ВВЕДЕНИЕ

Научно-техническая революция, которая, как считают, произошла в конце прошлого века, привела к резкому увеличению числа различных технических систем и объема информации и к сокращению сроков создания новых машин и различных устройств. Это, в свою очередь, ускорило моральное устаревание последних и, как следствие, вызвало резкий рост темпов проектных и конструкторских работ. Было подсчитано, что в последние годы объем проектных работ возрастает примерно в десять раз каждые 10 лет. Поскольку число конструкторов такими темпами расти не может, это неизбежно должно приводить к снижению качества проектирования. С другой стороны, проектирование — единственная область деятельности, где достигнуты самые скромные результаты в повышении производительности труда. За последние 100 лет производительность труда во всей мировой промышленности выросла в 15 раз, а в инженерно-управленческой деятельности — приблизительно в два раза. Основная причина в том, что эти виды деятельности относятся к так называемым «эвристическим» (*греч.* «эврика» — «нашел»). Действительно, все интеллектуальные, творческие и изобретательские виды деятельности практически не поддаются (будем надеяться — пока) алгоритмизации и, следовательно, автоматизации.

И если пока нельзя автоматизировать весь процесс проектирования, то попытки автоматизировать хотя бы какие-то его части предпринимаются. В начале 1950-х гг. в лаборатории сервомеханизмов Массачусетского технологического института был разработан фрезерный станок, автоматически управляемый с помощью ЭВМ, что послужило началом эры станков с ЧПУ [31]. Первая САПР была разработана там же в 1963 г. Сазерлендом и называлась SKETCHPAD. Эта система уже использовала интерактивные графические устройства, включая такие понятия, как «резиновая нить», поле зрения светового пера, увеличение, вращение и сегментирование изображений. Таким образом, Сазерленда можно считать основоположником и одним из «пионеров» САПР. С этого момента САПР стали развиваться такими необычайно быстрыми темпами, каких не знало, пожалуй, ни одно из современных направлений техники. Новые идеи и результаты стали появляться почти каждый год:

- 1964 г. — фирма General Motors на оборудовании IBM создала систему DAC-1, которая выдавала твердые копии чертежей;
- 1965 г. — фирма Bell Telephone Laboratories разработала систему GRAPHIC 1, которая размещала элементы на печатных платах, разрабатывала принципиальные схемы и сборочные чертежи, интерактивно размещала соединяющие проводники, составляла и редактировала текст;
- 1966 г. — фирма IBM разработала систему проектирования гибридных интегральных схем, использовавшихся в ЭВМ IBM 360;
- 1967 г. — там же был разработан первый алгоритм удаления невидимых линий;
- 1972 г. — в Рочестерском университете были созданы две системы геометрического моделирования PADL-1 и PADL-2. Фирмой RCA была разработана система GOLD для получения чертежей масок интегральных схем, которая могла работать с большой ЭВМ в режиме разделения времени. Были продолжены дальнейшие разработки алгоритмов удаления невидимых линий и поверхностей;

- 1973 г. — фирма Lockheed впервые показала, что применение машинной графики может быть экономически эффективно. До этого некоторые оппоненты смотрели на САПР как на «научную игрушку».

Конец 1970-х гг. характеризуется быстрым превращением САПР в экономически привлекательный, а во многих областях и в незаменимый инструмент. С начала 1980-х гг. САПР становится уже развитым рыночным продуктом. В конце XX в. в нашей стране в учебные планы вузов были введены дисциплины по применению САПР для различных специальностей и направлений, в том числе и «САПР режущих инструментов». Эта книга является попыткой автора внести посильный вклад в становление и развитие данной дисциплины.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГОСТ ДЛЯ САПР

1.1. КОМПОНЕНТЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ САПР

ГОСТ 23501.101-87 определяет САПР как «организационно-техническую систему, входящую в структуру проектной организации и осуществляющую проектирование при помощи комплекса средств автоматизированного проектирования». При этом отмечается, что САПР — система автоматизированного проектирования, а не автоматического. Современный уровень развития САПР позволяет говорить только об автоматизированном проектировании отдельных стадий или их составных частей.

При разработке САПР необходимо руководствоваться следующими основными принципами: системного единства; совместимости; типизации и дальнейшего развития системы. Структурными частями комплексов САПР являются компоненты следующих видов обеспечения: программного, информационного, методического, математического, лингвистического, технического и организационного (рис. 1.1). Каждая компонента обеспечивает выполнение своей функции и представляет наименьший (неделимый) самостоятельно разрабатываемый (или покупаемый) элемент САПР.

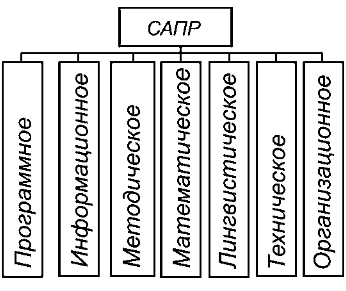

Рис. 1.1

1. *Программное обеспечение* должно регламентировать функционально законченное преобразование информации.

Программное обеспечение пишется на одном из стандартных языков программирования и удовлетворяет соглашениям о представлении данных, принятым в данной САПР.

2. *Информационное обеспечение* — информация, используемая проектировщиками в процессе проектирования и составляет базу данных (БД). Сюда же входит и система управления базами данных (СУБД), если их несколько.

3. *Методическое обеспечение* — документация инструктивно-методического характера, устанавливающая технологию автоматизированного проектирования, правила эксплуатации различных подсистем САПР, нормативы, стандарты и другие руководящие документы, регламентирующие процесс и объект проектирования.

4. *Математическое обеспечение* — методы и сами модели математического моделирования объектов и процессов проектирования, алгоритмы решения задач в процессе проектирования. Именно они должны обеспечить формализацию процесса проектирования.

5. *Лингвистическое обеспечение* — языки программирования, информационно-поисковые и вспомогательные языки, используемые в обслуживающих подсистемах и для связи с ними проектирующих подсистем. Они должны быть инвариантными к конкретному содержанию баз данных и рассчитанными в основном на диалоговый режим их использования.

6. *Техническое обеспечение* — устройства вычислительной и организационной техники, устройства передачи данных, измерительные и другие устройства и их сочетания, обеспечивающие диалоговый, многопользовательский и многозадачный режимы работы и построение иерархических и сетевых структур.

7. *Организационное обеспечение* — организационная структура системы и подсистем, задачи и функции службы САПР, права и ответственность должностных лиц, порядок подготовки и переподготовки пользователей САПР.

Как показывает практика, при разработке САПР наибольшие затраты времени приходятся на разработку математического обеспечения, поэтому здесь эта компонента будет рассмотрена более подробно.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ САПР

Поскольку, как уже упоминалось во введении, начиная с 1980-х гг. прошлого столетия САПР стал развитым рыночным продуктом, то ГОСТ 23501.108-85 регламентировал методы и признаки его классификации, основные группировки и правила обозначения САПР, используя фасетный метод. Установлены восемь признаков, каждый из которых характеризует свою квалификационную группировку (рис. 1.2). Код каждой группировки отделяют друг от друга точкой. Все квалификационные группировки, кроме второй, состоят из одного разряда кодового обозначения и, следовательно, не могут превышать цифры 9.

1-й признак: тип объекта проектирования. Код характеризует принадлежность САПР к области: *1* — машиностроения; *2* — приборостроения; *3* — технологических процессов в машино- и приборостроении; *4* — строительства; *5* — техпроцессов в строительстве; *6* — программных изделий; *7* — организационных систем; *8* — прочим.

2-й признак: разновидность объекта проектирования. Это единственный признак, код которого может состоять из нескольких разрядов, определяемых по действующим классификаторам на проектируемые объекты. Для САПР изделий машино- и приборостроения — по классификаторам ЕСКД или ОКП, для других отраслей — по действующим для них классификаторам. Так, для режущего инструмента код по ЕСКД — 280 000. Код этого признака допускается отделять от остальных не точками, а дефисами или круглыми скобками.

3-й признак: сложность объекта проектирования. Код определяется в зависимости от количества проектируемых

Рис. 1.2

составных частей: для машиностроения это деталь без сборки, для технологических процессов — операция: *1* — простые объекты (до 10^2); *2* — средней сложности (10^2–10^3); *3* — сложные объекты (10^3–10^4); *4* — очень сложные объекты (10^4–10^6); *5* — очень высокой сложности (свыше 10^6).

4-й признак: уровень автоматизации проектирования. Код показывает, какую часть процесса проектирования (в %) выполняют с использованием средств вычислительной техники: *1* — низкоавтоматизированное (до 25%); *2* — среднеавтоматизированное (25–50%); *3* — высокоавтоматизированное (свыше 50%).

5-й признак: комплексность автоматизации проектирования. Код характеризует САПР широтой охвата автоматизацией этапов проектирования: *1* — одноэтапная; *2* — несколько этапов; *3* — комплексная (все этапы).

6-й признак: характер выпускаемых документов. Код характеризует тип носителя выпускаемых документов: *1* — текстовые и графические документы на бумажной ленте или листе; *2* — документы на машинных носителях (перфокартах, перфолентах, магнитных лентах, дисках и барабанах); *3* — фотоносители (микрофильмы, микрофиши, фотошаблоны и т. п.); *4* — комбинированные (на двух и более типах носителей); *5* — прочие.

7-й признак: количество выпускаемых проектных документов в год. Код характеризует производительность САПР (единицей измерения является лист формата А4): *1* — малая (до 10^5); *2* — средняя (10^5–10^6); *3* — высокая (свыше 10^6).

8-й признак: количество уровней в структуре технического обеспечения. Код указывает число уровней: *1* — одноуровневая (САПР на основе средней или большой ЭВМ); *2* — двухуровневая (то же, что и одноуровневая, плюс взаимосвязанные с ней одно или несколько рабочих мест, имеющих собственную ЭВМ); *3* — трехуровневая (то же, что и двухуровневая, плюс различное периферийное программно-управляемое оборудование).

ГЛАВА ВТОРАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САПР РИ

2.1. МАТРИЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Матричное преобразование координат является исключительно мощным и ценным инструментом при проектировании сложнопрофильных инструментов, поскольку позволяет достаточно просто записывать координаты любых объектов в разных системах координат, составлять уравнения линий и поверхностей. Читателям рекомендуется самым внимательным образом изучить содержание этого раздела, что намного упростит усвоение материала последующих глав. В последние годы даже некоторые авторы учебников по металлорежущим инструментам (например [17]), начинают их именно с аналогичного раздела, что совершенно правильно. Чтобы лучше разобраться в сути и преимуществах матричного преобразования и привыкнуть к терминологии и принятым обозначениям, решим простую задачу.

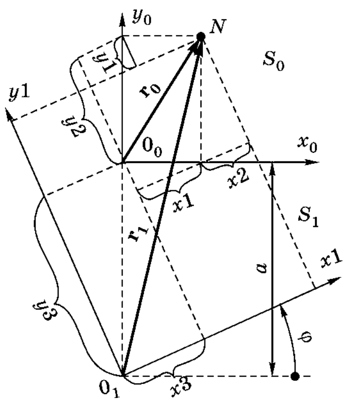

Рис. 2.1

Пусть в плоской системе координат S_0 (рис. 2.1) известны координаты точки $N(x_0, y_0)$. Требуется определить координаты этой же точки в системе координат S_1, начало 0_1 которой смещено вдоль оси y_0 на величину a, а вся система повернута против часовой стрелки на угол φ.

Договоримся называть систему, в которой известны координаты какого-либо объекта, старой системой координат, а систему, в которой мы будем отыскивать координаты этого объекта, — новой. Спроецируем точку N на координатные оси x_1 и y_1 новой системы S_1. Проекции ее по осям x_1 и y_1 будут равны сумме трех отрезков на каждой оси с учетом знака:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= E1 + E2 + E3, \\ y_1 &= -C1 + C2 + C3 \end{aligned}\right\}.$$

После подстановки значений этих отрезков, вычисленных из геометрических соотношений в соответствующих треугольниках, получим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi + a\sin\varphi, \\ y_1 &= -x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi + a\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (2.1)$$

А теперь запишем координаты точки N в новой системе S_1 в векторной форме как

$$\mathbf{r}_1 = M_{10}\mathbf{r}_0, \qquad (2.2)$$

где в матрицу M_{10} перехода от старой системы S_0 в новую систему S_1 подставим коэффициенты при x_0 и y_0 из уравнения (2.1) в виде элементов этой матрицы, а координаты точки N в системах S_0 и S_1 представим в виде столбцевых матриц, при этом соблюдение условия однородности координат в обеих системах требует занесения *1* в третью строку столбцевых матриц $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_0$ и в последний столбец матрицы M_{10}. Итак, запишем:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{Vmatrix}; \quad M_{10} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & a\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & a\cos\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Тогда (2.2) можно записать как

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & a\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & a\cos\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \qquad (2.3)$$

Найдем координаты в левой столбцевой матрице $\mathbf{r}_1$, используя известное правило умножения матриц «строка на столбец»:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi + a\sin\varphi,\\ y_1 &= -x_0\sin\varphi + y_0\cos\varphi + a\cos\varphi,\\ 1 &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{2.4}$$

Как оказалось, первые две строки полностью совпадают с (2.1), которое мы составили из геометрических соотношений. Отсюда следует, что если мы научимся составлять элементы квадратной матрицы M_{10}, то это позволит нам вычислять координаты проекций точки N в новой системе S_1 без геометрических построений. Выделим в матрице M_{10} путем вычеркивания последней строки и последнего столбца подматрицу L_{10}:

$$M_{10} = \left\| \begin{array}{ccc} \overbrace{\boxed{\begin{array}{cc} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{array}}}^{L_{10}} & \begin{array}{c} a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \end{array} \\ \begin{array}{cc} 0 & \quad 0 \end{array} & 1 \end{array} \right\|. \tag{2.5}$$

Оказалось, что все элементы этой подматрицы суть не что иное, как косинусы углов, образуемых координатными осями x_1 и y_1 новой системы S_1 с осями x_0 и y_0 старой системы S_0. При этом соблюдается следующее правило: строки подматрицы L_{10}, начиная с первой, «закреплены» за осями x_1 и y_1 новой системы, а столбцы — за осями x_0 и y_0 старой системы. Действительно, угол между осями x_1 и x_0 равен φ, поэтому первый элемент первой строки равен $\cos\varphi$; угол между осями x_1 и y_0 равен $(90° - \varphi)$, поэтому второй элемент первой строки равен $\sin\varphi$; угол между осями y_1 и x_0 равен $(90° + \varphi)$, поэтому первый элемент второй строки равен $-\sin\varphi$; угол между осями y_1 и y_0 равен φ, поэтому второй элемент второй строки равен $\cos\varphi$.

Осталось рассмотреть последний столбец матрицы $M_{10.}$ Здесь действует уже другое правило: сюда записывают проекции начала 0_0 старой системы на координатные оси новой системы S_1, причем также в первую строку записывают проекцию на ось x_1, во вторую строку — проекцию на ось y_1.

Таким образом, выражение (2.3) в самом общем виде можно записать как

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos(\angle x_1, x_0) & \cos(\angle x_1, y_0) & Px_1 \\ \cos(\angle y_1, x_0) & \cos(\angle y_1, y_0) & Py_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad (2.6)$$

где $\cos(\angle\, x_1,\, x_0)$, $\cos(\angle\, x_1,\, y_0)$ и т. д. обозначают косинусы углов между соответствующими осями, а Px_1 и Py_1 — проекции начала 0_0 старой системы на координатные оси x_1 и y_1 новой системы S_1.

При выводе (2.4) мы записали в третьей строке $1 = 1$, что получится при соблюдении правила умножения матриц. Договоримся в дальнейшем при подобных преобразованиях последнюю строчку $1 = 1$ больше не писать, поскольку для однородных координат это справедливо всегда и на всех континентах.

Изложенные выше правила матричного преобразования координат для плоских систем можно распространить и на пространственные системы декартовых координат правого направления. Напомним, что в правой системе координат, глядя из положительного направления оси z поворот от оси x к оси y выполняется против часовой стрелки. В этом направлении отсчитываются положительные значения угла. Также против часовой стрелки будем выполнять положительный поворот вокруг оси y от оси z к оси x и при повороте вокруг оси x от оси y к оси z. Если предполагается всего один поворот систем, то его направление принципиально не имеет значения и при вычислении этого угла его знак сам укажет направление. Но в дальнейшем нам придется многократно совершать поворот вокруг одной и той же оси и для упрощения формул и придания им компактного вида использовать тригонометрические формулы приведения углов. Естественно, складывать углы можно только при их одинаковых направлениях отсчета. Чтобы не запутаться и не получить неверные результаты, настоятельно рекомендуется придерживаться одного и того же правила: при переходе от старой системы к новой положительное направление отсчета углов указывать стрелкой в новой системе координат. При этом желательно изображать системы на рисунках именно в этом положении.

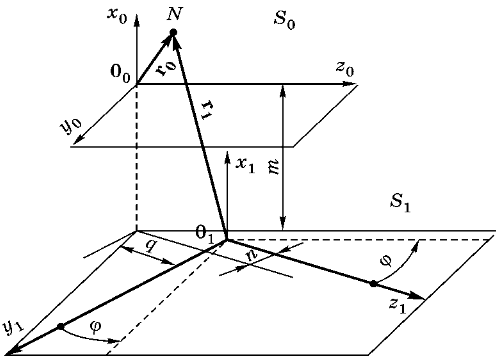

Рис. 2.2

Рассмотрим эти правила на примере уже двух пространственных систем координат S_0 и S_1 (рис. 2.2). Пусть в старой системе координат S_0 известны координаты точки $N(x_0, y_0, z_0)$. Определим координаты этой же точки в новой системе S_1, начало 0_1 которой смещено вдоль оси x_0 на величину m; вся система повернута вокруг оси x_1 на угол φ; начало 0_1 этой системы смещено по оси y_1 на величину n и по оси z_1 на величину $-q$.

По аналогии с (2.2) запишем такое преобразование сначала в векторной форме:

$$\mathbf{r}_1 = M_{10}\mathbf{r}_0, \tag{2.7}$$

где столбцевые векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_0$ и матрица M_{10} перехода от системы S_0 к системе S_1 будут уже четвертого порядка:

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} \cos(x_1\angle x_0) & \cos(x_1\angle y_0) & \cos(x_1\angle z_0) \\ \cos(y_1\angle x_0) & \cos(y_1\angle y_0) & \cos(y_1\angle z_0) \\ \cos(z_1\angle x_0) & \cos(z_1\angle y_0) & \cos(z_1\angle z_0) \end{matrix}}^{L_{10}} & \begin{matrix} Px_1 \\ Py_1 \\ Pz_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \qquad 0 & \qquad 0 \end{matrix} & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{matrix}\right\|. \tag{2.8}$$

В матрице M_{10} также можно выделить путем вычеркивания последней строки и последнего столбца подматрицу L_{10}. Элементы этой подматрицы также вычисляются как косинусы углов, образуемых осями x_1, y_1, z_1 новой системы S_1 с соответствующими осями x_0, y_0, z_0 старой системы S_0. При этом также строки сверху вниз «закреплены» за осями x_1, y_1, z_1 новой системы, а столбцы слева направо — за осями x_0, y_0, z_0 старой системы. Последний столбец матрицы M_{10} также представляет проекции Px_1, Py_1, Pz_1 начала 0_0 старой системы на координатные оси x_1, y_1, z_1 новой системы. Таким образом, эти правила полностью аналогичны правилам (2.6) для плоских систем, но добавляется еще одна координата по оси z.

В качестве примера определим координаты точки $N(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 2.2) в новой системе S_1:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & n \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & -q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.9}$$

При указании проекций Px_1, Py_1, Pz_1 необходимо обращать особое внимание на знак этих величин. Так, например, проекции m, n, q на рисунке изображены как абсолютные величины (рис. 2.2), но в новой системе S_1 проекция $Pz_1 = -q$. После умножения матрицы M_{10} на столбцевой вектор $\mathbf{r}_0$ получим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + m, \\ y_1 &= y_0 \cos\varphi - z_0 \sin\varphi + n, \\ z_1 &= y_0 \sin\varphi + z_0 \cos\varphi - q \end{aligned}\right\}. \tag{2.10}$$

Как мы и договорились, равенство $1 = 1$ в последней строке (в этом случае — в четвертой) больше писать не будем.

Обозначим элементы матрицы M_{10} в общем виде как

$$M_{10} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.11}$$

а ее подматрицы L_{10} как

$$L_{10} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}. \tag{2.12}$$

Для проверки «правильности» составления элементов подматрицы L_{10} можно руководствоваться следующими тремя правилами:

1. Симметрия с обратным знаком относительно главной диагонали.

Главная диагональ для L_{10}: $a_{11} \to a_{22} \to a_{33}$. Согласно этому правилу все элементы, расположенные ниже и левее главной диагонали, являются симметричным отображением элементов, расположенных выше и правее этой диагонали, но с обратным знаком. Проверим это для нашего примера (2.9). Элемент второй строки и третьего столбца равен $-\sin\varphi$, симметричный ему элемент нижней половины подматрицы L_{10}, расположенный на третьей строке во втором столбце, равен $\sin\varphi$.

2. Сумма квадратов элементов каждой строки (столбца) равна 1.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1,\\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1,\\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1 \end{aligned}\right\}\text{строки,}\qquad \left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1,\\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1,\\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1 \end{aligned}\right\}\text{столбцы.}$$

3. Сумма произведений соответственных элементов двух строк (столбцов) равна 0.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0,\\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0,\\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0 \end{aligned}\right\}\text{строки,}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0,\\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0,\\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0 \end{aligned}\right\}\text{столбцы.}$$

Обычно проверяют первое правило как более простое, реже проверяют второе и третье, так как среди элементов подматрицы L_{10} никогда не может оказаться, например $\operatorname{tg}\varphi$.

В некоторых задачах иногда появляется необходимость вернуться из новой системы координат в старую. Можно, конечно, объявить старую систему новой и заново составить матрицу перехода. Но если матрица перехода из старой системы в новую уже составлена, то можно сразу составить по излагаемому ниже правилу обратную матрицу. Пусть известна матрица M_{10} (2.11). Тогда обратная матрица M_{01} такова: