ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание является учебным пособием для студентов строительных вузов при изучении курса «Динамика и устойчивость сооружений», который является составной частью полного объема дисциплины «Строительная механика». В учебное пособие включены дополнительные разделы, которые могут быть использованы при обучении в магистратуре и аспирантуре (1.10–1.15; 2.13–2.15).

Теоретический материал книги иллюстрируется простыми примерами, но, как известно, верные принципы, теории и методы, позволяющие решать упрощенные задачи, должны обеспечивать решение и более сложных.

В первой главе приведены элементы динамики сооружений. Рассмотрены алгоритмы метода главных координат и прямого метода интегрирования уравнений движения. Вторая глава содержит материал по устойчивости сооружений.

По теории динамики устойчивости издано много книг. Основополагающие работы А. М. Ляпунова [24], [25], в которых впервые сформулированы определения устойчивости движения, разработана теория и рассмотрены приложения, дали возможность построить современную теорию устойчивости. Ее развитию посвящены труды Н. Г. Четаева [40], В. В. Болотина [7], Н. Н. Красовского [23], Б. П. Демидовича [20], Р. Белмана [4].

Приложения общей теории устойчивости к решению инженерных задач рассмотрены в многочисленных изданиях, среди которых видное место занимают книги А. С. Вольмира [15], Я. Г. Пановко и М. И. Губановой [30], А. Ф. Смирнова [34], С. П. Тимошенко [36], Ф. С. Ясинского [43].

В учебной литературе для инженерно-строительных специальностей широко используются статический и энергетический методы. Среди учебных пособий, в которых рассматривается динамический метод, отметим книгу «Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах» Н. И. Безухова, О. В. Лужина, Н. В. Колкунова [2], выдержавшую несколько изданий в нашей стране и за рубежом; учебники А. Ф. Смирнова, А. В. Александрова, Б. Я. Лащенникова, Н. Н. Шапошникова [35], Д. Р. Меркина [27].

Содержание книги составляет основу цикла лекций для старших курсов строительного университета (института). Кроме того, варьируемый материал книги изучался на протяжении многих лет при подготовке аспирантов и докторантов по специальности «Строительная механика». Наряду с классическим содержанием курса «Динамика и устойчивость сооружений» предлагаемая книга содержит авторские научные результаты: двойственную формулировку законов Ньютона, метод точечного сохранения инвариантов (МТСИ) и, как следствие, вычислительные схемы прямого интегрирования уравнений движения, методики вычислений.

ГЛАВА 1

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Повторение, периодичность, возобновление, цикличность, колебания, вибрация, качание, волнообразование — привычные понятия и термины нашей повседневной жизни.

Движения или процессы, обладающие повторяемостью во времени, называют колебательными. Изначально при осмыслении поведения среды своего обитания человек столкнулся именно с такими процессами: смена дня и ночи, времен года; вибрация звучащей струны; колебания литосферы при землетрясениях; ветер возбуждает волны на поверхности водоемов. Выявлено множество биоритмических процессов в живых организмах — например, с удивительной надежностью бьется человеческое сердце, пульсируют звезды, вибрируют атомы и молекулы в твердом теле.

Физико-математическое описание колебательных процессов показывает, что основные законы колебаний во всех приведенных выше случаях одинаковы. Общность закономерностей колебательных процессов и распространения волн в конечном итоге породили новую науку и учебную дисциплину, которая носит название «Теория колебаний и волн». Раздел строительной механики «Динамика сооружений» по структуре изложения повторяет эту дисциплину, но иллюстративные примеры представляют собой динамический расчет строительных сооружений.

Курс «Динамика сооружений» содержит цикл лекций для студентов бакалавриата, магистратуры и аспирантуры.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ «КОЛЕБАНИЯ»

Пусть система совершает движение. Для твердого деформируемого тела в каждой точке возможно изменение компонент вектора перемещений u_i, деформаций ε_{ij}, напряжений σ_{ij}, интегральных силовых факторов M, Q, N.

Рассмотрим изменение произвольного параметра компонент НДС на некотором отрезке времени $q = q(t)$, $t \in [0, \infty)$.

Это изменение может быть:

- монотонным;
- немонотонным;
- существенно немонотонным (рис. 1).

Определение 1. Процесс изменения параметра q во времени, характеризующийся многократным поочередным возрастанием и убыванием, называется колебательным.

Определение 2. Колебания — движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени (Физика: энциклопедия. — М.: БЭ, 2003. — С. 293).

В технике широко применяется термин «вибрация» (от *лат.* vibratio — колебание).

В русском языке слова «вибрация» и «колебания» являются почти синонимами, первое употребляется в том случае, когда амплитуда колебаний мала в сравнении с характерным размером колеблющейся системы, а частота колебаний достаточно велика. Так, маятник часов колеблется, а не вибрирует.

Теория колебаний и волн для механических систем базируется на основных положениях классической механики Галилея — Ньютона.

Напомним их.

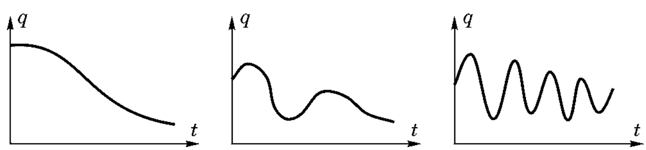

Рис. 1

1.3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Принцип относительности Галилея: никакие механические эксперименты, производимые внутри физической системы, не могут обнаружить равномерное и прямолинейное движение этой системы.

Сам Галилео Галилей (1564–1642) принцип относительности поясняет следующими легко реализуемыми экспериментами: «Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; пусть будет у вас там также большой сосуд с водой и плавающими в нем маленькими рыбками; подвесьте, далее, наверху ведерко, из которого вода будет капать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придется бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте все это, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль стоит неподвижно, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью, и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них вы не сможете установить, движется корабль или стоит неподвижно. Прыгая, вы переместитесь на то же расстояние, что и раньше, и не будете делать больших прыжков в сторону кормы, чем в сторону носа, на том основании, что корабль быстро движется, хотя за то время, как вы будете в воздухе, под вами будет двигаться в сторону, противоположную вашему прыжку, и, бросая какую-нибудь вещь товарищу, вы не должны будете бросать ее с большей силой, когда он будет находиться на носу, а вы на корме, чем когда ваше взаимное положение будет обратным; капли, как и ранее, будут падать в нижний сосуд, и ни одна не упадет ближе к корме, хотя, пока капля находится в воздухе, корабль пройдет много пядей; рыбы в воде не с большим усилием будут плыть к передней, чем к задней части сосуда; настолько же проворно они бросятся к пище, положенной в какой угодно части сосуда; наконец, бабочки и мухи по-прежнему будут летать во всех направлениях, и никогда не случится того, чтобы они собрались у стенки, обращенной к корме, как если бы устали, следуя за быстрым движением корабля, от которого они были совершенно обособлены, держась долгое время в воздухе; и если от капли зажженного ладана образуется немного дыма, то видно будет, как он восходит вверх и держится наподобие облачка, двигаясь безразлично, в одну сторону не более, чем в другую...» (Диалог о двух главнейших системах мира, день второй [42]).

Принцип относительности Галилея относится к кинематике и рассматривает траекторию (прямолинейное движение), скорость (равномерное движение), ускорение, равное нулю.

Современная формулировка этого принципа — принцип физического равноправия всех инерциальных систем отсчета (ИСО). В классической механике он проявляется в том, что законы механики во всех таких системах одинаковы.

Определение. Инерциальными системами отсчета называются те системы, в которых отсутствуют силы инерции и все физические законы одинаковы.

В инерциальной системе отсчета справедлив закон инерции. Всякая система отсчета, движущаяся по отношению к ИСО поступательно, равномерно и прямолинейно, есть также ИСО.

Закон инерции. При отсутствии внешних воздействий (сил) или когда действующие силы взаимно уравновешены тело сохраняет неизменным состояние своего движения или покоя относительно инерциальной системы отсчета.

Закон инерции по сути представляет собой формулировку-синоним I закона Ньютона и отражает всеобщее стремление всего того, что нас окружает, сохранить предшествующие состояния.

Напомним основные законы механики в первозданном виде [29] (Ньютон, 1686):

I закон [29, с. 39]: всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.

II закон [29, с. 40]: изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

III закон [29, с. 41]: действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

Следствие 1 [29, с. 41]: при силах совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время как его стороны — при раздельных.

В I законе внешние воздействия на материальную точку (внешние силы) отсутствуют, но если быстрое движение тела замедляется, то возникает сила, стремящаяся сохранить предшествующее быстрое движение. Наоборот, выход из состояния покоя или равномерного прямолинейного движения сопровождается возникновением силы, препятствующей этому. Возможно, подобные рассуждения привели к возникновению второго закона классической механики:

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

II закон Ньютон записал в виде следующего соотношения:

$$P(t - t_0) = m(V - V_0).$$

В левой его части — импульс силы, в правой — изменение количества движения.

В современных курсах механики это соотношение обобщается и формулируется в виде теоремы об изменении количества движения.

Эйлер в 1736 г. видоизменил запись II закона:

$$P = m \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V - V_0}{t - t_0} = ma.$$

Формально из II закона следует I: действительно, если скорость материальной точки $V = \text{const}$, то ускорение $a = dV/dt = 0$ и по (1.1) $P = 0$.

При записи (1.1), в сущности, использован принцип Даламбера (предложен в 1716 г. Германом и обобщен в 1737 г. Эйлером), который формулируется так: геометрическая сумма приложенных к материальной точке сил и силы инерции этой точки равна нулю.

Сила инерции для материальной точки:

$$\boldsymbol{I} = -m\boldsymbol{a}.$$

Уравнение равновесия:

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{I} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{a}.$$

Таким образом, во II законе Ньютона содержится и III: силы взаимодействия $\boldsymbol{I} = -\boldsymbol{P}$ равны между собой и противоположно направлены.

Внешняя сила P не появляется из ничего, она представляет собой влияние другого тела на точечную массу и поэтому можно говорить при формулировке II закона о силах взаимодействия внешнего тела и точечной массы.

Сам Ньютон так объяснял III закон механики [29, с. 41]: «Если лошадь тащит камень, привязанный к канату, то и, обратно (если так можно выразиться), она с равным усилием оттягивается к камню, ибо натянутый канат своею упругостью производит одинаковое усилие на лошадь в сторону камня и на камень в сторону лошади, и насколько этот канат препятствует движению лошади вперед, настолько же он побуждает движение вперед камня».

Следствие 1, сформулированное в «Началах» Ньютоном, так же как и законы, подтверждается опытами и наблюдениями. В курсе теоретической механики А. А. Яблонского и В. М. Никифорова оно сформулировано как IV закон Ньютона.

Принцип относительности Галилея, три закона механики и принцип суперпозиции (правило параллелограмма) — вот тот фундамент, на котором впоследствии построена и продолжает развиваться динамика сооружений, машин и механизмов. Центральное место в ней занимает II закон механики, более того, из него следует и I, и III.

1.4. КЛАССИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАССЫ

Масса — физическая величина, определяющая инертные и гравитационные свойства материи. Понятие «масса» было введено в механику Ньютоном при определении количества движения (импульса) тела

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{p}$ — импульс; $\boldsymbol{V}$ — скорость движения; коэффициент пропорциональности m — постоянная для рассматриваемого тела величина — масса. Эквивалентное определение массы следует из уравнения движения классической механики Ньютона:

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}, \tag{1.3}$$

где m — коэффициент пропорциональности между силой, действующей на тело $\boldsymbol{f}$, и его ускорением $\boldsymbol{a}$. По Ньютону,

$$\frac{dp}{dt} = f = \frac{d}{dt}(mV) = ma.$$

Определенная таким образом масса характеризует инерциальные свойства тел (чем больше масса, тем меньшее ускорение приобретает тело под действием постоянной силы) и называется инерциальной, или инертной массой.

В законе тяготения Ньютона

$$f = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.4}$$

где m_1, m_2 — массы двух тел, расстояние между центрами которых равно r; G — гравитационная постоянная.

Из (1.4) следует приближенная зависимость между массой тела m и его весом Q в поле тяготения Земли:

$$Q = mg, \tag{1.5}$$

где $g = GMr^{-2}$; M — масса Земли; r — радиус Земли.

Замечание. Фигура Земли — геоид, т. е. поверхность уровня потенциала силы тяжести. Для научного и практического использования принимается обобщенная, достаточно простая математическая аппроксимация — эллипсоид вращения, параметры которого подбираются из условия наилучшего совпадения фигуре геоида. Центробежные силы вращения Земли вокруг оси юг-север увеличивают экваториальный радиус и, как следствие, уменьшают расстояние между полюсами. В инженерной практике возможно более сильное упрощение — представление Земли в виде равновеликой сферы. Приближенная величина ускорения свободного падения при этом:

$$g = GMr^{-2},$$

где $G = 6{,}67259 \cdot (85) \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) — гравитационная постоянная; $M = 5{,}975 \cdot 10^{24}$ кг — масса Земли; $R = 6{,}37111 \cdot 10^6$ м — средний радиус равновеликой сферы Земли;

$$g = \frac{6{,}67259 \cdot (85) \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}975 \cdot 10^{24}}{(6{,}37111 \cdot 10^6)^2} \approx 9{,}82 \text{ м/с}^2.$$

Для сравнения приведем ускорение свободного падения у поверхности экватора Земли: $g \approx 9{,}78$ м/с^2. В приближенных расчетах допускается принимать $g = 10$ м/с^2.

Масса, определяемая соотношениями (1.3), (1.4), называется гравитационной. В соответствии с фундаментальным законом природы, именуемым принципом эквивалентности, гравитационная масса и инерционная отождествляются. При определенных частных условиях экспериментов этот принцип подтверждается с большой степенью точности.

В школьных и вузовских курсах физики рассматриваются элементы релятивистской механики. Для этой модели связь между импульсом и скоростью материальной частицы задается формулой

$$p = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{1.6}$$

где c — скорость света в вакууме; V — скорость движения точечной массы, при малых скоростях $\mathbf{V} \ll c$ (1.6) переходит в соотношение (1.2).

Величину m_0 называют массой покоя, а при движении частицы масса является переменной величиной и существенно зависит от скорости v:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

По теории относительности энергия частицы и ее массы связаны соотношениями:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Масса покоя m_0 определяет внутреннюю энергию частицы $E = m_0 c^2$ или внутреннюю энергию покоя.

Приведенный небольшой экскурс по определению «масса» показывает его разные трактовки. На сегодняшний день определение природы понятия «масса» — одна из важнейших, еще не решенных задач физики. При изучении строительной механики будем пользоваться определением Ньютона, отождествляя гравитационную и инертную величины массы.

1.5. КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Не претендуя на полноту перечня, перечислим виды динамических нагрузок, с которыми сталкивается инженер-строитель.

1. Неподвижная вибрационная нагрузка занимает постоянное положение на сооружении и периодически изменяет свою величину. Создается такая нагрузка механиз-

мами, находящимися на сооружении или вблизи него. Переменность нагрузки объясняется неуравновешенностью движущихся частей механизма.

2. Неподвижная ударная нагрузка характеризуется передачей усилий на сооружение за короткий промежуток времени в определенных областях. Ударная нагрузка может быть периодической и правильно периодической (кузнечные молоты, копры и др.).

3. Подвижная нагрузка, к которой прежде всего относится транспортная, — например, движение автомобилей, электровозов, подвижного состава по мосту. Здесь возможны удары (удар колес о рельсовый стык), вибросилы от неуравновешенных движущихся частей подвижного состава и всевозможные их комбинации, создающие сложную картину воздействий.

4. Сейсмическая нагрузка — беспорядочные движения основания сооружения, толчки, удары и колебания при землетрясении.

В кинематической классификации колебаний конструкций различают:

1. Периодические колебания, которые точно воспроизводятся через равные промежутки времени — периоды T, так что $q(t + T) = q(t)$. Например:

$$q = A\sin(\omega t + \gamma); \quad T = 2\pi/\omega. \tag{1.7}$$

2. Непериодические колебания.

3. Затухающие колебания:

$$q = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \gamma), \tag{1.8}$$

где $\sin(\omega t + \gamma) \in [-1, 1]$, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\alpha t} = 0$. Следовательно, полуразмахи величины q, равные $Ae^{-\alpha t}$, со временем уменьшаются, затухают.

4. Колебания с возрастающим полуразмахом, например при резонансе.

5. Биения. Этот вид колебаний будет рассмотрен далее.

При динамической классификации колебаний конструкций различают:

1. Свободные колебания, которые совершаются при отсутствии внешних воздействий. Возникают в результа-

те начального внешнего возмущения (импульсная нагрузка, внезапное удаление связи и др.).

2. Вынужденные колебания — вызываются переменным внешним воздействием.

3. Параметрические колебания — вызываются изменением во времени параметров конструкции. Примеры таких параметров — жесткость, масса, продольные силы и др.

4. Автоколебания (самовозбуждающиеся колебания) — начинаются при действии внешнего постоянного источника энергии. Возникнув случайно под действием некоторых переменных сил, они поддерживаются за счет энергии источника постоянной силы и происходят с частотой собственных колебаний конструкции. Пример — поперечные автоколебания стальной дымовой трубы при постоянной скорости ветра, происходящие в плоскости, нормальной к направлению ветра.

В заключение сформулируем основную задачу динамики сооружений — это определение характера изменений во времени перемещений (деформаций, напряжений, интегральных силовых факторов, т. е. компонент НДС) заданной системы при переменных внешних воздействиях.

Математические выражения, определяющие динамические компоненты НДС, называются уравнениями движения сооружений. В результате их решения можно получить искомые функции, изменяющиеся во времени. Вывод уравнений движения — один из важнейших этапов изучения колебаний конструкций.

В динамике сооружений различают два основных метода — статический и энергетический. Далее будут рассмотрены оба метода построения уравнений движения с постепенным усложнением.

1.5.1. КОЛЕБАНИЯ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Определение. Числом степеней свободы системы называется число независимых геометрических параметров, определяющих положение системы в любой момент времени, при любом ее движении.

При изучении курса статики сооружений для стержневых систем проводился кинематический анализ, одним из основных пунктов которого являлось вычисление числа степеней свободы системы. Необходимо было определить, может ли система или ее фрагмент перемещаться без деформации материала. Для плоских систем получены формулы, удобные при определении числа степеней свободы многопролетных балок:

$$W = 3D - 2\text{Ш} - C_\text{о},$$

где D — число жестких дисков; Ш — число простых шарниров, соединяющих диски; $C_\text{о}$ — число опорных связей.

Для плоских ферм:

$$W = 2\text{У} - C,$$

где У — число узлов фермы; C — число стержней, включая опорные.

Для плоских рам:

$$W = \text{Ш} - 3\text{К},$$

где К — число замкнутых контуров системы.

Если система статически неопределима, то число «лишних» неизвестных — неизвестных метода сил — определялось по формуле

$$\text{Л} = -W,$$

т. е. статически неопределимая система обладала отрицательным числом степеней свободы, а механизм (геометрически изменяемая система) имел отрицательное число «лишних» неизвестных. Такой математический формализм, лишенный физического смысла, не мешал пониманию существования отличия между механизмом и геометрически неизменяемой системой.

В конечном итоге при расчете систем по методу сил положение системы определялось величинами усилий в лишних связях.

При расчете систем методом перемещений число независимых геометрических параметров — узловых перемещений — определялось по формуле

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru