

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>От издательства</b> .....	16
<b>Благодарности</b> .....	17
<b>Об авторах</b> .....	18
<b>Введение</b> .....	22
<b>Часть 1. Геометрические чудеса в треугольнике</b> .....	24
Пример 1. Углы в центре вписанной окружности .....	25
Пример 2. Неожиданная перпендикулярность .....	25
Пример 3. Самое необычное деление отрезка пополам.....	26
Пример 4. Открытие Жергонна о вписанной окружности треугольника.....	26
Пример 5. Еще один неожиданный результат для треугольника Жергонна ....	26
Пример 6. По поводу описанной и вписанной окружностей .....	27
Пример 7. Пересечения, связанные со вписанной окружностью .....	28
Пример 8. Более общий случай пересечений, связанный со вписанной окружностью.....	29
Пример 9. Окружность, вписанная в основной треугольник, образует равные углы .....	29
Пример 10. Неожиданные равные углы.....	30
Пример 11. Вписанная окружность треугольника порождает свою описанную окружность.....	30
Пример 12. Основания высот делят треугольник на три пары треугольников равной площади .....	31
Пример 13. Примечательное свойство ортоцентра треугольника .....	31
Пример 14. Окружность пересекает треугольник, образуя множество равных отрезков .....	33
Пример 15. Странное представление равных треугольников .....	33
Пример 16. Ортоцентр создает три точки на одной прямой.....	34
Пример 17. Ортоцентр выступает как середина отрезка.....	34
Пример 18. Совокупность перпендикуляров образует равные отрезки прямой .....	35
Пример 19. Еще одна неожиданная коллинеарность .....	36
Пример 20. Представляем ортоцентрический треугольник .....	36

Пример 21. Определение периметра ортоцентрического треугольника .....	37
Пример 22. Ортоцентрический треугольник — вписанный треугольник с наименьшим периметром .....	38
Пример 23. Удивительный подобный треугольник для ортоцентрического треугольника.....	38
Пример 24. Замечательное совпадение в ортоцентрическом треугольнике ...	38
Пример 25. Ортоцентрический треугольник порождает равнобедренный треугольник.....	39
Пример 26. Ортоцентрический треугольник образует параллелограмм .....	40
Пример 27. Точки на одной окружности, образуемые ортоцентрическим треугольником .....	40
Пример 28. Ортоцентрический треугольник порождает пересекающиеся прямые.....	41
Пример 29. Ортоцентрический треугольник создает точки, лежащие на одной прямой .....	42
Пример 30. Неожиданное свойство основания высоты треугольника.....	43
Пример 31. Как из неравнобедренного треугольника можно построить параллелограмм .....	43
Пример 32. Перпендикуляры, образующие неожиданные параллельные прямые.....	44
Пример 33. Описанная окружность порождает точки на одной прямой .....	44
Пример 34. Неожиданное равенство треугольников в круге.....	45
Пример 35. Неожиданное свойство результата .....	46
Пример 36. Необычное произведение двух сторон треугольника .....	46
Пример 37. Теорема Симсона .....	46
Пример 38. Расширение теоремы Симсона .....	48
Пример 39. Интересный аспект теоремы Симсона.....	48
Пример 40. Параллель прямой Симсона.....	49
Пример 41. Два треугольника, связанных общей точкой: центр описанной окружности и геометрический центр.....	50
Пример 42. Знакомимся с медианами треугольника и некоторыми их удивительными свойствами.....	50
Пример 43. Медиана треугольника равнаудалена от двух вершин .....	52
Пример 44. Особая медиана в прямоугольном треугольнике .....	52
Пример 45. Медианы делят любой треугольник на четыре равных треугольника .....	53
Пример 46. Как геометрический центр помогает построить подобный треугольник .....	53
Пример 47. Геометрический центр обеспечивает необычное соотношение....	54
Пример 48. Расстояния от вершин треугольника до произвольной прямой....	54
Пример 49. Особое свойство геометрического центра, когда две медианы перпендикулярны.....	55
Пример 50. Удивительное свойство геометрического центра .....	56
Пример 51. Некоторые сюрпризы медианы .....	57
Пример 52. Другие чудеса с медианами .....	57
Пример 53. Сравнение медиан с периметром треугольника .....	57
Пример 54. Продление медиан создает коллинеарные точки .....	58

Пример 55. Два треугольника имеют общий геометрический центр .....	58
Пример 56. Невероятное соотношение центров описанных окружностей и медианых треугольников .....	59
Пример 57. Поразительное равенство .....	61
Пример 58. Неожиданное деление в треугольнике одновременно пополам и вчетверо .....	61
Пример 59. Удивительные соотношения площадей треугольников.....	61
Пример 60. Особенность случайной точки в равностороннем треугольнике....	62
Пример 61. Особенность точки, находящейся за пределами равностороннего треугольника .....	63
Пример 62. Использование равностороннего треугольника для разделения отрезка прямой на три части .....	64
Пример 63. Еще один способ разделить отрезок прямой на три части с помощью равностороннего треугольника .....	64
Пример 64. Необычная конструкция в виде треугольника с углами $30^{\circ}-60^{\circ}-90^{\circ}$ внутри равностороннего треугольника .....	64
Пример 65. Необычное соотношение отрезков в равностороннем треугольнике .....	66
Пример 66. Удивительная взаимосвязь между равнобедренным и равносторонним треугольниками .....	66
Пример 67. Неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике.....	66
Пример 68. Еще одно неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике .....	67
Пример 69. Замечательное геометрическое равенство .....	68
Пример 70. Еще одно замечательное геометрическое равенство.....	69
Пример 71. Неожиданная перпендикулярность .....	69
Пример 72. Неожиданное свойство высоты равнобедренного треугольника....	70
Пример 73. Особое свойство равнобедренных треугольников .....	70
Пример 74. Странная связь: центр вписанной окружности находится на описанной окружности .....	71
Пример 75. Коллинеарные точки образуют биссектрису угла.....	71
Пример 76. Неожиданные подобные треугольники .....	71
Пример 77. Перпендикуляры к четырем биссектрисам треугольника образуют четыре коллинеарные точки.....	72
Пример 78. Деление отрезка прямой пополам сложным способом .....	73
Пример 79. Определение периметра треугольника без измерения длины его сторон .....	73
Пример 80. Странная трисекция угла .....	74
Пример 81. Неожиданное равенство .....	74
Пример 82. Особенность треугольника.....	74
Пример 83. Равенство площадей треугольников, противоречащее здравому смыслу .....	76
Пример 84. Параллельные прямые образуют треугольник с удвоенной площадью .....	76
Пример 85. Неожиданные соотношения площадей треугольников .....	76
Пример 86. Построение треугольника, площадь которого равна трем четвертям площади данного треугольника .....	77

Пример 87. Поразительная конструкция: подобные треугольники, соотношение площадей которых равно 1:4.....	78
Пример 88. Непредвиденное равенство вписанных треугольников .....	78
Пример 89. Неожиданная общность треугольников равной площади .....	79
Пример 90. Как случайная точка делит площадь треугольника пополам .....	80
Пример 91. Нахождение треугольника, площадь которого составляет одну треть площади исходного.....	81
Пример 92. Точки трисекции сторон, разделяющие треугольник на части.....	81
Пример 93. Точки трисекции сторон треугольника преподносят больше сюрпризов .....	81
Пример 94. Еще один сюрприз преподносят точки трисекции сторон .....	83
Пример 95. Еще один сюрприз от точек трисекции сторон треугольника.....	83
Пример 96. Медианы и трисекторы сторон разбивают треугольник с неожиданным результатом.....	84
Пример 97. Непредвиденное свойство случайного треугольника с углом 60° .....	84
Пример 98. Еще одна удивительная особенность произвольного треугольника с углом в 60° .....	85
Пример 99. Еще одна неожиданная коллинеарность .....	85
Пример 100. При отражении треугольников образуются пересекающиеся окружности и пересекающиеся прямые .....	87
Пример 101. Чудеса трех пересекающихся равных окружностей .....	87
Пример 102. Другие неожиданные пересечения .....	88
Пример 103. Одно пересечение порождает другое .....	89
Пример 104. Необычные перпендикуляры, порождающие пересечения .....	89
Пример 105. Совершенно неожиданное пересечение .....	90
Пример 106. Интригующие пересечения .....	91
Пример 107. Еще одно неожиданное и непредсмотренное пересечение.....	91
Пример 108. Самое неожиданное пересечение в треугольнике .....	92
Пример 109. Поразительное свойство точки в треугольнике.....	93
Пример 110. Пересечение, противоречащее здравому смыслу .....	93
Пример 111. Пересекающиеся биссектрисы треугольников с общим основанием .....	94
Пример 112. Неожиданное пересечение с участием описанной окружности .....	94
Пример 113. Удивительный аспект пересечения чевиан .....	96
Пример 114. Удивительное равенство.....	96
Пример 115. Непредвиденный сюрприз треугольника .....	97
Пример 116. Замечательное свойство двух треугольников с общим основанием .....	97
Пример 117. Неожиданное разбиение на отрезки .....	98
Пример 118. Скрытое равенство длин отрезков прямой в треугольнике .....	100
Пример 119. Неожиданная величина угла .....	100
Пример 120. Неожиданное равенство в прямоугольном треугольнике .....	100
Пример 121. Загадка: перпендикуляр или параллель .....	101
Пример 122. Несколько средних точек в прямоугольном треугольнике определяют равные отрезки.....	102

Пример 123. Перпендикуляры в прямоугольных треугольниках	103
образуют равные углы.....	
Пример 124. Прямоугольные треугольники, имеющие общую гипotenузу, приводят к неожиданному равенству .....	103
Пример 125. Теорема Пифагора с геометрической точки зрения.....	103
Пример 126. Квадраты на сторонах треугольника могут преподнести интересные сюрпризы .....	105
Пример 127. Дополнительные свойства, создаваемые квадратами на сторонах треугольника.....	105
Пример 128. Неожиданная перпендикулярность.....	106
Пример 129. Удивительное пересечение с участием квадратов на сторонах треугольника.....	106
Пример 130. Еще одно удивительное совпадение для квадратов на сторонах треугольника.....	108
Пример 131. Использование квадратов на сторонах треугольника для создания еще одного удивительного совпадения.....	108
Пример 132. Квадраты на катетах прямоугольного треугольника дают неожиданное равенство .....	109
Пример 133. Подробнее о квадратах на катетах прямоугольного треугольника .....	110
Пример 134. Другие квадраты на сторонах прямоугольных треугольников .....	111
Пример 135. Еще одно неожиданное равенство площадей.....	112
Пример 136. Квадрат на гипотенузе прямоугольного треугольника.....	112
Пример 137. Действительно неожиданная коллинеарность.....	112
Пример 138. Необычный способ деления квадрата на две равные части .....	113
Пример 139. Удвоение квадрата .....	114
Пример 140. Странная конструкция из параллельных линий .....	114
Пример 141. Необычный способ нахождения середины отрезка .....	115
Пример 142. Неожиданное появление параллельных прямых.....	116
Пример 143. Неожиданная параллельная прямая .....	116
Пример 144. Удивительная перпендикулярность .....	117
Пример 145. Другая неожиданная перпендикулярность .....	117
Пример 146. Еще один неожиданный прямой угол .....	118
Пример 147. Четыре точки на одной окружности .....	119
Пример 148. Еще четыре примечательные точки на одной окружности .....	119
Пример 149. И еще четыре неожиданные точки на одной окружности .....	121
Пример 150. Перпендикуляры, образующие точки на одной окружности .....	121
Пример 151. Высоты и окружности, которые образуют еще одну окружность.....	122
Пример 152. Еще больше неожиданных точек на одной окружности.....	122
Пример 153. Удивительная окружность с пятью точками.....	122
Пример 154. Знаменитая окружность девяти точек .....	124
Пример 155. Коллинеарность с центром окружности девяти точек.....	125
Пример 156. Встреча трех известных центров треугольника.....	125
Пример 157. Свойства окружности девяти точек .....	126
Пример 158. Еще свойства окружности девяти точек .....	127

Пример 159. Неожиданная коллинеарность.....	127
Пример 160. Пересечение прямых, порождаемое ортоцентрическим треугольником .....	128
Пример 161. Высоты создают пересечение в одной точке и равенство.....	129
Пример 162. Вклад Наполеона в математику.....	129
Пример 163. Точка минимальных расстояний Наполеона (точка Ферма) .....	129
Пример 164. Точка минимальных расстояний не обязательно находится внутри треугольника .....	130
Пример 165. Расширения теоремы Наполеона .....	131
Пример 166. Пересекающиеся равносторонние треугольники .....	131
Пример 167. Удивительное соотношение площадей треугольников.....	132
Пример 168. Геометрический центр возвращает к предыдущей конфигурации .....	132
Пример 169. Появление еще одного равностороннего треугольника.....	134
Пример 170. Новый способ нахождения центра описанной окружности.....	134
Пример 171. Точка пересечения окружностей .....	135
Пример 172. Знаменитая теорема Микеля.....	136
Пример 173. Подобные треугольники Микеля .....	136
Пример 174. Поразительная теорема Морли.....	136
Пример 175. Расширение теоремы Морли .....	137
<b>Часть 2. Доказательства примеров .....</b>	<b>139</b>
Пример 1. Углы в центре вписанной окружности .....	139
Пример 2. Неожиданная перпендикулярность .....	139
Пример 3. Самое необычное деление отрезка пополам.....	140
Пример 4. Открытие Жергонна о вписанной окружности треугольника.....	142
Пример 5. Еще один неожиданный результат для треугольника Жергонна ..	143
Пример 6. По поводу описанной и вписанной окружностей .....	144
Пример 7. Пересечения, связанные со вписанной окружностью .....	144
Пример 8. Более общий случай пересечений, связанный со вписанной окружностью.....	144
Пример 9. Окружность, вписанная в основной треугольник, образует равные углы .....	146
Пример 10. Неожиданные равные углы.....	147
Пример 11. Вписанная окружность треугольника порождает свою описанную окружность.....	148
Пример 12. Основания высот делят треугольник на три пары треугольников равной площади.....	149
Пример 13. Примечательное свойство ортоцентра треугольника .....	150
Пример 14. Окружность пересекает треугольник, образуя множество равных отрезков .....	150
Пример 15. Странное представление равных треугольников .....	151
Пример 16. Ортоцентр создает три точки на одной прямой.....	154
Пример 17. Ортоцентр выступает как середина отрезка .....	155
Пример 18. Совокупность перпендикуляров образует равные отрезки прямой .....	156
Пример 19. Еще одна неожиданная коллинеарность .....	157
Пример 20. Представляем ортоцентрический треугольник .....	157

Пример 21. Определение периметра ортоцентрического треугольника .....	158
Пример 22. Ортоцентрический треугольник — вписанный треугольник с наименьшим периметром .....	158
Пример 23. Удивительный подобный треугольник для ортоцентрического треугольника.....	160
Пример 24. Замечательное совпадение в ортоцентрическом треугольнике .....	161
Пример 25. Ортоцентрический треугольник порождает равнобедренный треугольник .....	161
Пример 26. Ортоцентрический треугольник образует параллелограмм .....	163
Пример 27. Точки на одной окружности, образуемые ортоцентрическим треугольником .....	164
Пример 28. Ортоцентрический треугольник порождает пересекающиеся прямые .....	164
Пример 29. Ортоцентрический треугольник создает точки, лежащие на одной прямой .....	166
Пример 30. Неожиданное свойство основания высоты треугольника.....	166
Пример 31. Как из неравнобедренного треугольника можно построить параллелограмм .....	167
Пример 32. Перпендикуляры, образующие неожиданные параллельные прямые .....	168
Пример 33. Описанная окружность порождает точки на одной прямой .....	169
Пример 34. Неожиданное равенство треугольников в круге.....	170
Пример 35. Неожиданное свойство результата .....	170
Пример 36. Необычное произведение двух сторон треугольника .....	172
Пример 37. Теорема Симсона .....	172
Пример 38. Расширение теоремы Симсона .....	173
Пример 39. Интересный аспект теоремы Симсона.....	174
Пример 40. Параллель прямой Симсона.....	175
Пример 41. Два треугольника, связанных общей точкой: центр описанной окружности и геометрический центр.....	176
Пример 42. Знакомимся с медианами треугольника и некоторыми их удивительными свойствами .....	177
Пример 43. Медиана треугольника равноудалена от двух вершин .....	179
Пример 44. Особая медиана в прямоугольном треугольнике .....	179
Пример 45. Медианы делят любой треугольник на четыре равных треугольника .....	180
Пример 46. Как геометрический центр помогает построить подобный треугольник .....	181
Пример 47. Геометрический центр обеспечивает необычное соотношение....	182
Пример 48. Расстояния от вершин треугольника до произвольной прямой....	183
Пример 49. Особое свойство геометрического центра, когда две медианы перпендикулярны.....	183
Пример 50. Удивительное свойство геометрического центра .....	184
Пример 51. Некоторые сюрпризы медианы .....	186
Пример 52. Другие чудеса с медианами .....	187
Пример 53. Сравнение медиан с периметром треугольника .....	188
Пример 54. Продление медиан создает коллинеарные точки .....	189

Пример 55. Два треугольника имеют общий геометрический центр .....	189
Пример 56. Невероятное соотношение центров описанных окружностей и медианных треугольников .....	189
Пример 57. Поразительное равенство .....	195
Пример 58. Неожиданное деление в треугольнике одновременно пополам и вчетверо .....	196
Пример 59. Удивительные соотношения площадей треугольников .....	197
Пример 60. Особенность случайной точки в равностороннем треугольнике .....	197
Пример 61. Особенность точки, находящейся за пределами равностороннего треугольника .....	199
Пример 62. Использование равностороннего треугольника для разделения отрезка прямой на три части .....	199
Пример 63. Еще один способ разделить отрезок прямой на три части с помощью равностороннего треугольника .....	200
Пример 64. Необычная конструкция в виде треугольника с углами $30^{\circ}-60^{\circ}-90^{\circ}$ внутри равностороннего треугольника .....	200
Пример 65. Необычное соотношение отрезков в равностороннем треугольнике .....	202
Пример 66. Удивительная взаимосвязь между равнобедренным и равносторонним треугольниками .....	202
Пример 67. Неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике .....	204
Пример 68. Еще одно неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике .....	205
Пример 69. Замечательное геометрическое равенство .....	205
Пример 70. Еще одно замечательное геометрическое равенство .....	206
Пример 71. Неожиданная перпендикулярность .....	207
Пример 72. Неожиданное свойство высоты равнобедренного треугольника .....	208
Пример 73. Особое свойство равнобедренных треугольников .....	208
Пример 74. Странная связь: центр вписанной окружности находится на описанной окружности .....	209
Пример 75. Коллинеарные точки образуют биссектрису угла .....	209
Пример 76. Неожиданные подобные треугольники .....	211
Пример 77. Перпендикуляры к четырем биссектрисам треугольника образуют четыре коллинеарные точки .....	211
Пример 78. Деление отрезка прямой пополам сложным способом .....	212
Пример 79. Определение периметра треугольника без измерения длины его сторон .....	213
Пример 80. Странная трисекция угла .....	214
Пример 81. Неожиданное равенство .....	214
Пример 82. Особенность треугольника .....	216
Пример 83. Равенство площадей треугольников, противоречащее здравому смыслу .....	216
Пример 84. Параллельные прямые образуют треугольник с удвоенной площадью .....	217
Пример 85. Неожиданные соотношения площадей треугольников .....	218

Пример 86. Построение треугольника, площадь которого равна трем четвертям площади данного треугольника .....	219
Пример 87. Поразительная конструкция: подобные треугольники, соотношение площадей которых равно 1:4.....	220
Пример 88. Непредвиденное равенство вписанных треугольников .....	220
Пример 89. Неожиданная общность треугольников равной площади .....	222
Пример 90. Как случайная точка делит площадь треугольника пополам .....	223
Пример 91. Нахождение треугольника, площадь которого составляет одну треть площади исходного.....	224
Пример 92. Точки трисекции сторон, разделяющие треугольник на части.....	225
Пример 93. Точки трисекции сторон треугольника преподносят больше сюрпризов .....	226
Пример 94. Еще один сюрприз преподносят точки трисекции сторон .....	228
Пример 95. Еще один сюрприз от точек трисекции сторон треугольника.....	229
Пример 96. Медианы и трисекторы сторон разбивают треугольник с неожиданным результатом.....	231
Пример 97. Непредвиденное свойство случайного треугольника с углом 60° .....	232
Пример 98. Еще одна удивительная особенность произвольного треугольника с углом в 60° .....	232
Пример 99. Еще одна неожиданная коллинеарность .....	233
Пример 100. При отражении треугольников образуются пересекающиеся окружности и пересекающиеся прямые .....	234
Пример 101. Чудеса трех пересекающихся равных окружностей .....	236
Пример 102. Другие неожиданные пересечения .....	239
Пример 103. Одно пересечение порождает другое .....	241
Пример 104. Необычные перпендикуляры, порождающие пересечения .....	241
Пример 105. Совершенно неожиданное пересечение .....	242
Пример 106. Интригующие пересечения .....	243
Пример 107. Еще одно неожиданное и непредсмотренное пересечение.....	244
Пример 108. Самое неожиданное пересечение в треугольнике .....	245
Пример 109. Поразительное свойство точки в треугольнике.....	246
Пример 110. Пересечение, противоречащее здравому смыслу .....	247
Пример 111. Пересекающиеся биссектрисы треугольников с общим основанием .....	247
Пример 112. Неожиданное пересечение с участием описанной окружности .....	248
Пример 113. Удивительный аспект пересечения чевиан .....	248
Пример 114. Удивительное равенство.....	250
Пример 115. Непредвиденный сюрприз треугольника .....	250
Пример 116. Замечательное свойство двух треугольников с общим основанием.....	251
Пример 117. Неожиданное разбиение на отрезки .....	252
Пример 118. Скрытое равенство длин отрезков прямой в треугольнике .....	253
Пример 119. Неожиданная величина угла .....	254
Пример 120. Неожиданное равенство в прямоугольном треугольнике .....	254
Пример 121. Загадка: перпендикуляр или параллель .....	255

Пример 122. Несколько средних точек в прямоугольном треугольнике определяют равные отрезки.....	257
Пример 123. Перпендикуляры в прямоугольных треугольниках образуют равные углы.....	257
Пример 124. Прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу, приводят к неожиданному равенству .....	258
Пример 125. Теорема Пифагора с геометрической точки зрения.....	259
Пример 126. Квадраты на сторонах треугольника могут преподнести интересные сюрпризы .....	260
Пример 127. Дополнительные свойства, создаваемые квадратами на сторонах треугольника .....	264
Пример 128. Неожиданная перпендикулярность.....	265
Пример 129. Удивительное пересечение с участием квадратов на сторонах треугольника .....	266
Пример 130. Еще одно удивительное совпадение для квадратов на сторонах треугольника .....	268
Пример 131. Использование квадратов на сторонах треугольника для создания еще одного удивительного совпадения .....	269
Пример 132. Квадраты на катетах прямоугольного треугольника дают неожиданное равенство .....	270
Пример 133. Подробнее о квадратах на катетах прямоугольного треугольника .....	271
Пример 134. Другие квадраты на сторонах прямоугольных треугольников....	271
Пример 135. Еще одно неожиданное равенство площадей .....	273
Пример 136. Квадрат на гипотенузе прямоугольного треугольника.....	274
Пример 137. Действительно неожиданная коллинеарность.....	274
Пример 138. Необычный способ деления квадрата на две равные части.....	275
Пример 139. Удвоение квадрата .....	276
Пример 140. Странная конструкция из параллельных линий .....	276
Пример 141. Необычный способ нахождения середины отрезка .....	277
Пример 142. Неожиданное появление параллельных прямых.....	278
Пример 143. Неожиданная параллельная прямая .....	279
Пример 144. Удивительная перпендикулярность .....	279
Пример 145. Другая неожиданная перпендикулярность .....	280
Пример 146. Еще один неожиданный прямой угол.....	281
Пример 147. Четыре точки на одной окружности .....	282
Пример 148. Еще четыре примечательные точки на одной окружности .....	283
Пример 149. И еще четыре неожиданные точки на одной окружности .....	283
Пример 150. Перпендикуляры, образующие точки на одной окружности .....	285
Пример 151. Высоты и окружности, которые образуют еще одну окружность.....	286
Пример 152. Еще больше неожиданных точек на одной окружности.....	286
Пример 153. Удивительная окружность с пятью точками.....	288
Пример 154. Знаменитая окружность девяти точек .....	288
Пример 155. Коллинеарность с центром окружности девяти точек.....	290
Пример 156. Встреча трех известных центров треугольника.....	291
Пример 157. Свойства окружности девяти точек .....	292
Пример 158. Еще свойства окружности девяти точек .....	293
Пример 159. Неожиданная коллинеарность.....	293

Пример 160. Пересечение прямых, порождаемое ортоцентрическим треугольником .....	295
Пример 161. Высоты создают пересечение в одной точке и равенство.....	296
Пример 162. Вклад Наполеона в математику .....	296
Пример 163. Точка минимальных расстояний Наполеона (точка Ферма) .....	298
Пример 164. Точка минимальных расстояний не обязательно находится внутри треугольника .....	299
Пример 165. Расширения теоремы Наполеона .....	299
Пример 166. Пересекающиеся равносторонние треугольники .....	300
Пример 167. Удивительное соотношение площадей треугольников.....	302
Пример 168. Геометрический центр возвращает к предыдущей конфигурации .....	303
Пример 169. Появление еще одного равностороннего треугольника.....	303
Пример 170. Новый способ нахождения центра описанной окружности .....	304
Пример 171. Точка пересечения окружностей .....	306
Пример 172. Знаменитая теорема Микеля.....	306
Пример 173. Подобные треугольники Микеля .....	307
Пример 174. Поразительная теорема Морли.....	308
Пример 175. Расширение теоремы Морли .....	308
<b>Часть 3. Инструментарий.....</b>	311
Введение: набор геометрических инструментов .....	311
А. Инструменты, с которыми вы, вероятно, знакомы из школьного курса геометрии.....	312
A1. Равенство треугольников .....	312
A2. Подобие треугольников.....	312
A3. Свойства прямоугольного треугольника .....	312
A4. Углы, связанные с окружностью.....	313
A5. Касательные, секущие и хорды: сегменты окружности .....	314
A6. Закон синусов и закон косинусов .....	315
A7. Тождества суммы и разности углов .....	315
Б. Полезные и увлекательные инструменты, но менее привычные.....	315
B1. Внутренняя биссектриса угла в треугольнике.....	315
B2. Биссектриса внешнего угла в треугольнике .....	316
B3. Теорема Менелая.....	317
B4. Теорема Чевы .....	319
B5. Тригонометрическая версия теоремы Чевы .....	321
B6. Расширенная теорема Чевы .....	323
B7. Теорема Дезарга.....	324
B8. Теорема Стюарта .....	326
B9. Теорема Аполлония .....	328
B10. Теорема Птолемея.....	328
B11. Изометрия: отражение и вращение .....	329
B12. Гомотетия и подобие.....	332
B13. Полюсы и поляры .....	333
<b>Предметный указатель .....</b>	335

# ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

## Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте [www.dmkpress.com](http://www.dmkpress.com), зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу [dmkpress@gmail.com](mailto:dmkpress@gmail.com); при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу [http://dmkpress.com/authors/publish\\_book/](http://dmkpress.com/authors/publish_book/) или напишите в издательство по адресу [dmkpress@gmail.com](mailto:dmkpress@gmail.com).

## Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу [dmkpress@gmail.com](mailto:dmkpress@gmail.com). Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

## Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты [dmkpress@gmail.com](mailto:dmkpress@gmail.com).

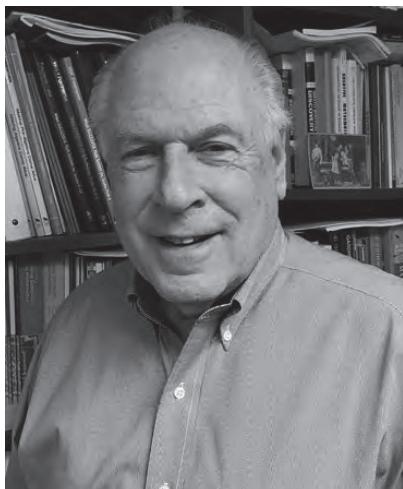
Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

# **БЛАГОДАРНОСТИ**

Хорошо известно, что математические задачи часто имеют альтернативные пути решений. Наша цель в этой книге заключается в выборе самых элегантных и эффективных решений некоторых сложных геометрических проблем. Несколько математиков предоставили нам свои замечательные идеи. Мы благодарим Дэвида Ханкина, Морица Хиблера, Ханса Хьюминбергера и Роберта Серки за то, что поделились с нами своим опытом.

# ОБ АВТОРАХ

## Альфред С. Позаментье



Альфред С. Позаментье в настоящее время — преподаватель Технологического колледжа Городского университета Нью-Йорка. До этого он работал исполнительным директором по интернациональным программам в университете Лонг-Айленда, Нью-Йорк. Этой работе предшествовали 5 лет в качестве декана Школы образования и профессора математики в университете Мерси, Нью-Йорк, и 40 лет преподавания в колледже Городского университета Нью-Йорка, в котором он сейчас является почетным профессором математики и деканом Школы образования. Доктор Позаментье — автор и соавтор более 80 книг по математике для учителей, учащихся средних и начальных школ, а также для массового читателя. Он также часто появляется в газетах и журналах в качестве комментатора по темам, связанным с образованием и математикой.

После получения степени бакалавра математики в Хантер-колледже Городского университета Нью-Йорка Альфред Позаментье занял должность учителя математики в средней школе Теодора Рузвельта (Бронкс, Нью-Йорк), где

сосредоточил свое внимание на улучшении навыков учеников в решении задач и в то же время расширении их знаний за пределами того, что предлагали традиционные учебники. В течение своего шестилетнего пребывания на этой должности он также организовал первые математические команды этой школы (как на младшем, так и на старшем уровне). Он и сейчас участвует в работе с учителями и школьными инспекторами математики, на национальном и международном уровне, чтобы помочь им работать эффективнее.

Получив степень магистра в 1966 году, Альфред Позаментье в 1970 году пришел на один из факультетов Городского колледжа Нью-Йорка, где начал разрабатывать курсы без отрыва от работы для учителей математики средней школы, в том числе в таких областях, как развлекательная математика и решение особых математических задач. За время пребывания в качестве декана доктор Позаментье вывел школу с нижней части рейтинга штата Нью-Йорк на его вершину с наивысшей оценкой по аккредитации NCATE<sup>1</sup> в 2009 году. Он также собрал более 12 миллионов долларов от частного сектора для образовательных инновационных программ. Альфред Позаментье повторил этот успех в университете Мерси, что позволило ему стать единственным колледжем, который одновременно получил аккредитацию как NCATE, так и TEAC<sup>2</sup>.

В 1973 году доктор Позаментье получил степень доктора философии от университета Фордхэма (Нью-Йорк) в области математического образования и с тех пор распространял свою репутацию в области математического образования в Европу. Он приглашенный профессор в нескольких европейских университетах Австрии, Англии, Германии, Чешской Республики, Турции и Польши. В 1990 году избран профессором по программе Фулбрайта<sup>3</sup> в Венском университете.

В 1989 году доктору Позаментье было присвоено звание почетного сотрудника в университете Саут-Бэнк (Лондон, Англия). В знак признания его выдающихся заслуг в 1994 и в 2009 годах Ассоциация выпускников городского колледжа Нью-Йорка называла его педагогом года. В 1994 году он также был награжден почётным знаком «За заслуги перед Австрийской Республикой», а в 1999 году после одобрения парламента президент Австрийской Республики присудил ему звание университетского профессора Австрии. В 2003 году он был награжден званием почетного научного сотрудника Венского технологического университета, а в 2004 году — почётным знаком Австрийской республики «За науку и искусство» первого класса. В 2005 году доктор Поза-

<sup>1</sup> National Council for Accreditation of Teacher Education (NCATE) — до 2013 года центральный национальный орган Министерства образования США по аккредитации программ педагогического образования в колледжах и университетах. — Здесь и далее прим. перев. (авторские помечаются отдельно).

<sup>2</sup> Teacher Education Accreditation Council (TEAC) — совет, который до 2013 года также занимался аккредитацией программ подготовки учителей. В указанном году оба ведомства были слиты в единый Council for the Accreditation of Educator Preparation (CAEP).

<sup>3</sup> Программа Фулбрайта (Fulbright Program) — крупнейшая из финансируемых правительством США международных обменных программ в области образования.

ментье был введен в Зал славы выпускников нью-йоркского Хантер-колледжа, а в 2006 году награжден престижной медалью Харриса Таунсенда, названной в честь основателя городского колледжа Нью-Йорка. Он был введен в Зал славы математиков штата Нью-Йорк в 2009 году, а в 2010 году был также удостоен премии имени Кристиана Петера Бейта от Берлинского института техники и экономики. В 2017 году доктор Позаментье был единогласно награжден академической премией фонда Себастиана в Мехико, Мексика.

Доктор Позаментье занимал многочисленные руководящие должности в математическом образовании на местном уровне. Он был членом экзаменационной комиссии по образованию Нью-Йорка и комитета по образовательным стандартам, который переосмыслил математические стандарты для штата Нью-Йорк, а также служил в Математической консультационной группе школ Нью-Йорка.

Он по-прежнему является ведущим экспертом по вопросам образования и продолжает свою давнюю страсть к поиску способов сделать математику интересной как для учителей, так и для широкой публики, как видно из некоторых из его более поздних книг. Для получения дополнительной информации и списка его публикаций см.: [https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred\\_S.\\_Posamentier<sup>1</sup>](https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_S._Posamentier).

### Роберт Геретшлегер



Роберт Геретшлегер — учитель математики и геометрии, живущий в Граце, Австрия. В 2022 году он ушел со своей преподавательской должности в австрийской федеральной государственной гимназии им. Кеплера в Граце после почти 40 лет работы. В настоящее время он по-прежнему активен в качестве лектора по геометрии в области педагогического образования в Грацском университете, Австрия.

<sup>1</sup> Русскоязычная версия: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Позаментье,\\_Альфред\\_С..](https://ru.wikipedia.org/wiki/Позаментье,_Альфред_С..)

Конец ознакомительного фрагмента.  
Приобрести книгу можно  
в интернет-магазине  
«Электронный универс»  
[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)