Содержание

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Говорят, что во многих странах, особенно в США, дети боятся математики и считают ее «непопулярным предметом». Но в Китае ситуация совершенно иная. Многие дети любят математику, и их оценки по математике весьма высоки. Действительно, математика – это предмет, в котором китайцы превосходно разбираются. Если вы встретите китайских школьников в начальных и средних школах США, будьте уверены, что именно они являются лучшими в классе по математике.

Китайские дети демонстрируют свое превосходство уже на начальном этапе счета чисел.

Китайцы могут выразить целые числа от 1 до 10 одной рукой, тогда как жителям других стран пришлось бы использовать две.

У китайцев давно существует понятие цифры, и они используют наиболее удобную десятичную систему (во многих странах до сих пор сохранились остатки двенадцатеричных и шестидесятеричных систем).

Все китайские иероглифы состоят из одиночных слогов, которые легко произносить. Например, школьники быстро осваивают таблицу умножения, и даже слабоуспевающие ученики знают, что «трижды семь равно двадцати одному». А вот иностранным детям таблица умножения дается намного труднее. Хотите верьте, хотите нет, но вы можете, конечно, выучить таблицу умножения на английском языке, а затем пересказать ее, но сделать это на английском языке гораздо сложнее, чем на китайском.

Китайцам требуется одна-две минуты, чтобы запомнить $\pi = 3{,}14159...$ с точностью до пятого знака после запятой. Однако для того, чтобы запомнить эти цифры, русские придумали различные стихотворения. В первом слове три буквы, во втором – одна, и так далее...[1] Чтобы запомнить π, сначала выучите стих, потом посчитайте буквы. На наш взгляд, это просто лишний труд, но они относятся к этому как к волшебному способу запоминания.

Прикладные задачи на четыре арифметических действия и их арифметические решения также являются важной особенностью китайской математики. С древних времен китайцы составили множество прикладных задач, которые имеют тесную связь с реальностью и повседневной жизнью. Их ре-

---

[1] «Это я знаю и помню прекрасно» – мнемонику придумал Е. Я. Терсков, учитель одной из московских школ. Его ученица Эся Чериковер придумала продолжение «Пи многие знаки мне лишни, напрасны». Вместе эти две мнемоники дают 11 знаков после запятой: 3,14159265358. – *Прим. ред.*

шения просты и элегантны, а также продуманы и разнообразны, что помогает повысить интерес учащихся к учебе и обогатить их знаниями. Например:

«В монастыре есть сто монахов и сто булочек. Один большой монах съедает три булочки, а три маленьких монаха – одну булочку. Сколько больших и сколько маленьких монахов живут в монастыре?»

Большинство иностранцев умеют решать такие задачи только при помощи уравнений, но у китайцев есть множество чисто арифметических решений. Например, можно заменить каждого большого монаха 9 маленькими монахами (сохранив число съедаемых булочек), а 100 булочек означают, что их могут съесть 300 маленьких монахов, в число которых входят 200 дополнительных маленьких монахов. Поскольку каждый большой монах становится маленьким монахом, создается еще 8 новых маленьких монахов, так что $200/8 = 25$ – это количество больших монахов, и, соответственно, маленьких монахов – 75. Другой способ решить задачу – сложить большого монаха и трех маленьких монахов, и тогда каждый человек в среднем съедает одну булочку. Следовательно, больших и маленьких монахов не становится больше и меньше после того, как их организовали подобным образом, то есть число больших монахов равно $100/(3 + 1) = 25$.

Китайцы хорошо умеют считать, особенно в уме. В древности некоторые люди использовали для подсчета свои пальцы (так называемый «пальцевый счет»). В то же время в Китае уже давно существуют вычислительные устройства, такие как счетные фишки и абаки. Последние можно назвать прототипом компьютеров.

На начальном этапе обучения математике – изучении арифметики – Китай имеет очевидные преимущества, поэтому математика часто становится предметом, который любят умные китайские дети.

В Древнем Китае геометрическое мышление не было развито (но тем не менее существовало множество книг по вычислению геометрических фигур), и оно уступало грекам. Однако китайцы умеют учиться у других. На сегодняшний день уровень геометрической подготовки учеников средней школы в Китае значительно опережает остальные страны. Однажды иностранная педагогическая делегация посетила класс средней школы в нашей стране. Они полагали, что преподаваемые геометрические знания слишком сложны для восприятия учениками, но после посещения урока были вынуждены признать, что китайские школьники не только поняли их, но и хорошо усвоили.

Достижения в области обучения математике в нашей стране весьма примечательны. На международных математических соревнованиях китайские участники завоевали множество медалей, что является самым весомым доказательством. С тех пор как наша страна официально отправила команду для участия в Международной математической олимпиаде в 1986 году, китайская команда выиграла 14 командных чемпионатов, что можно считать очень впечатляющим результатом. Профессор Шиинг-Шен Черн, известный современный математик, однажды выразил особое восхищение достижениями китайских школьников.

Профессор Черн также предсказал: «В XXI веке Китай станет математической державой».

Конечно, стать математической державой – задача не из легких. Ее нельзя достичь в одночасье. Она требует неустанных усилий. Целями данной серии книг являются: 1) дальнейшая популяризация знаний по математике, формирование у молодежи любви к математике и помощь в достижении высоких результатов; 2) дать возможности школьникам, любящим математику, улучшить свою успеваемость и овладеть новыми знаниями и методами с помощью данной серии книг.

«Все самое важное в мире должно быть продумано до мелочей». Мы надеемся и верим, что публикация этой серии книг сыграет свою роль в превращении нашей страны в математическую державу. Впервые эта серия была опубликована в 2000 году и впоследствии подвергалась переработкам в соответствии с реформами учебной программы.

Известный математик, академик Китайской академии наук и бывший председатель Китайской математической олимпиады профессор Юань Ван выступил в качестве консультанта этой серии книг и написал дарственные надписи для юных любителей математики. Мы выражаем ему нашу искреннюю благодарность. Мы также хотели бы поблагодарить издательство Восточно-китайского педагогического университета и, в частности, г-на Минг Ни и г-на Линчжи Конга. Без них появление этой серии книг было бы невозможным.

Шань Цзунь и Сюн Бин
Май 2018 г.

Глава 1

Оригинальные способы работы с рациональными числами

Операции с рациональными числами аналогичны операциям с положительными числами. Мы должны обращать внимание на применение свойств операции (таких как коммутативность и ассоциативность сложения, а также коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность умножения) и использовать приемы, которые делают вычисления простыми и удобными.

Пример 1. Вычислите

$$48\frac{3}{5}-18\frac{1}{4}-1\frac{1}{3}+0,25+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}-30\frac{3}{5}.$$

Решение

$$\begin{aligned}
&48\frac{3}{5}-18\frac{1}{4}-1\frac{1}{3}+0,25+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}-30\frac{3}{5}\\
&\quad=\left(-1\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}\right)+\left(48\frac{3}{5}-30\frac{3}{5}\right)+\left(-18\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\
&\quad=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+(48-30-18)+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\
&\quad=0+0+0+0\\
&\quad=0.
\end{aligned}$$

Примечание: при сложении и вычитании следует воспользоваться свойствами коммутативности и ассоциативности. Мы можем изменить порядок операций в вычислениях, сделав промежуточный результат целым числом, или даже «взаимно уничтожить» числа. Это означает, что сумма двух чисел с противоположным знаком равна нулю, например сумма $\frac{3}{5}$ и $-\frac{3}{5}$ и сумма $-\frac{1}{4}$

и $\frac{1}{4}$ в данном примере. Но во время вычислений будьте внимательны со знаками и следите за тем, чтобы не было ошибок. Например, $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$ не могут взаимно уничтожиться, но их сумма – может (с положительным числом $\frac{2}{3}$).

Пример 2. Вычислите

$$-2{,}5 \div 0{,}75 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-1\frac{3}{4}\right) \div (-1{,}4) \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{2}{3}.$$

Решение

$$\begin{aligned}
&-2{,}5 \div 0{,}75 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-1\frac{3}{4}\right) \div (-1{,}4) \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{2}{3} \\
&\quad = -\frac{5}{2} \div \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{7}{4} \div \frac{14}{10} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \\
&\quad = -\frac{10}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{7}{4} \times \frac{10}{14} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \\
&\quad = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Примечание: при умножении и делении следует обращать внимание на знак результата. При перемножении нечетного числа отрицательных чисел получается отрицательное число; при перемножении четного числа отрицательных чисел получается положительное число. Обычно мы преобразуем десятичные числа в дроби, смешанные дроби – в неправильные, а деление – в умножение. Сначала упростите дробь и сделайте вычисления как можно проще.

Кроме того, следует запомнить некоторые полезные равенства, например $0{,}125 = \frac{1}{8}$, $0{,}375 = \frac{3}{8}$, и $0{,}75 = \frac{3}{4}$.

Пример 3. Вычислите

$$\frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6 + 7 \times 14 \times 21}{1 \times 3 \times 5 + 2 \times 6 \times 10 + 7 \times 21 \times 35}.$$

Решение

$$\begin{aligned}
&\frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6 + 7 \times 14 \times 21}{1 \times 3 \times 5 + 2 \times 6 \times 10 + 7 \times 21 \times 35} \\
&\quad = \frac{1 \times 2 \times 3 \times (1 + 2 \times 2 \times 2 + 7 \times 7 \times 7)}{1 \times 3 \times 5 \times (1 + 2 \times 2 \times 2 + 7 \times 7 \times 7)} \\
&\quad = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Примечание: при вычислениях следует обратить внимание на применение свойства дистрибутивности. Если складываемые числа имеют общий множитель, можно сначала вынести за скобки общий множитель, а затем вычислить суммы с вынесенными общими множителями. В этом примере числитель имеет общий множитель $1 \times 2 \times 3$, а знаменатель имеет общий множитель $1 \times 3 \times 5$; следовательно, мы можем вынести их и затем упростить выражение, чтобы облегчить вычисления. Более того, если общий множитель – отрицательное число, то после извлечения общего множителя знак каждой оставшейся части изменится.

Пример 4. Вычислите

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}.$$

Решение

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \\
&\quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{64}\right) - \frac{1}{64} \\
&\quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32}\right) - \frac{1}{64} \\
&\quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{64} \\
&\quad = \cdots \\
&\quad = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{64} \\
&\quad = 1 - \frac{1}{64} \\
&\quad = \frac{63}{64}.
\end{aligned}$$

Примечание: в этом примере мы видим особенность формулы сложения. Каждый последующий член уравнения равен половине предыдущего. Поэтому если сложить следующий член сам с собой, то результатом будет просто предыдущий член уравнения. Поэтому мы просто добавляем $\frac{1}{64}$ в формулу и вычисляем выражение, а затем поступаем аналогично с остальными членами. Разумеется, поскольку мы добавляем в выражение $\frac{1}{64}$, мы также должны вычесть $\frac{1}{64}$ в конце.

Пример 5. Вычислите

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2007 + 2008$;
2) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2007 - 2008$.

Решение

1) Пусть $S = 1 + 2 + \cdots + 2007 + 2008$. Тогда $S = 2008 + 2007 + \cdots + 2 + 1$.

Сложив эти два уравнения, мы получим

$$\begin{aligned} 2S &= (1 + 2008) + (2 + 2007) + \cdots + (2007 + 2) + (2008 + 1) \\ &= \underbrace{2009 + 2009 + \cdots + 2009 + 2009}_{2008} \\ &= 2009 \times 2008. \end{aligned}$$

Далее мы получим $\frac{2009 \times 2008}{2}$. Результат вычисления исходного выражения равен 2 017 036.

2)

$$\begin{aligned} &1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2007 - 2008 \\ &\quad = (1 - 2) + (3 - 4) + \cdots + (2007 - 2008) \\ &\quad = \underbrace{(-1) + (-1) + \cdots + (-1)}_{1004} \\ &\quad = -1004. \end{aligned}$$

Примечание: особенностью задачи (1) является то, что разность любых двух последовательных членов равна одному и тому же значению. Такую последовательность мы называем *арифметической*. Другими словами, если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяет условию, что $a_{i+1} - a_i = d$ выполняется для всех $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, то такую последовательность мы называем арифметической последовательностью. Здесь a_1 называется первым членом, a_n – последним, а d – общей разностью. Формула для вычисления $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ имеет вид

$$\text{Сумма} = \frac{(\text{первый член} + \text{последний член}) \times \text{количество членов}}{2}.$$

Теперь мы можем решить задачу (1), используя эту формулу.

Иногда в задаче не указано количество членов. Мы можем вычислить его по следующей формуле:

$$\text{количество членов} = \frac{\text{последний член} - \text{первый член}}{\text{общая разность}} + 1.$$

В задаче (2) мы объединяем два соседних члена, чтобы упростить вычисление. Это особенность данной задачи. При решении задач не следует торопиться с вычислениями, лучше сначала выявить полезную особенность задачи, а затем начать решать ее, отталкиваясь от этой особенности. Вы можете потратить вдвое меньше усилий и времени, чтобы получить верный результат.

Пример 6. Вычислите

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{1999 \times 2000}.$$

Решение

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{1999\times 2000}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1999}-\frac{1}{2000}\right)$$
$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{1999}+\frac{1}{1999}\right)-\frac{1}{2000}$$
$$=1-\frac{1}{2000}$$
$$=\frac{1999}{2000}.$$

Примечание: при сложении и вычитании, используя свойство чисел, мы можем разделить каждое число на два, после чего некоторые из них могут взаимно уничтожиться. Мы называем это *методом разбиения*. В этом примере мы разбили $\frac{1}{n\times(n+1)}$ на $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то есть

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Существуют и другие способы разбиения:

1) $\frac{d}{n\times(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}$ или $\frac{1}{n\times(n+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}\right)$. Обычно этот способ применяется, когда коэффициенты знаменателей образуют арифметическую последовательность с общей разностью d;
2) $\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right]$.

Пример 7. Прибавив $\frac{1}{2}$ от 2002 к 2002, мы получим первое число. Затем, прибавив $\frac{1}{3}$ от первого числа к самому себе, получим второе число. Потом, прибавив $\frac{1}{4}$ от второго числа к самому себе, получим третье число и так далее, пока не прибавим $\frac{1}{2002}$ от текущего числа к самому себе, чтобы получить последнее число. Каково последнее число?

Решение. Так как 2002 плюс $\frac{1}{2}$ от него – это $2002\times(1+\frac{1}{2})$, то прибавляем $\frac{1}{3}$ от этого числа, чтобы получить $2002\times(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})$, и так далее, и последнее число равно

$$2002\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2002}\right)$$
$$=2002\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2003}{2002}$$
$$=2002\times\frac{2003}{2}$$
$$=2\,005\,003.$$

Примечание: при умножении сокращение числа, которое встречается и в числителе, и в знаменателе, может значительно упростить вычисления.

Материал для чтения

Рациональные числа

Если вы впервые знакомитесь с рациональными числами, то у вас может возникнуть вопрос: почему числа вида $\frac{m}{n}$ (где m и n – целые числа, $n \neq 0$) называются *рациональными*? Раз есть рациональные числа, значит, есть и *иррациональные*?

Люди стараются давать вещам и явлениям осмысленные названия. Например, слово «отрицательный» для обозначения чисел меньше нуля во многих языках ассоциируется с плохими вещами, поскольку отрицательные числа всегда были связаны с долгами или убытками, и его смысл прямо противоположен слову «положительный», обозначающему числа больше нуля или выгоду. Подобная ситуация возникла в китайском языке с рациональными числами, только она вызвана ошибкой в переводе.

В XIX веке, когда в Китай пришла западная наука, китайский математик Ли Шаньлань (1811–1882) при переводе «Алгебры» британского математика Де Моргана перевел термины «рациональная функция» и «иррациональная функция» как «пропорциональная формула» и «непропорциональная формула» соответственно. Фактически это был правильный перевод, поскольку «пропорция» означает «соотношение», или *ratio* на латыни. Но более 10 лет спустя, когда другой математик, Хуа Хэнфан (1833–1902), переводил «Алгебру» Уоллеса, он неправильно перевел слова *rational* и *irrational* как «разумное» и «неразумное» соответственно. Разумеется, этот буквальный перевод не соответствует сути математических терминов, но он получил широкое распространение в Китае и даже в Японии. Теперь и в Китае, и в Японии эти неправильные переводы применяются в сфере образования и научных кругах, поэтому там вы можете встретить «разумные» и «неразумные» числа.

Рациональное число – это число, которое можно представить в виде $\frac{m}{n}$ (где m и n – целые числа, $n \neq 0$), а число, которое не может быть представлено в виде $\frac{m}{n}$, является иррациональным числом. Такие числа существуют. Например, древние греки обнаружили, что длина стороны квадрата является иррациональным числом, если его площадь равна 2.

Упражнения

Вычислите:

1. $31\frac{2}{7} - 22\frac{6}{13} + 4\frac{5}{7} + 11\frac{6}{13}$.
2. $5\frac{6}{11} - 3{,}125 - 7\frac{4}{7} - 3\frac{4}{11} + 8\frac{1}{8} - 3\frac{6}{7} - 2\frac{2}{11} + 6\frac{3}{7}$.
3. $-\frac{7}{11} \div 2{,}5 \times (-0{,}75) \div (-1\frac{2}{5}) \div \frac{3}{11} \times (-\frac{8}{13})$.
4. $3{,}825 \times \frac{1}{4} - 1{,}825 + 0{,}25 \times 3{,}825 + 3{,}825 \times \frac{1}{2}$.
5. $-7{,}2 \times 0{,}125 + 0{,}375 \times 1{,}1 + 3{,}6 \times \frac{1}{2} - 3{,}5 \times 0{,}375$.

6. $\frac{1}{2-\frac{1}{3-\frac{1}{4-\frac{1}{5}}}}$.

7. $1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{8} + 7\frac{1}{16} + 9\frac{1}{32}$.

8. $\frac{1}{1999} + \frac{2}{1999} + \frac{3}{1999} + \cdots + \frac{1998}{1999}$.

9. $(7 + 9 + 11 + \cdots + 101) - (5 + 7 + 9 + \cdots + 99)$.

10. $9 + 99 + 999 + 9999 + 99999 + 999999$.

11. $3^{2000} - 5 \times 3^{1999} + 6 \times 3^{1998}$.

12. $(-1)^{1998} + (-1)^{1999} + (-1)^{2000} + (-1)^{2001}$.

13. $\frac{1}{5\times 9} + \frac{1}{9\times 13} + \frac{1}{13\times 17} + \cdots + \frac{1}{101\times 105}$.

14. $2002\frac{1}{2} - 2001\frac{1}{3} + 2000\frac{1}{2} - 1999\frac{1}{3} + \cdots + 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}$.

15. $\frac{1\times 2\times 3+2\times 4\times 6+4\times 8\times 12+7\times 14\times 21}{1\times 3\times 5+2\times 6\times 10+4\times 12\times 20+7\times 21\times 35}$.

16. $1 + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{12} + 4\frac{1}{20} + 5\frac{1}{30} + 6\frac{1}{42} + 7\frac{1}{56}$.

17. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$.

Глава 2

Абсолютное значение

Абсолютное значение положительного числа – это оно само; абсолютное значение отрицательного числа – это его противоположность; абсолютное значение нуля – это ноль. Это можно записать как

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Абсолютное значение числа – это расстояние между точкой, соответствующей этому числу на числовой оси, и началом координат. Очевидно, что абсолютное значение любого числа – величина неотрицательная, а значит, $|a| \geq 0$.

Пример 1. Какие целые числа по абсолютному значению равны 10? Какие целые числа имеют абсолютное значение меньше 10? Сколько целых чисел имеют абсолютное значение меньше 10? Какова их сумма?

Решение. Есть два целых числа, +10 и –10, абсолютное значение которых равно 10. Целые числа, абсолютное значение которых меньше 10, – это 0, ±1, ±2, …, ±9. Их общее количество составляет $2 \times 9 + 1 = 19$. Их сумма равна

$$0 + 1 + (-1) + 2 + (-2) + \cdots + 9 + (-9) = 0.$$

Примечание: целые числа дискретны, поэтому количество целых чисел, удовлетворяющих этому свойству, ограничено. Если мы хотим найти все рациональные числа, абсолютное значение которых меньше 10, то их будет бесконечно много.

Пример 2. Пусть дано $-2 \leq a \leq 0$. Упростите $|a + 2| + |a - 2|$.

Решение. Так как $-2 \leq a \leq 0$, мы получаем $a + 2 \geq 0$ и $a - 2 \leq 0 - 2 < 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} &|a + 2| + |a - 2| \\ &\quad = (a + 2) - (a - 2) \\ &\quad = 4. \end{aligned}$$

Пример 3. Предположим, что $x < 0$. Упростите $\frac{||x|-2x|}{|x-3|-|x|}$.

Решение. Так как $x < 0$, то $x - 3 < 0$. Тогда мы имеем

$$|x| = -x,\ |x - 3| = -(x - 3) = 3 - x,$$

$$|x - 3| - |x| = 3 - x - (-x) = 3,$$

$$||x| - 3x| = |- x - 2x| = |-3x| = -3x.$$

Следовательно, искомое выражение имеет вид $\frac{-3x}{3} = -x$.

Примечание: рассматривая значение или диапазон переменной, мы должны сначала определить знак алгебраического выражения в символе абсолютного значения, а затем исключить символ абсолютного значения. Если запись абсолютного значения вложенная, или, другими словами, запись абсолютного значения содержит другое абсолютное значение (например, числитель $||x| - 2x|$ в данном примере), обычно мы сначала устраняем вложенную запись и переходим ко внешней.

Пример 4. Предположим, что $a < 0$ и $x \le \frac{a}{|a|}$. Упростите $|x + 1| - |x - 2|$.

Решение. Так как $a < 0$, $|a| = -a$, мы имеем $\frac{a}{|a|} = \frac{a}{-a} = -1$.

Поскольку $x \le \frac{a}{|a|}$, $x \le -1$,

то $x + 1 \le 0$ и $x - 2 < 0$.

Таким образом, $|x + 1| - |x - 2| = -(x + 1) - [-(x - 2)] = -x - 1 + x - 2 = -3$.

Примечание: знак числа или выражения внутри записи абсолютного значения не всегда задается непосредственно условием задачи. Сначала нужно преобразовать условие, которое дано, в нужное нам условие, как мы и сделали в этом примере. Иногда условие задано на оси, и мы должны извлечь полезную информацию из числовой оси, как показано в следующем примере.

Пример 5. Как показано на рис. 2.1, числа a и b расположены на числовой оси. Упростите

$$|a + b| + |b - a| + |b| - |a - |a||.$$

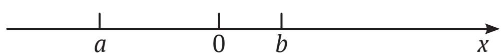

Рис. 2.1

Решение. Как показано на рис. 2.1, мы имеем $a < 0$ и $b > 0$. Кроме того, расстояние между a и 0 больше, чем расстояние между b и 0, поэтому $a + b < 0$. Значит, мы имеем

$$\begin{aligned}&|a + b| + |b - a| + |b| - |a - |a||\\ &\quad = -(a + b) + (b - a) + b - |a - (-a)|\\ &\quad = -a - b + b - a + b - (-2a)\\ &\quad = b.\end{aligned}$$

Примечание: в этом примере из положения чисел a и b на числовой прямой, показанной на рис. 2.1, мы узнаем, что $a < 0$, $b > 0$, $a + b < 0$ и т. д. Затем мы можем исключить символ абсолютного значения, чтобы решить задачу.

Пример 6. Упростите $\frac{2|x|-3x}{|2x-|5x||}$.

Решение. Чтобы исключить символ абсолютного значения, нужно определить значение x.

Очевидно, что поскольку знаменатель не может быть равен нулю, то $x \neq 0$.

Если $x > 0$, получим

$$\frac{2|x|-3x}{|2x-|5x||} = \frac{2x-3x}{|2x-5x|} = \frac{-x}{|-3x|} = \frac{-x}{3x} = -\frac{1}{3}.$$

Если $x < 0$, получим

$$\frac{2|x|-3x}{|2x-|5x||} = \frac{-2x-3x}{|2x+5x|} = \frac{-5x}{|7x|} = \frac{-5x}{-7x} = \frac{5}{7}.$$

Примечание: в этом примере знак алгебраического выражения между символами абсолютного значения не задан, поэтому нам нужно рассмотреть разные категории случаев. Обсуждение категорий – важная идея в математике. Хорошим примером применения этой идеи являются задачи, связанные с абсолютным значением. В следующем примере задача содержит два абсолютных значения. Мы классифицируем случаи по нулевым точкам, которые делят числовую ось на несколько частей.

Пример 7. Упростите $|x + 5| + |2x - 3|$.

Анализ. Ключ к упрощению этой задачи – устранение двух абсолютных значений. Исключить только одно абсолютное значение, например $|x + 5|$, несложно: нам нужно учитывать знак $x + 5$ только в двух случаях: $x < -5$ и $x \geq -5$. Здесь $x = -5$ – это значение, при котором $x + 5 = 0$. Мы называем его нулевой точкой выражения $x + 5$. Точно так же для выражения $2x - 3$ существует нулевая точка при $x = \frac{3}{2}$. Чтобы исключить оба абсолютных значения, мы отмечаем на числовой оси обе нулевые точки -5 и $\frac{3}{2}$. Эти две точки делят числовую ось на три части, как показано на рис. 2.2. Это части $x < -5$, $-5 \leq x < \frac{3}{2}$ и $x \geq \frac{3}{2}$. Наше обсуждение основано на этих трех случаях.

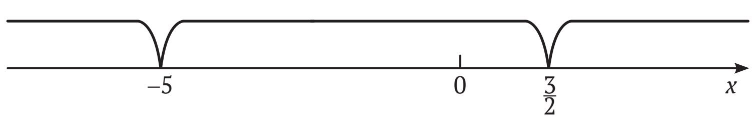

Рис. 2.2

Решение. Если $x < -5$, искомое выражение

$$= -(x + 5) - (2x - 3) = -3x - 2.$$

Если $-5 \le x < \frac{3}{2}$, искомое выражение

$$= (x + 5) - (2x - 3) = -x + 8.$$

Если $x \ge \frac{3}{2}$, искомое выражение

$$= (x + 5) + (2x - 3) = 3x + 2.$$

Эти три выражения можно записать так:

$$\text{искомое выражение} = \begin{cases} -3x - 2, & x < -5, \\ -x + 8, & -5 \le x < \frac{3}{2}, \\ 3x + 2, & x \ge \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Пример 8. Упростите $||x - 1| - 2| + |x + 1|$.

Решение. Сначала найдем нулевые точки.

Из условия $x - 1 = 0$ получаем $x = 1$.

Из условия $|x - 1| - 2 = 0$, то есть $|x - 1| = 2$, получаем $x - 1 = \pm 2$, $x = -1$, или $x = 3$.

Из условия $x + 1 = 0$ получаем $x = -1$.

Итак, существуют три нулевые точки: -1, 1 и 3. Они делят числовую ось на четыре части, а именно

$$x < -1,\ -1 \le x < 1,\ 1 \le x < 3,\ x \ge 3.$$

Если $x < -1$, то искомое выражение

$$\begin{aligned} &= |-(x - 1) - 2| - (x + 1) \\ &= |-x - 1| - x - 1 \\ &= -x - 1 - x - 1 = -2x - 2. \end{aligned}$$

Если $-1 \le x < 1$, то искомое выражение

$$\begin{aligned} &= |-(x - 1) - 2| + x + 1 \\ &= |-x - 1| + x + 1 \\ &= x + 1 + x + 1 = 2x + 2. \end{aligned}$$

Если $1 \le x < 3$, то искомое выражение

$$\begin{aligned} &= |x - 1 - 2| + x + 1 \\ &= |x - 3| + x + 1 \\ &= 3 - x + x + 1 = 4. \end{aligned}$$

Если $x \ge 3$, то искомое выражение

$$\begin{aligned} &= |x - 1 - 2| + x + 1 \\ &= |x - 3| + x + 1 \\ &= x - 3 + x + 1 \\ &= 2x - 2. \end{aligned}$$

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru