Оглавление

Введение

Издание посвящено решению задач, в которых присутствует тема «Скрещивающиеся прямые», и методам их решения. Эти задачи традиционно относят к одним из наиболее сложных задач стереометрии. Причина, видимо, заключается в отсутствии прямого аналога скрещивающимся прямым на плоскости в отличие от многих других объектов стереометрии. Например, аналогами треугольной пирамиды, сферы являются треугольник и окружность соответственно.

В *первой главе* приводятся основные опорные факты, описывающие геометрию скрещивающихся прямых; выделяются две типовые задачи – нахождение 1) угла и 2) расстояния между скрещивающимися прямыми, построение их общего перпендикуляра; сопутствующие задачи.

Вторая глава является *центральной*. В ней описаны основные методы решения типовых задач на скрещивающиеся прямые, приведены примеры применения каждого метода.

Остальные главы – это последовательное решение задач различной сложности с помощью основных методов, их дальнейшее изучение и применение в наиболее распространенных геометрических конструкциях. Здесь описано:

- решение задач для правильных геометрических фигур (третья глава);
- решение задач повышенной сложности сразу несколькими методами (четвертая глава);
- решение задач на скрещивающиеся прямые в треугольной пирамиде (пятая глава);
- решение задач из материалов по подготовке к ЕГЭ по математике (шестая глава);
- решение избранных задач повышенной сложности (глава 7);

Приведен список задач для самостоятельного решения с ответами (глава 8).

В заключение констатируется эффективность изложенных методов, целесообразность их освоения и применения при повторении или изучении курса «Стереометрия», при подготовке к любым экзаменам, в том числе при подготовке к ЕГЭ по математике.

Специфика книги заключается в том, что в ней для скрещивающихся прямых:

- воедино собраны *основные опорные свойства*, *типовые задачи*, набор *основных методов* их решения;
- задачи и методы их решения изучены для наиболее *распространенных геометрических конструкций*;
- продемонстрированы *применение и эффективность методов* путем решения достаточного количества задач различной сложности.

Для удобства чтения нумерация рисунков и задач иногда начинается заново с началом главы.

Формулировки задач в основном отобраны из популярных изданий [1–20]. Иногда они незначительно изменены в целях более наглядной демонстрации методов и их возможностей; например, к требованию найти угол между скрещивающимися прямыми добавляется требование найти расстояние и общий перпендикуляр между ними.

Глава 1. Основные опорные факты, типовые задачи и общие схемы их решения

1.1. Определение и опорные факты

1.1.1. Определение

Скрещивающимися называются прямые a и b, не лежащие в одной плоскости (рис. 1).

Для краткости их иногда обозначают символом $a \mathbin{\dot{-}} b$.

1.1.2. Признак скрещивающихся прямых

Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает ее в точке B, не принадлежащей прямой a, то прямые a и b скрещиваются (рис. 1).

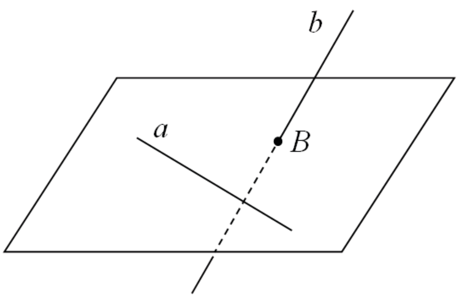

Рис. 1

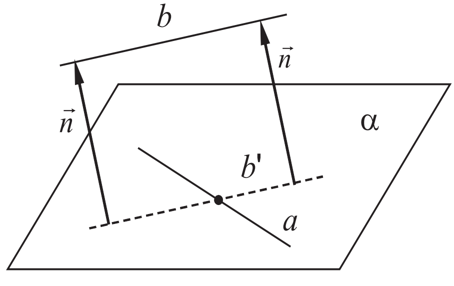

Рис. 2

Рисунок 2 показывает один из очевидных способов получения пары скрещивающихся прямых $a \mathbin{\dot{-}} b$ из двух пересекающихся прямых a и b'; прямая b получена параллельным переносом прямой b' на некоторый вектор $\vec{n}$, не параллельный плоскости α.

Так полученные прямые a и b наглядно иллюстрируют важное *опорное свойство* (теорему).

1.1.3. Теорема

Если прямые *a* и *b* скрещиваются, то через прямую *a* можно провести единственную плоскость *α*, параллельную прямой *b* (рис. 3).

Способ получения плоскости α очевиден. Достаточно через любую точку O прямой a провести прямую $b' \parallel b$.

Через пересекающиеся прямые a и b' проходит единственная искомая плоскость α. Действительно, так как $b \parallel b'$, $b' \subset \alpha$, то $b \parallel \alpha$ по признаку параллельности прямой и плоскости. Единственность плоскости α докажите самостоятельно (по любому из учебников).

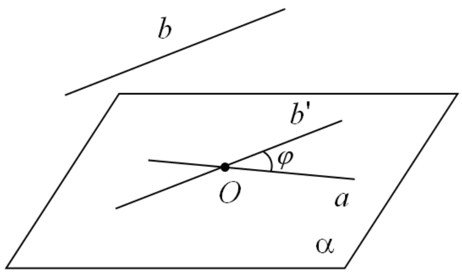

Рис. 3

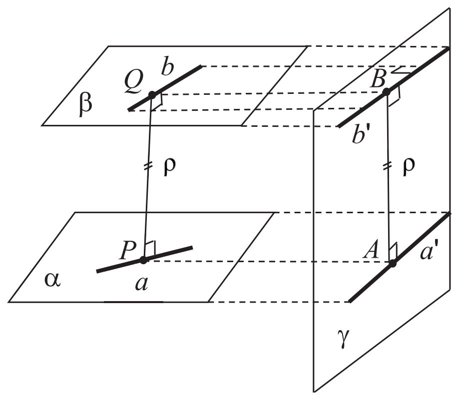

Рис. 4

Угол φ между пересекающимися прямыми a и b', где $b' \parallel b$, называется *углом между скрещивающимися прямыми a и b*:

$$\varphi = \varphi\,(a, b) = \varphi\,(a, b').$$

Он не зависит от выбора точки O.

Аналогично, через прямую b можно провести единственную плоскость β, параллельную прямой a.

Получаем *фундаментальное опорное свойство*, характеризующее геометрию скрещивающихся прямых:

1.1.4.

Паре скрещивающихся прямых *a* и *b* соответствует единственная пара параллельных плоскостей *α* и *β*, проходящих через прямые *a* и *b* соответственно (рис. 4):

$$a \subset \alpha, \quad b \subset \beta, \quad \alpha \parallel \beta.$$

Опорные свойства 1.1.3, 1.1.4 лежат в основе методов параллельной плоскости и описанного параллелепипеда.

Существенную роль, как увидим, играет плоскость γ, перпендикулярная к плоскости α (а значит, и к плоскости β).

Комментарий. *Пару скрещивающихся прямых a и b (по определению) нельзя разместить в одной плоскости, но можно разместить в единственной паре параллельных плоскостей α и β.*

1.1.5.

Параллельные плоскости α и β проектируются на перпендикулярную им плоскость γ в параллельные прямые a' и b' соответственно, рис. 4.

Важен частный случай, когда плоскость γ перпендикулярна одной из скрещивающихся прямых, например прямой a (рис. 5).

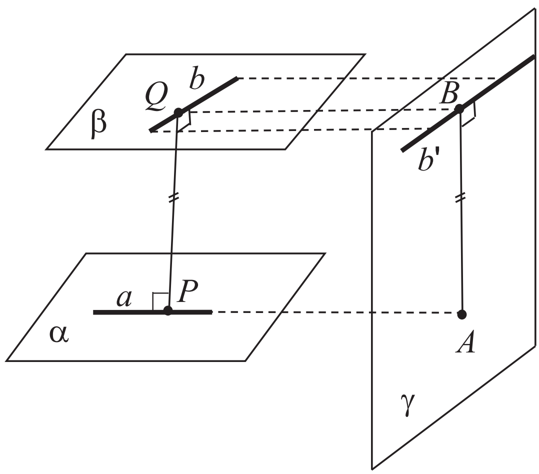

Рис. 5

Здесь справедливо следующее опорное свойство:

1.1.6.

Если плоскость γ перпендикулярна прямой a, то проекциями скрещивающихся прямых a и b на плоскость γ являются точка A и прямая b' соответственно.

> Подчеркнем: если *одна из скрещивающихся прямых перпендикулярна плоскости γ (например, $a \perp \gamma$), то вторая прямая не перпендикулярна ей.*

Иначе (при $a \perp \gamma$ и $b \perp \gamma$) прямые a и b были бы параллельными, а не скрещивающимися.

Значит, если одна из скрещивающихся прямых проектируется на плоскость γ в точку, то другая – в прямую. Именно это и утверждается в свойстве 1.1.6.

Опорные свойства 1.1.5, 1.1.6 лежат в основе метода *перпендикулярной плоскости*.

Упомянутые методы (подробно описаны ниже) решают две известные типовые задачи на скрещивающиеся прямые. Напомним их.

1.2. Две типовые задачи, общие схемы их решения

1.2.1. Первая задача. Построить и вычислить угол φ между скрещивающимися прямыми a и b

Обозначение: $\varphi = \angle(a, b) = \left(\widehat{a; b}\right) = \varphi(a, b)$.

Изложим идею одного из методов ее решения в п. 1.2.2.

1.2.2. Метод параллельной плоскости (проектирования на параллельную плоскость)

Надо:

1. Выбрать удобную для конкретной решаемой задачи точку O (или P) – вершину искомого угла. Она может лежать, например, на одной из прямых a или b.
2. Через эту точку провести прямые a' и b', параллельные прямым a, b соответственно (рис. 3; 7)

$$a' \parallel a,\ b' \parallel b.$$

   Угол, образованный пересекающимися прямыми a' и b', равен искомому углу между скрещивающимися прямыми a и b.

3. Найти величину угла φ между прямыми a', b', используя исходные данные конкретной задачи:

$$\varphi = \varphi(a', b') = \varphi(a, b).$$

4. Выписать ответ.

Метод параллельной плоскости, или метод проектирования на параллельную плоскость, как видим, основан на существовании плоскости α, проходящей через одну из скрещивающихся прямых параллельно другой прямой (опорное свойство 1.1.3), или плоскости, параллельной обеим скрещивающимся прямым.

1.2.3. Вторая задача

а) Построить отрезок PQ с концами на скрещивающихся прямых *a* и *b*, перпендикулярный этим прямым (рис. 4, 5).

$$\boldsymbol{P \in a}, \qquad \boldsymbol{Q \in b}, \qquad \boldsymbol{PQ \perp a}, \qquad \boldsymbol{PQ \perp b}.$$

б) Найти расстояние ρ между скрещивающимися прямыми *a* и *b*:

$$\boldsymbol{\rho = \rho(a, b) = PQ.}$$

Теоретическую базу для данной задачи и схему решения дает *доказательство* следующей *теоремы*.

***Теорема*. Для двух скрещивающихся прямых *a* и *b* существует единственный отрезок:**

- **который перпендикулярен каждой из них и**
- **концы которого расположены на этих прямых.**

Длину ρ этого отрезка PQ называют *расстоянием* между прямыми a и b.

Нахождение этого расстояния и построение самого отрезка PQ составляют суть второй задачи.

1.2.4. Схема построения общего перпендикуляра *PQ* к скрещивающимся прямым *a* и *b*

1. Провести две параллельные плоскости α и β, проходящие через прямые a и b соответственно ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$). Такая пара плоскостей существует и единственна (свойство 1.1.4 скрещивающихся прямых).
2. Спроектировать прямую b на плоскость α и получить на ней прямую b' – проекцию прямой b (рис. 6).
3. Через точку P пересечения прямых a и b' в плоскости проекции $\gamma = \gamma(b; b')$ провести перпендикуляр PQ к прямой b'. Здесь Q – точка пересечения этого перпендикуляра и прямой b.

4. Полученный так отрезок PQ есть искомый общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b.

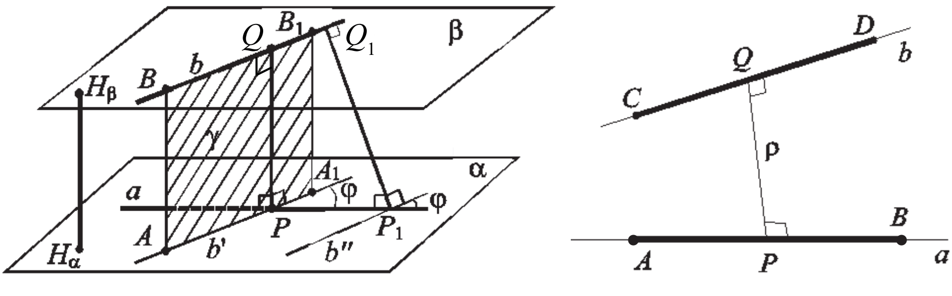

Рис. 6

1.2.5. Обоснование схемы, комментарии

Обсудим и обоснуем каждый пункт схемы; приведем необходимые доказательства, полезные далее при решении задач.

1. Проведение пары параллельных плоскостей α и β для скрещивающихся прямых a и b возможно в соответствии с опорным свойством 1.1.4.

   Важно, что *расстояние между прямыми a и b равно расстоянию между плоскостями α и β*:

   $$\rho = \rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta).$$

   Для получения проекции b' прямой b достаточно из двух точек B и B_1 прямой b опустить перпендикуляры BA и B_1A_1 на плоскость α. Плоскость проекции ABB_1A_1 (назовем ее γ):

   - *перпендикулярна к плоскостям α* и *β, так как проходит через перпендикуляр AB к ним;*
   - *рассечет плоскости α* и *β по параллельным прямым, т. е. $b \parallel b'$.*

   Прямые a и b' пересекаются: $a \cap b' = P$, и точка P их пересечения существует (иначе не были бы скрещивающимися прямые a и b: если $a \parallel b'$, то $a \parallel b$, так как $b' \parallel b$).

2. Перпендикуляр PQ проведён в плоскости γ (плоскости проекции) к линии b' пересечения ее с перпендикулярной плоскостью α ($\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$).

   Значит, отрезок PQ перпендикулярен плоскости α и прямой a, лежащей в ней:

$$\begin{cases} PQ \perp b'; \\ b' = \gamma \cap \alpha; \\ \gamma \perp \alpha; \end{cases} \Rightarrow PQ \perp \alpha \Rightarrow PQ \perp a, \text{ так как } a \subset \alpha.$$

Итак:

$$\begin{cases} PQ \perp b' \text{ и } PQ \perp b, \text{так как } b' \parallel b; \\ PQ \perp a, \end{cases}$$

т. е. отрезок PQ – общий перпендикуляр к прямым a, b. Заметим, что он перпендикулярен плоскостям α и β.

3. Его *единственность* доказывают методом от противного. Предположим существование иного общего перпендикуляра, например P_1Q_1 (рис. 6). Он, как и отрезок PQ, перпендикулярен к плоскостям α и β.

Два перпендикуляра PQ и P_1Q_1 к плоскости α параллельны ($PQ \parallel P_1Q_1$), значит, лежат в одной плоскости PQQ_1P_1. В этой же плоскости лежат и скрещивающиеся прямые $QQ_1 = b$; $PP_1 = a$, что невозможно. Противоречие.

Здесь концы отрезков PQ и P_1Q_1 не совпадали, образовывали прямые QQ_1 и PP_1.

Случай совпадения пары концов (например, когда $P = P_1$) невозможен: ведь из точки P можно провести лишь один перпендикуляр к плоскости α.

Итак:

- доказаны существование и единственность общего перпендикуляра PQ к скрещивающимся прямым a и b (это, по существу, доказательство самой теоремы);
- обоснована схема его построения, осталось найти его длину.

1.2.6. Нахождение расстояния ρ между прямыми a, b или длины их общего перпендикуляра

Это возможно несколькими методами, которые подробно изложены ниже и составляют центральную часть данной работы. Здесь же отметим следующее.

В некоторых (относительно простых) задачах удобно и построить общий перпендикуляр, и найти его длину ρ *непосредственно*.

Однако в большинстве задач удобнее и эффективнее иные методы. Дадим пока общее описание, идею некоторых из них.

1) *Метод параллельных плоскостей α и β* (рис. 6).

   Его суть и преимущество: достаточно найти расстояние между параллельными плоскостями α и β, так как оно равно расстоянию между скрещивающимися прямыми a и b:

$$\rho(a, b) = PQ = \rho(\alpha, \beta) = \mathrm{H}_\alpha \mathrm{H}_\beta = AB = A_1B_1.$$

   На всей плоскости α найти удобную для этого точку H_α легче, чем найти единственную точку P на прямой a.

   Сами эти плоскости α и β строятся довольно просто, о чем свидетельствует опорное свойство 1.1.3 скрещивающихся прямых a и b.

   Часто бывает достаточно построить лишь одну плоскость и использовать

2) *Метод параллельной плоскости α к прямой b.*

   Его суть и преимущество: достаточно найти расстояние между прямой b и плоскостью α (рис. 6); оно равно расстоянию между скрещивающимися прямыми a и b.

   На всей прямой b легче найти подходящую точку, например точку B, чем искать единственную точку $Q \in b$:

$$\rho(a, b) = PQ = \rho(\alpha, b) = AB = A_1B_1.$$

   Этот метод – частный случай предыдущего. Далее они носят общее название *«метод параллельной плоскости»*.

3) *Метод перпендикулярной плоскости γ к плоскостям α* и β (рис. 4).

   Его суть:

   - спроектировать плоскости α и β на перпендикулярную им плоскость γ и получить на ней параллельные прямые a' и b' – проекции плоскостей α и β соответственно;
   - в плоскости γ найти расстояние между параллельными прямыми a' и b':

$$\rho = \rho(a', b').$$

   Преимущество: пространственная задача заменена планиметрической задачей в плоскости γ.

   Однако плоскость γ следует еще построить, но, как правило, это легче построения общего перпендикуляра PQ.

4) *Метод перпендикулярной плоскости γ к прямой a* (рис. 5).

   Здесь прямая a проектируется в точку A, и задача сводится к планиметрической:

Найти расстояние между точкой A (проекцией прямой a) и прямой b' (проекцией прямой b).

$$\rho = \rho(A, b').$$

Этот метод – частный случай предыдущего. Далее они носят общее название метода *перпендикулярной плоскости*.

Методы параллельной и перпендикулярной плоскостей – одни из центральных. К ним мы будем неоднократно возвращаться.

1.2.7. О сопутствующих задачах

Ранее выделены две типовые задачи на скрещивающиеся прямые a и b:

- найти угол φ между ними;
- найти расстояние ρ между ними, построить их общий перпендикуляр PQ.

Но могут быть, конечно, иные, сопутствующие задачи. Вот одна из них.

В каком отношении общий перпендикуляр PQ рассекает скрещивающиеся отрезки AB и CD?

Отрезки AB, CD лежат на скрещивающихся прямых a и b. Искомыми являются отношения (рис. 6):

$$\frac{AP}{PB} \text{ и } \frac{CQ}{QD}. \qquad (*)$$

Это – прямая задача.

Обратная ей: *Даны отношения* (*).

Доказать: *PQ – общий перпендикуляр к прямым* $AB = a$ *и* $CD = b$.

Эти и иные сопутствующие задачи решаются описанными здесь методами. Пример – задача из 7.2.1 главы 7. Сказанное подчеркивает актуальность освоения рассматриваемых здесь методов.

1.3. Выводы

1. Двум скрещивающимся прямым a и b соответствуют следующие основные элементы:

   - две параллельные плоскости α и β, проходящие через прямые a и b соответственно;
   - плоскость γ, перпендикулярная плоскостям α и β или, в частном случае, одной из прямых a или b;
   - проекции a', b' прямых a, b на плоскость γ или на плоскости α, β.

С помощью этих элементов сформулированы основные *опорные свойства*, характеризующие геометрические свойства скрещивающихся прямых.

2. Выделены две основные *типовые задачи*:
   а) нахождение угла φ и
   б) нахождение расстояния ρ и общего перпендикуляра между скрещивающимися прямыми.
3. Описаны некоторые сопутствующие задачи.
4. Решения типовых задач возможны *методами* параллельной и перпендикулярной плоскостей; описаны идеи этих методов.

Далее – подробное описание этих и других методов.

Глава 2. Основные методы решения задач на скрещивающиеся прямые

Собранные здесь методы базируются на опорных свойствах, описывающих геометрию скрещивающихся прямых, в частности используют наличие параллельных и перпендикулярных им плоскостей. К ним, ввиду их важности, мы возвращаемся для более подробного описания и изучения соответствующих методов.

2.1. Метод параллельной плоскости

Он удобен прежде всего для нахождения угла φ между скрещивающимися прямыми a и b, т. е. для решения первой типовой задачи, а также полезен и для решения второй типовой задачи – нахождения расстояния ρ между ними.

Суть и схема применения метода (рис. 3; 7).

1. Выбрать удобную (для конкретной задачи) точку O. Она, в частности, может лежать на прямой a.
2. Через точку O провести две прямые a', b', параллельные прямым a, b соответственно: $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.

   Плоскость $\alpha = (a', b')$, образованная прямыми a', b', параллельна каждой из прямых a, b.
3. В плоскости α решить планиметрическую задачу: найти угол между прямыми a', b'; получить таким образом искомый угол φ между скрещивающимися прямыми a и b:

$$\varphi = \varphi(a, b) = \varphi(a', b').$$

   Напоминание.
   Углом между прямыми называется наименьший из углов между ними. Он не может быть тупым: $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тупым может быть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что иллюстрирует рис. 7. Здесь $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(a', b') = \pi - \varphi$.

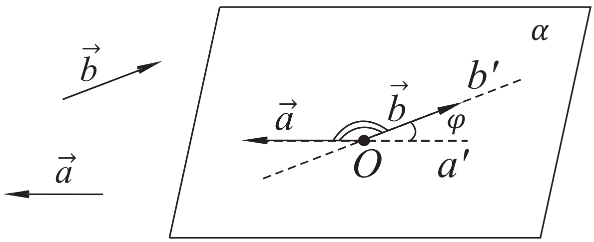

Рис. 7

Для нахождения расстояния ρ между скрещивающимися прямыми с помощью *одной параллельной плоскости* следует (рис. 8):

- выбрать на одной из прямых, например на прямой a, подходящую точку O;
- через точку O провести прямую b' параллельно прямой b;
- рассмотреть плоскость α, проходящую через прямую *а параллельно* прямой b; это – плоскость, образованная прямыми a и b';
- на прямой b найти подходящую точку B и найти расстояние BH от нее до плоскости α; оно равно искомому расстоянию

$$\rho = \rho(a, b) = \rho(\alpha, b) = \rho(B, \alpha) = BH.$$

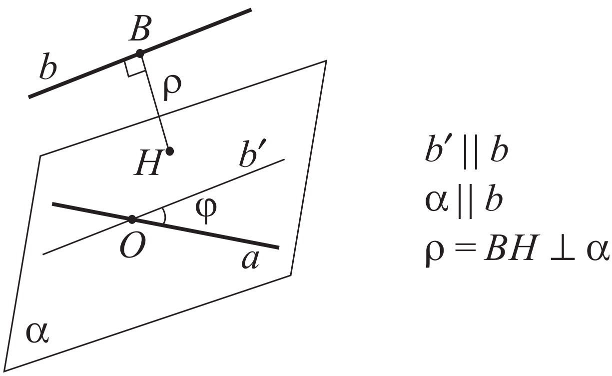

Рис. 8

Для нахождения расстояния ρ между скрещивающимися прямыми a и b с помощью *двух параллельных плоскостей* следует (рис. 6):

- через каждую из прямых провести плоскость параллельно другой прямой и получить две параллельные плоскости α и β ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$);
- на одной из плоскостей, например на плоскости β, подобрать подходящую (для конкретной задачи) точку H_β;

- решить вспомогательную задачу – найти расстояние от точки $H_\beta \in \beta$ до плоскости α:

$$\rho = \rho(\alpha, \beta) = \rho(H_\beta, \alpha) = H_\beta H_\alpha.$$

Еще раз подчеркнем:

на всей прямой b или на всей плоскости β легче найти подходящую точку H_β. Лишь в частном случае она может оказаться точкой Q – концом общего перпендикуляра PQ.

2.2. Метод перпендикулярной плоскости

Он удобен прежде всего для нахождения расстояния ρ между скрещивающимися прямыми a и b; построения общего перпендикуляра PQ к ним. Однако полезен и при нахождении угла φ между ними.

Под перпендикулярной плоскостью γ, напомним, понимаем плоскость, перпендикулярную плоскости α, а значит, и плоскости β.

При этом различаем два случая:

- перпендикулярная к плоскостям α и β плоскость γ перпендикулярна и одной из скрещивающихся прямых a, b;
- плоскость γ не перпендикулярна ни одной из прямых a, b (но, конечно, перпендикулярна плоскостям α и β).

Начнем с рассмотрения первого случая.

2.2.1. Случай плоскости γ, перпендикулярной одной из скрещивающихся прямых

Без ограничения общности считаем, что $\gamma \perp a$ (рис. 9).

Суть и схема применения метода

1. *Построить* плоскость γ, перпендикулярную к прямой a. Для этого, исходя из условий конкретной задачи, достаточно, например, найти две пересекающиеся прямые, перпендикулярные к прямой a.
2. *Спроектировать* на плоскость γ прямую a и получить точку A – проекцию прямой a.
3. *Спроектировать* на плоскость γ прямую b и получить прямую b' – проекцию прямой b.

   Для этого достаточно спроектировать на плоскость γ две различные точки M и N прямой b.

Комментарии

а) *О проектировании*. Проектирование прямой b или ее точек M, N на плоскость γ, т. е. получение проекции b', в общем случае бывает не легче прямого построения общего перпендикуляра PQ к скрещивающимся прямым a и b (рис. 6).

Здесь же указанное проектирование существенно облегчается наличием прямой a, перпендикулярной к плоскости γ. Поэтому для получения проекции b' достаточно через две точки M и N прямой b провести две прямые MM_1 и NN_1, *параллельные* прямой a (рис. 9).

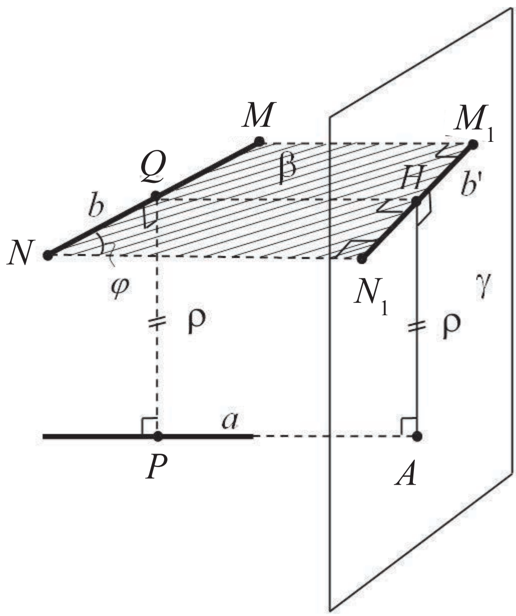

Рис. 9

Построение *перпендикуляров* MM_1 и NN_1 к плоскости γ заменяется построением прямых, *параллельных* уже *заданной* прямой a.

Это, как мы увидим в конкретных задачах, достаточно эффективный прием получения проекций.

При проведении прямых MM_1, NN_1 параллельно прямой a получаем плоскость $\beta = NN_1M_1M$ – единственную плоскость, которую можно провести через прямую b параллельно прямой a.

Плоскость β образована также прямой b и ее проекцией b' на плоскость γ, т. е. $\beta = (b; b')$.

Плоскость β проходит через перпендикуляр NN_1 к плоскости γ, и потому $\beta \perp \gamma$. По-иному: $\beta \parallel a$, $a \perp \gamma$. Значит, $\beta \perp \gamma$.

б) *Об угле φ между прямыми a и b.*

Этот угол автоматически получается: так как $NN_1 \perp \gamma$, то $NN_1 \parallel a$ и $\varphi = \angle(b; NN_1) = \angle MNN_1$.

в) *О плоскости проекции.* Плоскость проекции $NMM_1N_1 = (b; b')$ является плоскостью β. Действительно, она проходит через прямую b параллельно прямой a (так как $NN_1 \parallel a$).

Именно в плоскости проекции $\beta = (b; b')$ лежит искомый угол $\varphi = \angle(b; NN_1)$.

4. *Решить* планиметрическую задачу в плоскости γ, а именно найти расстояние между точкой A и прямой b', т. е. длину перпендикуляра AH к ней.

   Общий перпендикуляр PQ к прямым a и b перпендикулярен к плоскостям α и β и поэтому параллелен плоскости γ, значит, проектируется на нее без искажений:

$$\rho(a, b) = PQ = \rho(A; b') = AH.$$

5. *Решить* планиметрическую *задачу:*

   В плоскости проекции $\beta = (b; b')$ найти угол между прямыми b и NN_1 (или b и MM_1), т. е. $\varphi = \varphi(b; NN_1)$.

   Итак, нахождение искомых величин ρ и φ сведено к решению двух планиметрических задач в плоскостях γ и β соответственно.

6. *Построить* общий перпендикуляр PQ. Для этого следует:

   - из точки H провести прямую HQ параллельно прямой a и на пересечении с прямой b получить единственную точку Q.

     Примечание. Точка Q существует. Иначе, если $HQ \parallel b$, то $a \parallel b$, что невозможно для скрещивающихся прямых a и b;

   - из точки Q в плоскости AHQ провести отрезок QP параллельно отрезку AH (или перпендикулярно прямой HQ) и на пересечении с прямой a получить точку P.

     Примечание. Точка P существует: в плоскости AHQ два перпендикуляра HA и QP к прямой a пересекают ее в точках A и P соответственно.

   - Отрезок PQ является искомым общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым a и b.

   Действительно:

$$\begin{cases} PQ \perp a \text{ по построению;} \\ PQ \perp b, \text{ что доказывается ниже.} \end{cases}$$

Первое доказательство. Отрезок AH перпендикулярен:

- прямой b' по построению,
- прямой NN_1, так как $NN_1 \perp \gamma$ и $AH \subset \gamma$.

Значит, отрезок AH перпендикулярен плоскости $\beta = NN_1M_1M = (b; b')$ и прямой b из нее: $AH \perp b$. Но $PQ \parallel AH$, поэтому $PQ \perp b$, что и требовалось доказать.

Второе доказательство (по теореме о трех перпендикулярах):

- прямая b' является проекцией наклонной b на плоскость γ и перпендикулярна прямой AH из этой плоскости (по построению), поэтому
- наклонная b также перпендикулярна прямой AH, а значит, и прямой PQ, так как $PQ \parallel AH$, т. е. $PQ \perp b$, что и требовалось доказать.

Примечание.
И здесь, и в иных местах приводятся подробные доказательства. Они полезны и необходимы для понимания и дальнейшего использования описываемых методов, так как последние целиком базируются на геометрических свойствах скрещивающихся прямых a, b и сопутствующих им плоскостей α, β, γ.

Первый случай описан.

2.2.2. Случай плоскости γ, перпендикулярной к плоскостям β и α, но не перпендикулярной к прямым a и b (рис. 10)

$$\gamma \perp \alpha, \quad \gamma \perp \beta, \quad \gamma \not\perp a, \quad \gamma \not\perp b$$

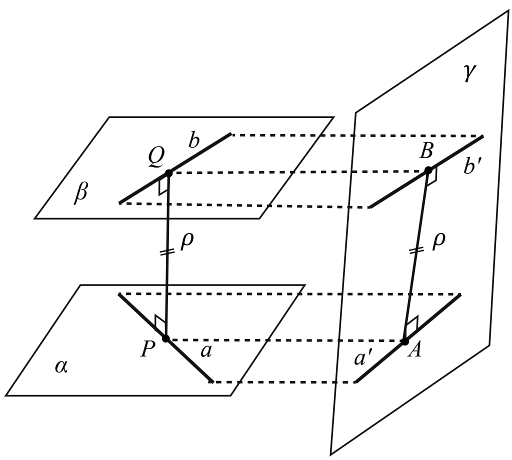

Рис. 10