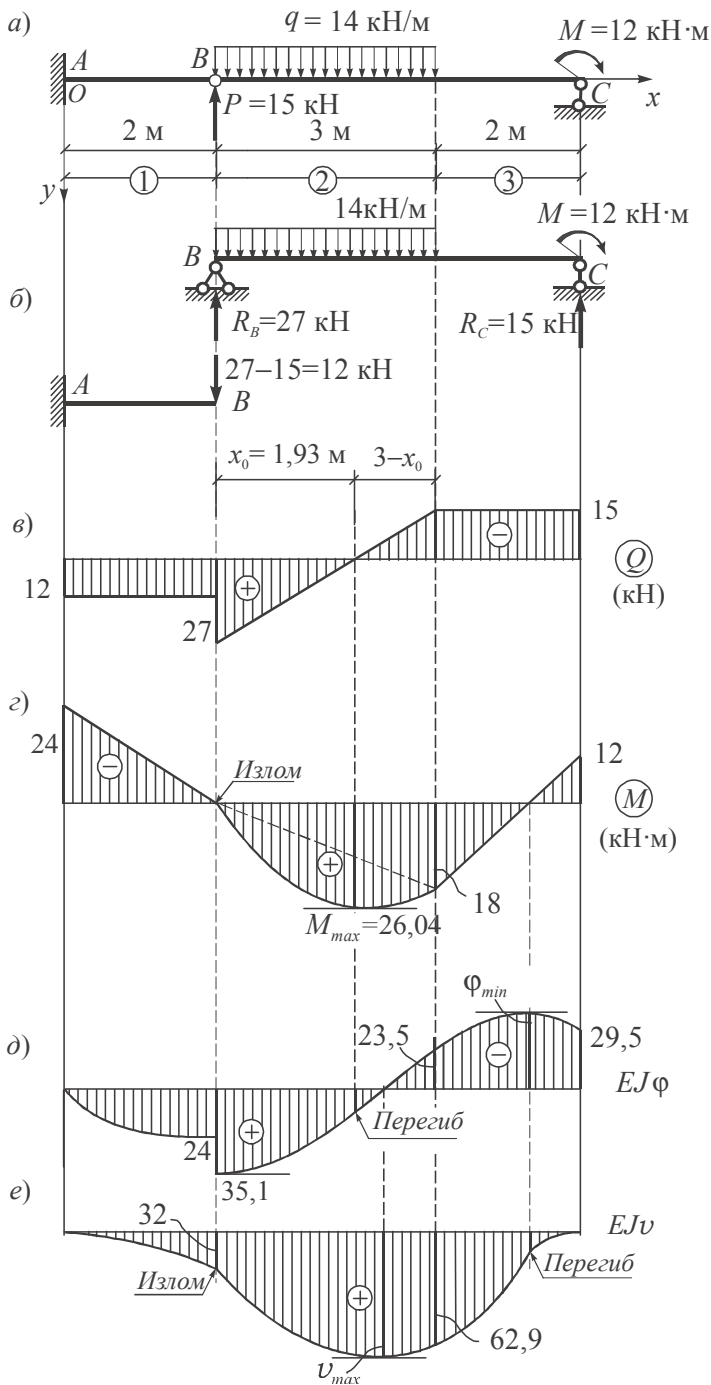


Рис. 1.8

Эпюры Q и M приведены на рис. 1.8, в, г. Определяем экстремальное значение изгибающего момента в пролете BC :

$$\frac{27}{x_0} = \frac{15}{3 - x_0}, \quad x_0 = 1,93 \text{ м};$$

$$M_{\max} = 27 \cdot 1,93 - \frac{14 \cdot 1,93^2}{2} = 26,04 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Запишем выражение для прогиба балки с помощью метода начальных параметров:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi_B (x - 2) - \frac{P(x - 2)^3}{3! EJ} + \frac{q(x - 2)^4}{4! EJ} \Big|_2 - \frac{q(x - 5)^4}{4! EJ} \Big|_3.$$

Начальные параметры равны: $x = 0$, $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $M_0 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $Q_0 = 12 \text{ кН}$.

Для определения неизвестного взаимного угла поворота сечений $\Delta\varphi_B$ в промежуточном шарнире используем граничное условие:

$$x = 7 \text{ м}, \quad v = \frac{24 \cdot 7^2}{2 EJ} - \frac{12 \cdot 7^3}{6 EJ} + 5\Delta\varphi_B - \frac{15 \cdot 5^3}{6 EJ} + \frac{14 \cdot 5^4}{24 EJ} - \frac{14 \cdot 2^4}{24 EJ} = 0, \quad \Delta\varphi_B = \frac{11,1}{EJ}.$$

В качестве проверки определим значение $\Delta\varphi_B$ с помощью метода Мора. Поскольку $\Delta\varphi_B$ представляет собой взаимное угловое перемещение (угол поворота правого сечения в шарнире B относительно левого сечения), приложим в сечении B парный единичный момент. Соответствующая единичная эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 1.9.

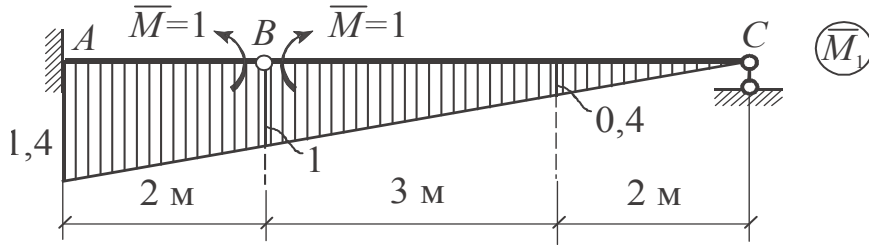


Рис. 1.9

«Перемножаем» единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов:

$$\Delta\varphi_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{2}{6} (2 \cdot 24 \cdot 1,4 + 24 \cdot 1) + \frac{3}{6} (2 \cdot 18 \cdot 0,4 + 18 \cdot 1) + \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1+0,4}{2} + \frac{2}{6} (2 \cdot 18 \cdot 0,4 - 12 \cdot 0,4) \right] = \frac{11,05}{EJ}.$$

Результаты вычисления практически совпали. Запишем окончательные выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$:

$$v(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{24x^2}{2!} - \frac{12x^3}{3!} \Big|_1 + 11,1(x-2) - \frac{15(x-2)^3}{3!} + \frac{14(x-2)^4}{4!} \Big|_2 - \frac{14(x-5)^4}{4!} \Big|_3 \right];$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{1}{EJ} \left[24x - \frac{12x^2}{2!} \Big|_1 + 11,1 - \frac{15(x-2)^2}{2!} + \frac{14(x-2)^3}{3!} \Big|_2 - \frac{14(x-5)^3}{3!} \Big|_3 \right].$$

Вычислим значения v и φ в характерных сечениях балки:

$$x=0, \quad v=v_0=0, \quad \varphi=\varphi_0=0;$$

$$x=2 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{24 \cdot 2^2}{2} - \frac{12 \cdot 2^3}{6} \right) = \frac{32}{EJ},$$

$$\varphi_{\text{лев}} = \frac{1}{EJ} \left(24 \cdot 2 - \frac{12 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{24}{EJ};$$

$$\varphi_{\text{прав}} = \varphi_{\text{лев}} + \Delta\varphi_B = \frac{1}{EJ} (24 + 11,1) = \frac{35,1}{EJ};$$

$$x=5 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{24 \cdot 5^2}{2} - \frac{12 \cdot 5^3}{6} + 11,1 \cdot 3 - \frac{15 \cdot 3^3}{6} + \frac{14 \cdot 3^4}{24} \right) = \frac{62,9}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(24 \cdot 5 - \frac{12 \cdot 5^2}{2} + 11,1 - \frac{15 \cdot 3^2}{2} + \frac{14 \cdot 3^3}{6} \right) = -\frac{23,5}{EJ}.$$

$$x=7 \text{ м}, \quad v=0 \text{ (шарнирная опора),}$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(24 \cdot 7 - \frac{12 \cdot 7^2}{2} + 11,1 - \frac{15 \cdot 5^2}{2} + \frac{14 \cdot 5^3}{6} - \frac{14 \cdot 2^3}{6} \right) = -\frac{29,5}{EJ}.$$

В качестве проверки определим некоторые значения v и φ с помощью метода Мора. Соответствующие единичные эпюры приведены на рис. 1.10, 1.11 и 1.12.

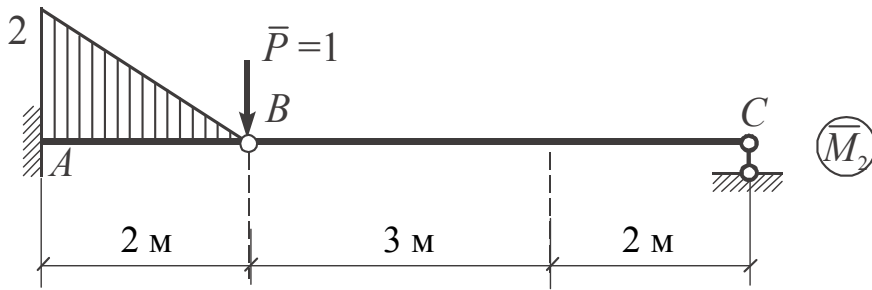


Рис. 1.10

$$v(2) = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{32}{EJ}.$$

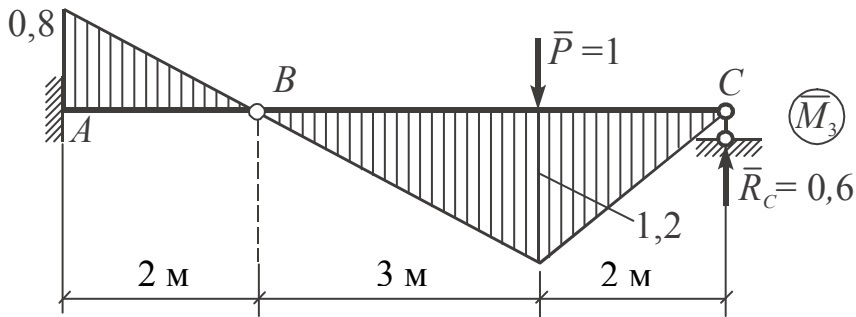


Рис. 1.11

$$v(5) = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 0,8 + \frac{1}{2} 18 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 1,2 + \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1,2 + \frac{2}{6} (2 \cdot 18 \cdot 1,2 - 12 \cdot 1,2) \right] = \frac{62,9}{EJ}.$$

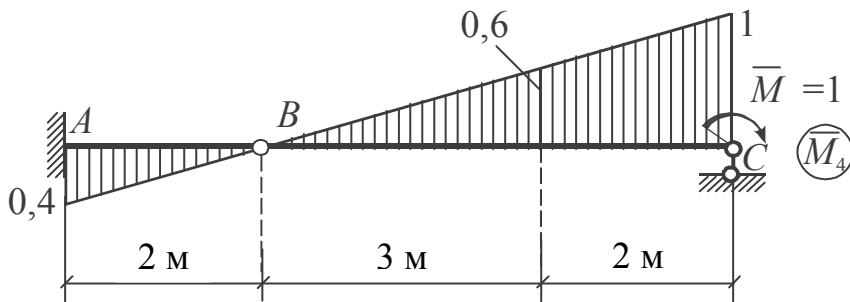


Рис. 1.12

$$\varphi(7) = \int_0^l \frac{\bar{M}_4 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 0,4 - \frac{1}{2} 18 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 0,6 - \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 0,6 + \frac{2}{6} (-2 \cdot 18 \cdot 0,6 + 2 \cdot 12 \cdot 1 - 18 \cdot 1 + 12 \cdot 0,6) \right] = -\frac{29,45}{EJ}.$$

Результаты вычислений практически совпали. Эпюры v и φ приведены на рис. 1.8, δ , e . Отметим их особенности. В сечении B угол поворота имеет скачок, а касательные к эпюре φ параллельны оси. На эпюре v в этом сечении излом и смена знака кривизны. В сечении, где Q обращается в нуль, на эпюре φ имеется точка перегиба. В сечении на третьем участке, где $M = 0$, угол поворота имеет экстремальное значение φ_{\min} , а на эпюре v имеется точка перегиба. В сечении на втором участке, где $\varphi = 0$, прогиб имеет экстремальное значение v_{\max} .

Задача 1.3

Для балки (рис. 1.13, а) построить эпюры Q и M и определить прогиб и угол поворота в сечении C .

Данная балка является статически неопределимой, поскольку для определения трех опорных реакций R_A , R_B и M_B можно использовать два уравнения равновесия $\Sigma Y = 0$ и $\Sigma M = 0$. Составим выражение для прогиба балки с помощью метода начальных параметров:

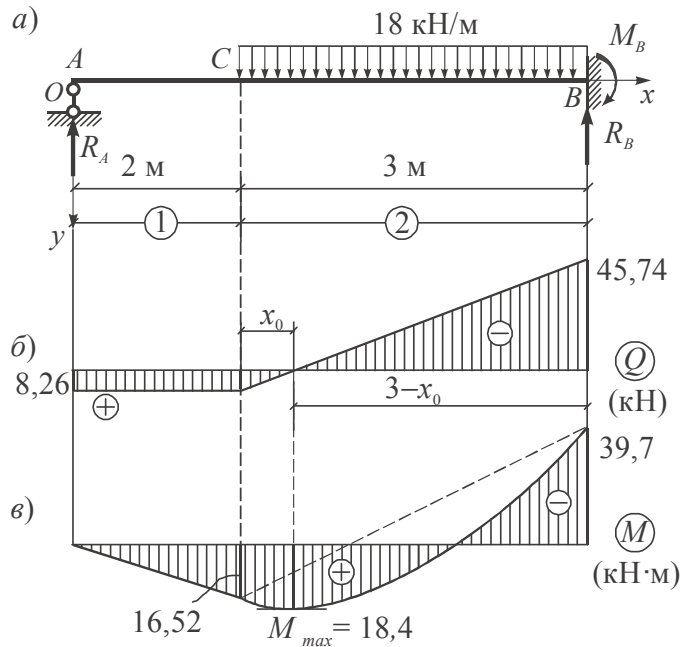


Рис. 1.13

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_2.$$

Начальные параметры равны:

$$x = 0, \quad v_0 = 0, \quad M_0 = 0.$$

Для определения неизвестных начальных параметров φ_0 и Q_0 используем граничные условия:

$$x = 5 \text{ м}, \quad v = 0, \quad \varphi = 0.$$

Составим выражение для углов поворота $\varphi(x)$ и раскроем граничные условия:

$$\varphi(x) = v'(x) = \varphi_0 - \frac{Q_0 x^2}{2! EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-2)^3}{3! EJ} \Big|_2;$$

$$v(5) = 5\varphi_0 - \frac{Q_0 \cdot 5^3}{6 EJ} + \frac{18 \cdot 3^4}{24 EJ} = 0;$$

$$\varphi(5) = \varphi_0 - \frac{Q_0 \cdot 5^2}{2 EJ} + \frac{18 \cdot 3^3}{6 EJ} = 0.$$

Решаем систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 5\varphi_0 - \frac{20,83Q_0}{EJ} &= -\frac{60,75}{EJ}; \\ \varphi_0 - \frac{12,5Q_0}{EJ} &= -\frac{81}{EJ}. \end{aligned} \right\} \varphi_0 = \frac{22,3}{EJ}, \quad Q_0 = R_A = 8,26 \text{ кН}.$$

Определяем значения Q и M в характерных сечениях балки:

$$Q_A = Q_C = R_A = 8,26 \text{ кН}, \quad Q_B = 8,26 - 18 \cdot 3 = -45,74 \text{ кН},$$

$$M_A = M_0 = 0, \quad M_C = 8,26 \cdot 2 = 16,52 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_B = 8,26 \cdot 5 - 18 \cdot 3 \cdot 1,5 = -39,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 1.13, б, в. Определяем экстремальное значение момента:

$$\frac{8,26}{x_0} = \frac{45,74}{3 - x_0}, \quad x_0 = 0,46 \text{ м}.$$

$$M_{max} = 8,26 \cdot 2,46 - \frac{18 \cdot 0,46^2}{2} = 18,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем прогиб и угол поворота в сечении C :

$$v_C = v(2) = \frac{1}{EJ} \left(22,3 \cdot 2 - \frac{8,26 \cdot 2^3}{6} \right) = \frac{33,6}{EJ};$$

$$\varphi_C = \varphi(2) = \frac{1}{EJ} \left(22,3 - \frac{8,26 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{5,78}{EJ}.$$

Задача 1.4

Для консольной рамы со стержнями различной жесткости (рис. 1.14, а) определить с помощью метода Мора перемещение точки K .

Построим грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 1.14, б, в, г, д). Поскольку при определении перемещений в балках и рамах используется интеграл Мора, содержащий изгибающие моменты, построение эпюр Q и N не обязательно. Для определения вертикального и горизонтального перемещений точки K в этом сечении приложены единичные силы $\bar{P} = 1$, а для определения угла поворота — единичный момент $\bar{M} = 1$.

«Перемножаем» грузовую и единичные эпюры в пределах длины каждого стержня и суммируем результаты:

$$\Delta_{1P} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{30-6}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot 2 \right) = \frac{6}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \left[\frac{3}{6} (-2 \cdot 30 \cdot 3 + 6 \cdot 3) + \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] = -\frac{27}{EJ};$$

$$\Delta_{3P} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{30-6}{2} \cdot 3 \cdot 1 - \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot 1 \right) = -\frac{3}{EJ}.$$

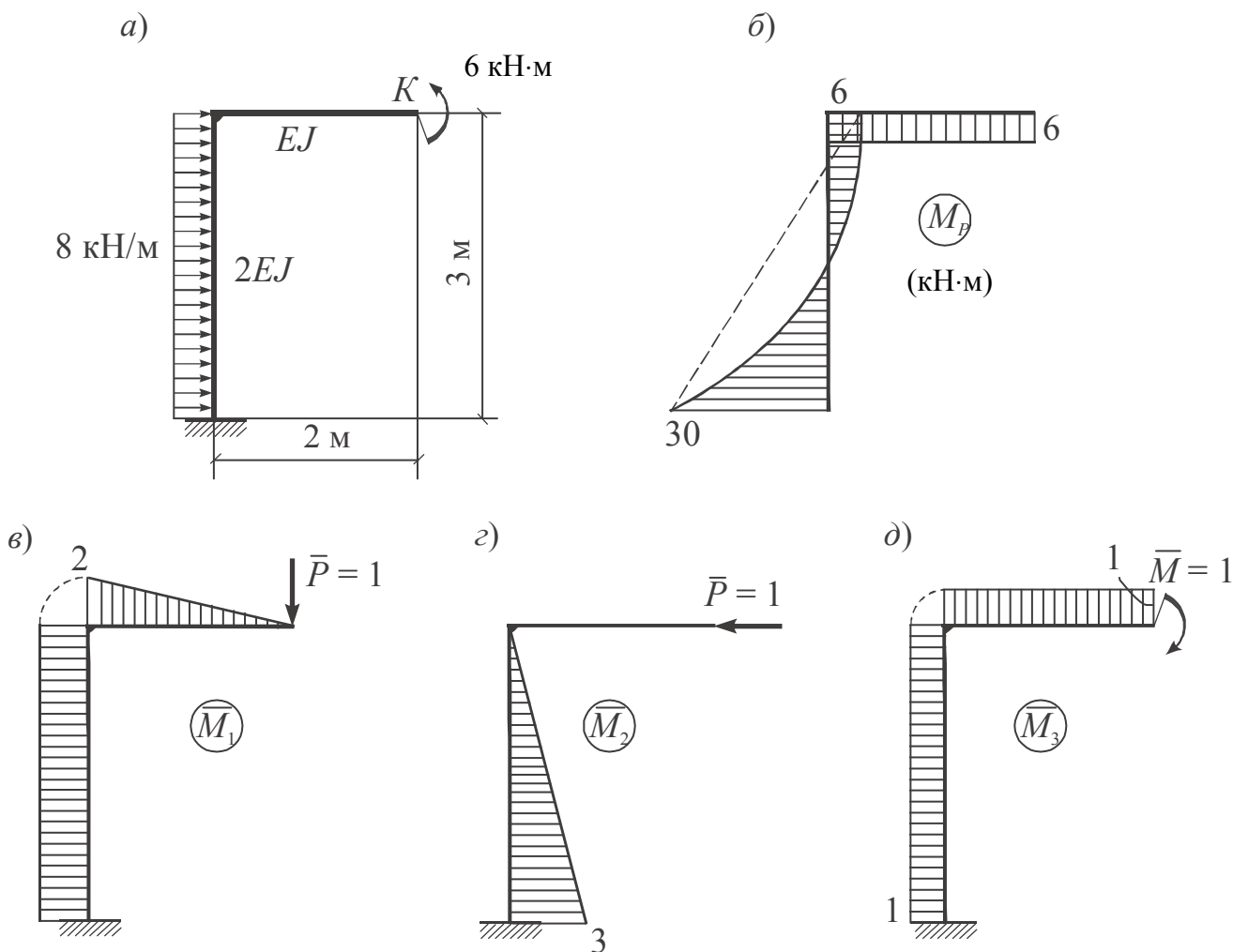


Рис. 1.14

Точка K перемещается вниз и вправо. Сечение K поворачивается против хода часовой стрелки.

Задача 1.5

Для шарнирно опертой рамы (рис. 1.15, а) определить с помощью метода Мора перемещение точки K .

Определяем опорные реакции от действия заданных нагрузок:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0, & \quad H_A = 6 \text{ кН}; \\ \Sigma M_A = 0, & \quad -12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2 - 18 + 3V_B = 0, \quad V_B = 28 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B = 0, & \quad 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2 - 18 - 3V_A = 0, \quad V_A = 8 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, & \quad -12 \cdot 3 + 8 + 28 = -36 + 36 = 0. \end{aligned}$$

Строим грузовую эпюру изгибающих моментов (рис. 1.15, б).

Точка K может иметь только горизонтальное перемещение. Приложим в точке K горизонтальную единичную силу $\bar{P} = 1$ и единичный момент $\bar{M} = 1$ и построим единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 1.15, в, г). «Перемножив» эти эпюры с грузовой эпюрой M_P , получим

$$\Delta_{1P} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 12 \cdot 2 \cdot 2 \right) + \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 12 \cdot 2 - 18 \cdot 2) + \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = \frac{54,3}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \cdot 12 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 12 \cdot 1 - 18 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = \frac{24,5}{EJ}.$$

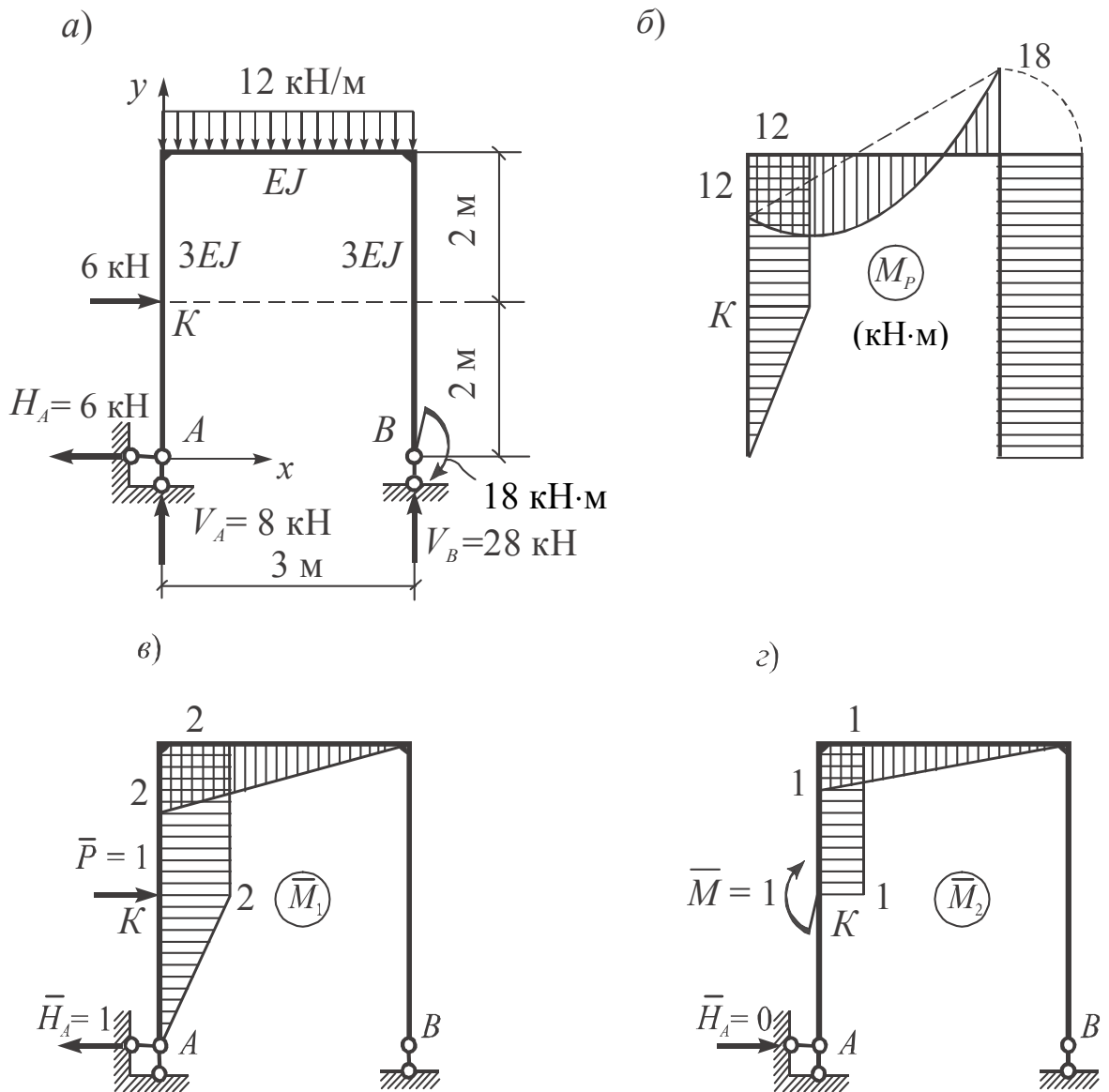


Рис. 1.15

Точка K перемещается вправо, сечение K поворачивается по ходу часовой стрелки.

Глава 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И РАМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СИЛ

2.1. Основные определения и формулы

В статически неопределимых стержневых системах число неизвестных опорных реакций или внутренних усилий превышает число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для их определения. Разность между ними характеризует степень статической неопределимости системы n , т.е. число избыточных или «лишних» связей.

Наличие промежуточного шарнира, соединяющего два стержня (простой шарнир), понижает степень статической неопределимости на единицу. Наличие шарнира, соединяющего k стержней, понижает степень статической неопределимости на величину $k - 1$, поскольку такой шарнир эквивалентен $k - 1$ простым шарнирам.

На рис. 2.1 показана один раз статически неопределимая балка, для которой $n = 3 - 2 = 1$. Рама, изображенная на рис. 2.2, два раза статически неопределима ($n = 6 - 3 - 1 = 2$). Напомним, что жесткая заделка эквивалентна трем опорным стержням.

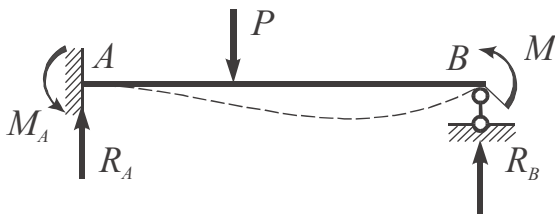


Рис. 2.1

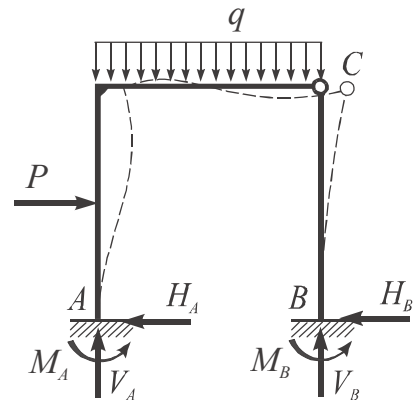


Рис. 2.2

Степень статической неопределимости плоской стержневой системы можно определить по формуле

$$n = -W = -(3Д - 2Ш - C_0), \quad (2.1)$$

где W — число степеней свободы системы; $Д$ — число жестких (геометрически неизменяемых) элементов, условно называемых дисками; $Ш$ — число простых шарниров и C_0 — число опорных стержней.

Применив формулу (2.1) для рамы, изображенной на рис. 2.2, получим

$$n = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 6) = 2.$$

Таким образом, при $n \geq 1$ система является статически неопределимой, при $n = 0$ она статически определима, а при $n < 0$ представляет собой геометрически изменяемую систему или «механизм».

При расчете статически неопределимых стержневых систем необходимо использовать дополнительные уравнения, составляемые из условий деформации системы. Одним из основных методов расчета статически неопределимых стержневых систем является метод сил.

При использовании метода сил надо устранить (отбросить) в заданной статически неопределимой системе «лишние» связи и образовать так называемую основную систему, которая должна быть геометрически и мгновенно неизменяемой. Основных систем может быть несколько, из них выбирается наиболее удобная для расчета.

В основной системе по направлению реакций в отброшенных связях прикладываются неизвестные силы или моменты X_1, X_2, \dots, X_n . Они представляют собой опорные реакции или внутренние усилия в сечениях, где устранены «лишние» связи. Поставив условие, что деформации основной и заданной систем должны быть одинаковыми, надо в основной системе приравнять к нулю линейные или угловые перемещения по направлению реакций в отброшенных связях от совместного действия нагрузок и неизвестных. Таким образом можно составить дополнительные уравнения, которые позволяют определить неизвестные X_1, X_2, \dots, X_n , т.е. раскрыть статическую неопределимость задачи.

Рассмотрим основные системы для один раз статически неопределимой балки (рис. 2.3, а).

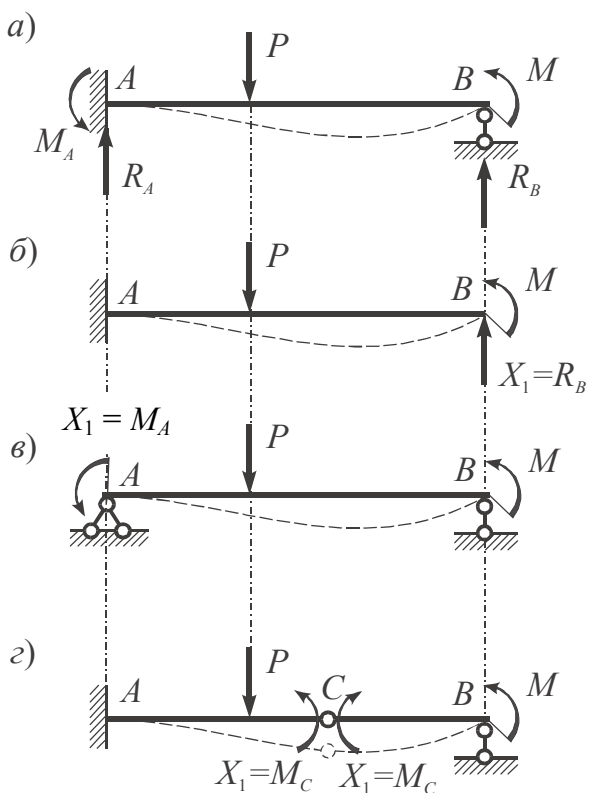


Рис. 2.3

Для образования первой основной системы отброшена шарнирная опора B (рис. 2.3, б). Неизвестным является опорная реакция $X_1 = R_B$. Дополнительное уравнение составляется из условия равенства нулю прогиба в точке B в основной системе от совместного действия нагрузок и неизвестного X_1 :

$$v_B = v_{BP} + v_{BX_1} = 0.$$

Для образования второй основной системы жесткая заделка A заменена шарнирно неподвижной опорой (рис. 2.3, в). Неизвестным является реактивный момент $X_1 = M_A$. Дополнительное уравнение характеризует равенство нулю угла поворота в сечении A основной системы:

$$\varphi_A = \varphi_{AP} + \varphi_{AX_1} = 0.$$

Для образования третьей основной системы в сечении C введен шарнир (рис. 2.3, z). Незвестным является изгибающий момент $X_1 = M_C$, приложенный по обе стороны от шарнира. Такое неизвестное называется парным. Дополнительное уравнение характеризует равенство углов поворота сечений в точке C основной системы, т.е. равенство нулю взаимного угла поворота:

$$\Delta\varphi_{CP} + \Delta\varphi_{CX_1} = 0.$$

Решая дополнительные уравнения, можно определить все неизвестные метода сил. Если в результате решения знак неизвестного X_i оказался положительным, то это означает, что его направление соответствует принятому в начале расчета, а если отрицательным, то его направление надо изменить на противоположное.

Дополнительные уравнения удобно записывать в так называемой канонической форме метода сил:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) относятся к выбранной основной системе и характеризуют равенство нулю линейных или угловых перемещений по направлению реакций в отброшенных (устраненных) связях. Коэффициенты системы δ_{ij} представляют собой перемещения по направлению реакций в отброшенных связях от действия единичных сил или моментов $X_j = 1$. Стоящие на главной диагонали системы (2.2) коэффициенты $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$ называются главными коэффициентами. Они всегда являются положительными.

Коэффициенты δ_{ij} ($i \neq j$) называются побочными коэффициентами. Для них на основании теоремы Бетти о взаимности работ справедливо равенство $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Побочные коэффициенты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Величины Δ_{iP} называются грузовыми или свободными членами. Они равны перемещениям в основной системе по направлению реакций в отброшенных связях от действия заданных нагрузок. Грузовые члены могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Отметим, что при рациональном выборе основной системы часть побочных коэффициентов и грузовых членов обращается в нули, что приводит к упрощению расчета.

Вид канонических уравнений не зависит от выбора основной системы, а их число равно степени статической неопределимости заданной системы.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru