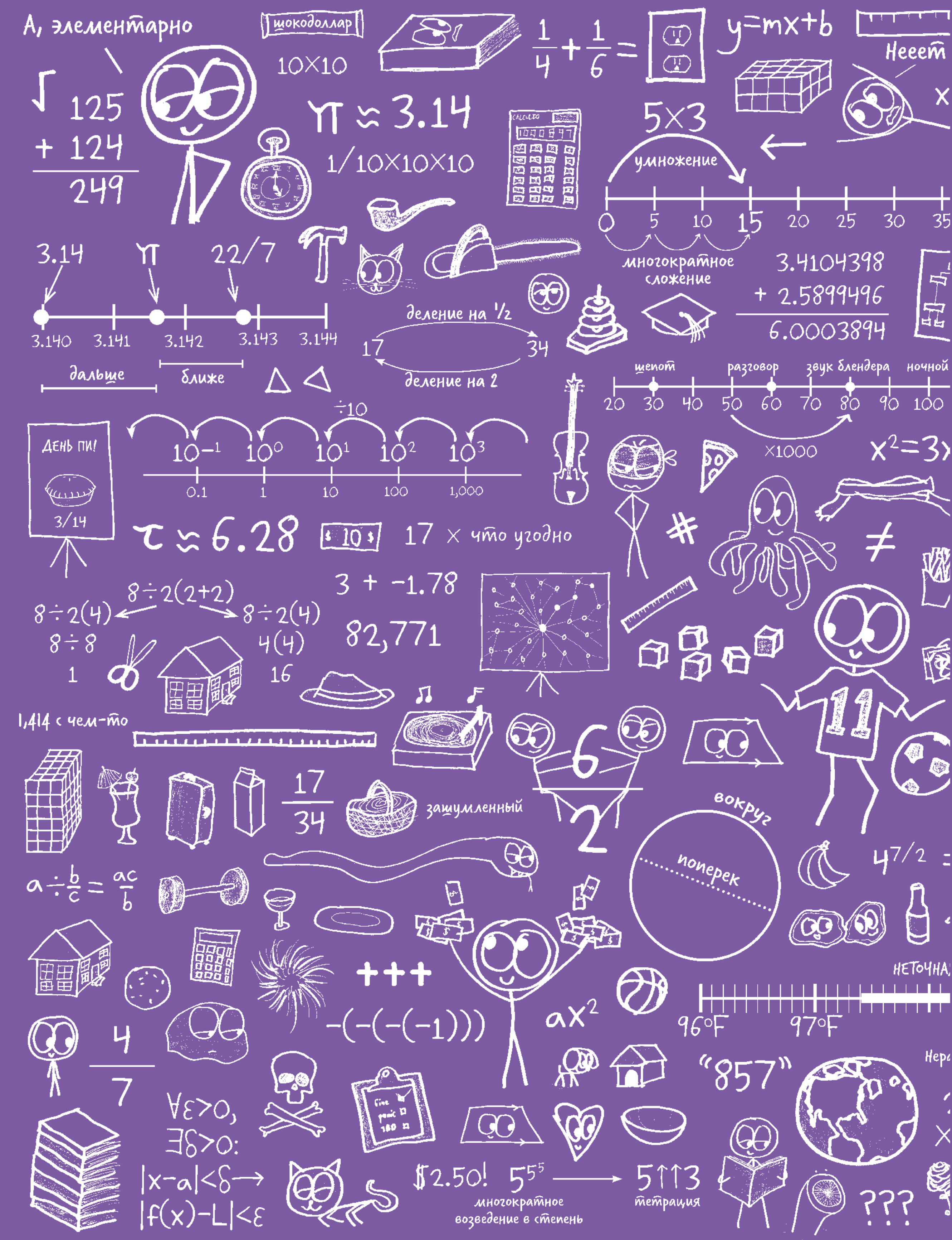
СОДЕРЖАНИЕ

ГРАММАТИКА

Синтаксис алгебры • 147

РАЗГОВОРНИК

Путеводитель по математическому словарю от старожила • 219

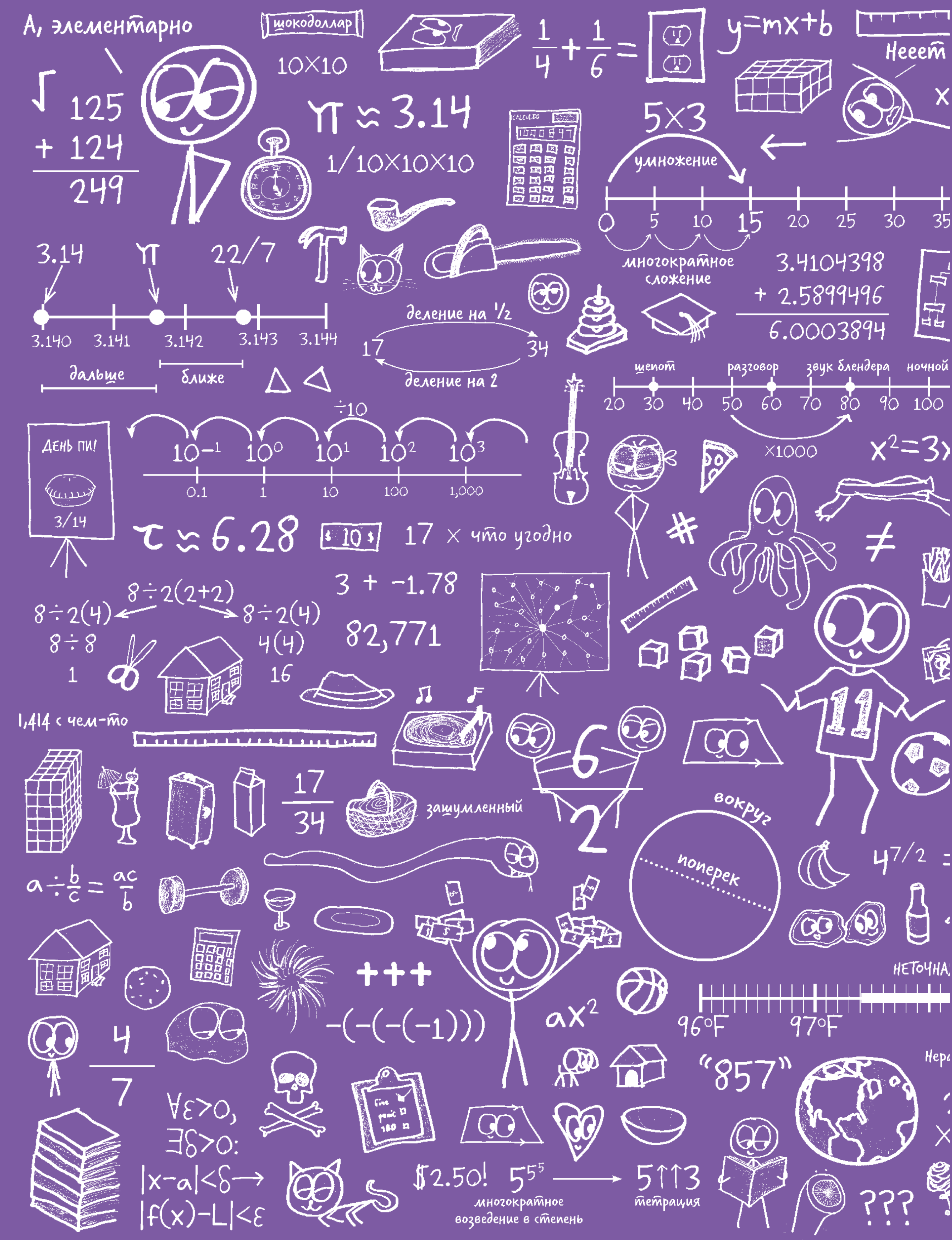


А, элементарно
шокодоллар
10×10
$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=$
y=mx+b
Нееет
$\sqrt{125}$ + 124 / 249
π ≈ 3.14
1/10×10×10
5×3
умножение
0 5 10 15 20 25 30 35
многократное сложение
3.4104398 + 2.5899496 / 6.0003894
3.14 π 22/7
3.140 3.141 3.142 3.143 3.144
дальше
ближе
деление на ½
17 34
деление на 2
шепот разговор звук блендера ночной
20 30 40 50 60 70 80 90 100
×1000
÷10
10^{-1} 10^0 10^1 10^2 10^3
0.1 1 10 100 1,000
День пи!
3/14
$x^2=3x$
τ ≈ 6.28
$10
17 × что угодно
8÷2(2+2)
8÷2(4)
8÷8
1
8÷2(4)
4(4)
16
3 + −1.78
82,771
1,414 с чем-то
17/34
зашумленный
6/2
вокруг
поперек
$a\div\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$
$4^{7/2}$
+++
−(−(−(−1)))
ax^2
НЕТОЧНАЯ
96°F 97°F
4/7
∀ε>0,
∃δ>0:
|x−a|<δ→
|f(x)−L|<ε
"857"
$2.50!
5^{5^5}
многократное возведение в степень
5↑↑3
тетрация
???

Только находящийся вовне наблюдатель может показать прирожденному носителю языка, что его высказывания, какими бы простыми и ясными они тому ни казались, являются на самом деле невероятно сложными, потому что содержат в скрытом виде обширный аппарат настоящего языка[*,1].

Оливер Сакс. Зримые голоса

* Перевод А. Н. Анваера. — *Прим. пер.*



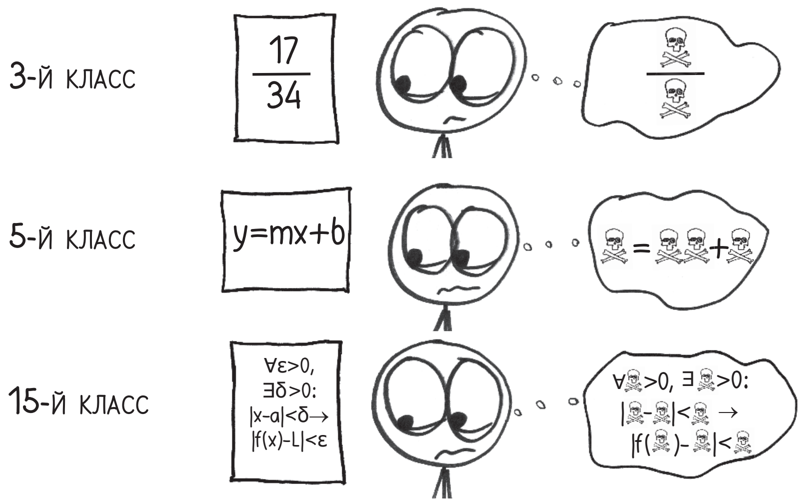
А, элементарно
шокодоллар
10×10
1/4 + 1/6 =
y=mx+b
Нееет
√125
+ 124
249
π ≈ 3.14
1/10×10×10
5×3
умножение
0
5
10
15
20
25
30
35
многократное сложение
3.4104398
+ 2.5899496
6.0003894
3.14
π
22/7
3.140
3.141
3.142
3.143
3.144
дальше
ближе
деление на ½
17
34
деление на 2
шепот
разговор
звук блендера
ночной
20
30
40
50
60
70
80
90
100
×1000
÷10
10⁻¹
10⁰
10¹
10²
10³
0.1
1
10
100
1,000
День Пи!
3/14
x²=3x
τ ≈ 6.28
$ 10 $
17 × что угодно
#
≠
8÷2(2+2)
8÷2(4)
8÷8
1
8÷2(4)
4(4)
16
3 + −1.78
82,771
11
1,414 с чем-то
6
2
17
34
зашумленный
вокруг
поперек
a÷b/c = ac/b
4^{7/2} =
НЕТОЧНАЯ
96°F
97°F
+++
−(−(−(−1)))
ax²
4
7
∀ε>0,
∃δ>0:
|x−a|<δ→
|f(x)−L|<ε
"857"
$2.50!
5^{5^5}
5↑↑3
многократное возведение в степень
тетрация
???

ВВЕДЕНИЕ

Как-то на лекции я попросил младшекурсников поделиться своими первыми воспоминаниями о математике. Одна студентка рассказала историю столь необычную — и в то же время столь универсальную, — что она глубоко проникла в мое подсознание и стала ощущаться как мое собственное воспоминание.

В возрасте пяти лет эта девочка получила задание — список примеров на сложение. Беда была в том, что она не знала, как читать эти смешные символы на листках бумаги: 2, + и прочее. Ее никто этому не учил. Спросить она постеснялась — и нашла обходной маневр, запоминая каждую сумму не как факт сложения чисел, а как произвольное правило, относящееся к фигурам. Например, 8 + 1 = 9 было не утверждением, что 9 на единицу больше 8, а закодированным набором инструкций: если тебе показывают два кружка, один на другом (8), а за ними идет крестик (+), вертикальная линия (1) и пара горизонтальных линий (=), то нужно вписать в пустое пространство кружок с загнутым хвостом внизу (9). Она старательно вызубрила десятки подобных правил, одинаково причудливых и бессмысленных. Это была кафкианская математика.

Мало кто осваивает 8 + 1 = 9 подобным образом. Но рано или поздно чуть ли не каждый, кто изучает математику, испытывает то же чувство дезориентации и прибегает к столь же отчаянным обходным маневрам. В детском саду, в средней школе или в аспирантуре — в конце концов замешательство настигает вас и математика становится, выражаясь словами математика Давида Гильберта, игрой с «бессмысленными закорючками на бумаге».



Со всеми нами такое бывало. Вам попадается незнакомый символ, вы спотыкаетесь на очередном действии и спрашиваете, что значит все это месиво знаков. В ответ вы выслушиваете поток абракадабры. Вы спрашиваете, что значит *он*. На вас обрушивается лавина белиберды. Так продолжается вновь и вновь, с обеих сторон нарастает раздражение, и в конце концов вы киваете, улыбаетесь и отвечаете: «Ага. Спасибо. Теперь ясно». Затем, отчаявшись что-либо понять, вы принимаетесь за изнурительную зубрежку, запоминая, какие закорючки и в каком порядке писать.

Мы любим говорить, что математика — это язык. (Больше того, «универсальный язык».) Но если языки объединяют людей, то почему математика вызывает у нас такое чувство одиночества?

Я профессиональный апологет математики. Я использую слово «апологет» и в классическом смысле (защитник; сторонник; толкователь определенной картины мира), и в современном (тот, кто занят пиаром для клиента, вызывающего всеобщее презрение). На этот путь меня толкнуло — и сделало преподавателем математики — смутное и явно непомерно раздутое убеждение, что математика нуждается в моей помощи. Похоже, все сходились в одном: с преподаванием математики что-то было не так, ужасно — может быть, безнадежно — не так.

Что же именно с ним было не так? Вот здесь-то и возникали разногласия. Последние 15 лет я посвятил тому, что пробовал в этом разобраться.

Одна распространенная жалоба — недостаток «связи с реальной жизнью». Математика слишком абстрактна, слишком темна, слишком высоко сидит в своей башне из слоновой кости. Вечная мантра: «Как мне это пригодится в жизни?» Многие авторы учебников принимают этот ропот близко к сердцу. Например, они переводят вопрос о квадратном уравнении (скучно!) в вопрос о компании, чей доход — хоть в этом допущении нет ни складу ни ладу — вычисляется с помощью квадратного уравнения (так жизненно, так практично!). Другие просветители отвергают сам посыл жалобы по поводу «реальной жизни». Никто ведь не спрашивает, как им в жизни «пригодятся» музыка или литература, правда? Так почему не последовать мудрости Альберта Эйнштейна и не принять математику как «поэзию логических идей»[2]?

Как бы мы ни реагировали на сетования по поводу «реальной жизни», я подозреваю, что мы воспринимаем их слишком буквально. Когда ученики спрашивают о пользе, они имеют в виду не *практическое применение*. Они имеют в виду *цель*. «Как мне это пригодится в жизни?» означает что-то вроде «Чем мы тут занимаемся?», или «В чем смысл этой тягомотины?», или «Что все это значит?».

Они не хотят сказать: «Назовите дату в далеком будущем, когда эти задачи приведут к поступлению денег на мой банковский счет» или «Объясните, каким неожиданным образом эти задачи могут оказаться полезными для моей души». Вопрос, скорее, стоит так: «Скажите мне здесь и сейчас, *что такое* эти задачи?»

Математика не просто собрание идей. Это особый способ говорить об этих идеях. Сами того не подозревая, ученики просят помочь им освоить самый странный язык человечества.

Так что имеется в виду, когда мы говорим, что математика — это язык?

Математика начинается с чисел. Хотя между числами и словами есть немало заметных различий, то и другое — системы категоризации мира. Числа, как и слова, позволяют нам свести сложный опыт (например, прогулку вокруг озера) к чему-то намного более простому. В случае со словами — к описанию («Там было много породистых собак»); в случае с числами — к количеству («3 мили»).

За числами следуют вычисления. Вычисления порождают из старых чисел новые, то есть новое знание из старого. Например, если наше озеро примерно круглое и имеет береговую линию в 3 мили, то я могу рассчитать, что до противоположного берега приблизительно 1 миля.

Ладно. Но дальше идет алгебра.

Алгебра, подобно литературе или философии, на шаг отступает от повседневного мира. Мы оставляем конкретные числа (177) и конкретные вычисления (177 ÷ 3), чтобы постичь саму природу счета. Алгебра открывает новые возможности: упрощение расчетов, перестановка действий, сравнение подходов и так далее. Это требует развитой грамматики со специфической системой именных словосочетаний и небольшим табуном рабочих лошадок — глаголов. Прежде всего, конкретные числа вроде 3 уступают место абстрактным переменным вроде x. Этот прыжок в темноту — когда от конкретного 3 мы переходим к обобщенному x — знаменует зарю совершенно нового языка, которая для многих людей становится сумерками понимания.

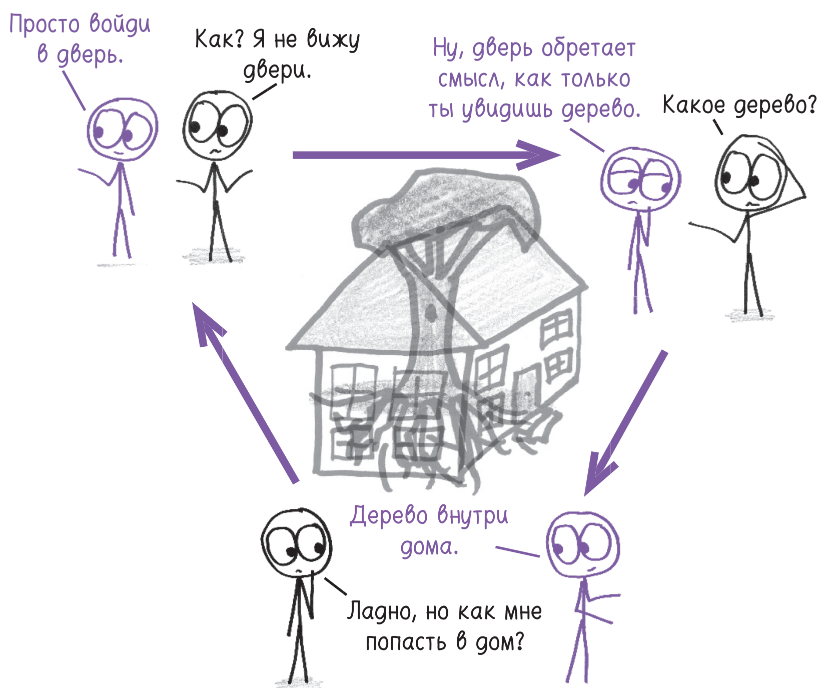
У этой небольшой книжки высокая цель: научить вас языку математики. Мы пройдем от абстрактных существительных чисел к переходным глаголам вычислений, а затем к тонкой грамматике алгебры. Конечно, сколько-то страниц с дурацкими рисунками не помогут выучить целый язык, но, надеюсь, эти страницы смогут стать для вас отправной точкой.

То, что я предлагаю, несколько необычно. Когда мы, математики, пишем для широкой аудитории, мы, как правило, воспеваем идеи своего предмета и способы его применения, а не язык, с помощью которого эти идеи выражены. Зачастую мы вообще отказываемся от этого языка, переводя равенства (по мере сил) на язык прозы.

В этой книге избран иной путь — более тернистый и не столь торный. Это не литература в переводе, а попытка оживить прекрасный и строгий язык, который делает возможной эту литературу.

В классической загадке спрашивается, была ли математика открыта или изобретена. Вплетена ли математика в ткань природы? Или это инструмент, созданный нами для изучения природы? Что есть математика — атом или микроскоп?

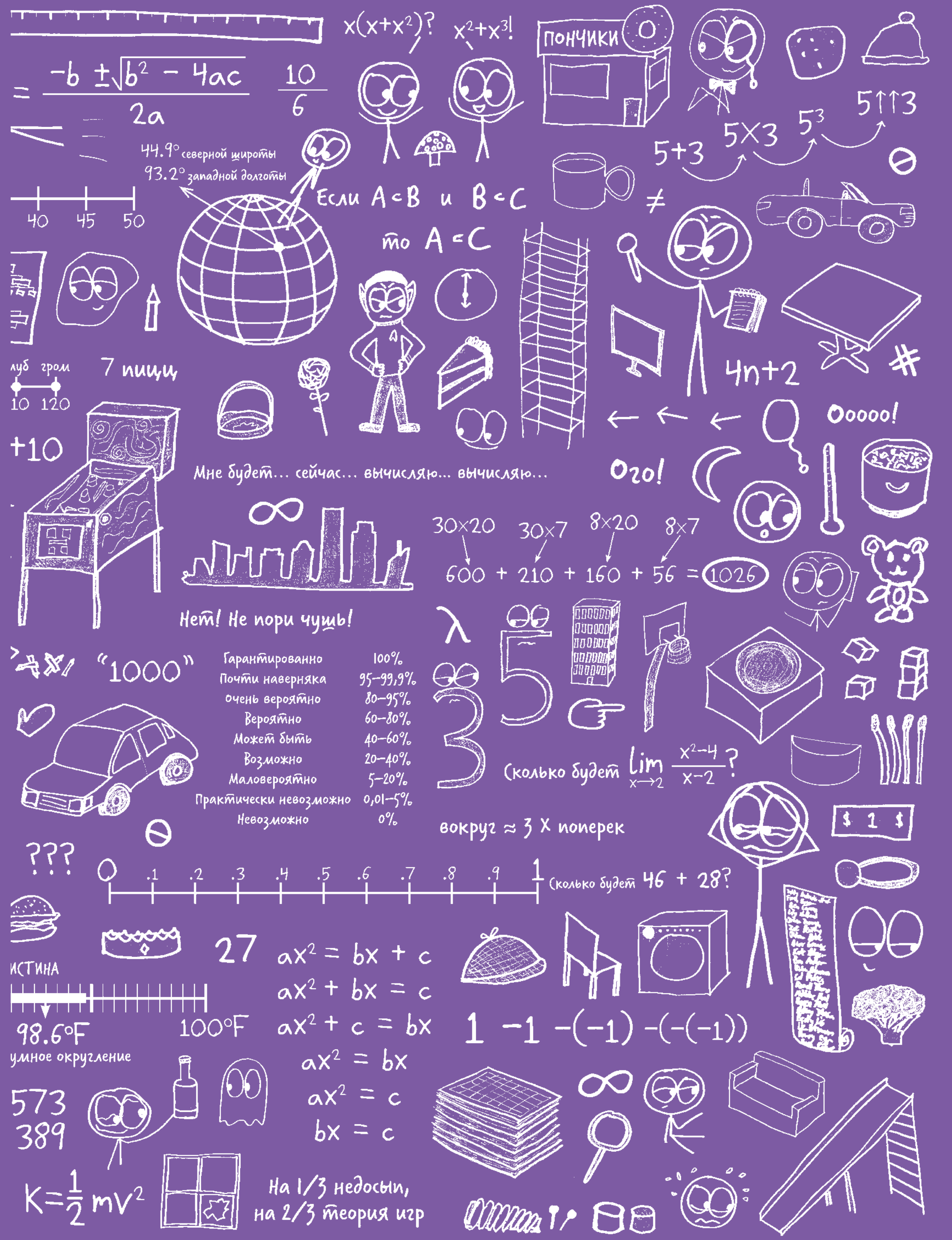
Мой ответ: конечно и то и другое сразу. Математика — это открытие внутри изобретения; это дом, построенный вокруг дерева. Дом — это язык, созданный столь искусно, что кажется творением природы. Дерево — открытие, столь волшебное по своей архитектуре, что кажется творением зодчего. Математика — это *и* атом, *и* микроскоп, слитые воедино столь нераздельно, что порой трудно сказать, где заканчивается открытие и начинается изобретение.



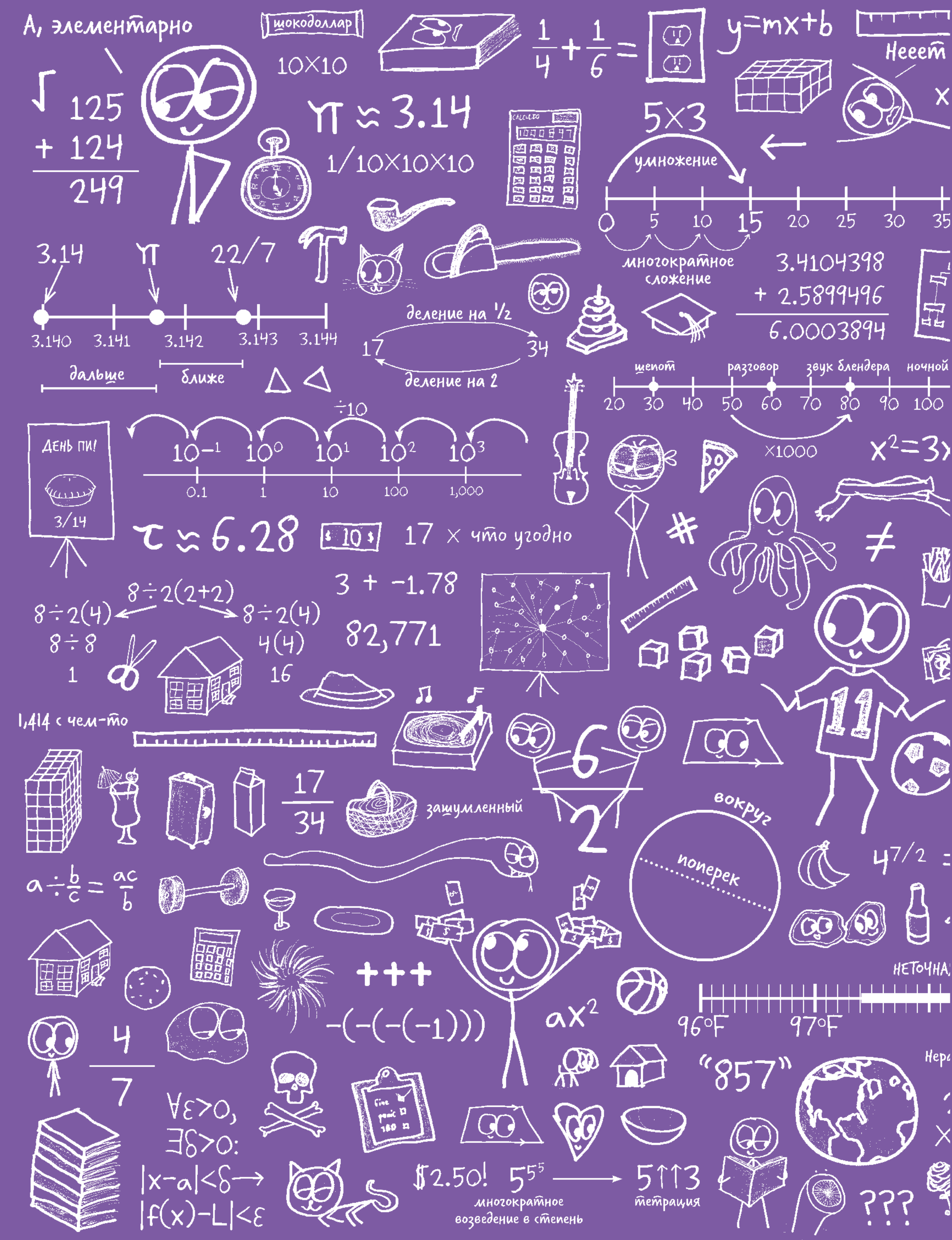
Это переплетение изобретения и открытия, языка и идеи, возможно, одна из причин, по которым математику так трудно освоить. Чтобы понять идеи, нужно вначале выучить язык, но язык имеет смысл лишь как выражение идей.

Я никогда не планировал посвятить свою жизнь апологии математики. Если что-то и направляло меня на этом пути, то я походил не столько на античного героя, которого боги ведут к роковой развязке, сколько на растерявшегося туриста, которого местные жители выталкивают с проезжей части.

И все-таки, сидя в этом доме вокруг дерева и глядя, как свет играет среди листвы, я невольно жалею, что не все могут оказаться на моем месте. Надеюсь, эта книжка поможет вам туда попасть.



$x(x+x^2)$?
x^2+x^3!
ПОНЧИКИ
$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$\frac{10}{6}$
44.9° северной широты
93.2° западной долготы
40 45 50
Если A<B и B<C
то A<C
5+3 5×3 5^3 5↑↑3
≠
луб гром
10 120
7 пицц
+10
4n+2
Ooooo!
Ого!
Мне будет… сейчас… вычисляю… вычисляю…
30×20 30×7 8×20 8×7
600 + 210 + 160 + 56 = 1026
Нет! Не пори чушь!
"1000"
Гарантированно 100%
Почти наверняка 95–99,9%
Очень вероятно 80–95%
Вероятно 60–80%
Может быть 40–60%
Возможно 20–40%
Маловероятно 5–20%
Практически невозможно 0,01–5%
Невозможно 0%
λ
5
3
Сколько будет $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$?
вокруг ≈ 3 X поперек
$ 1 $
???
0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 1
Сколько будет 46 + 28?
27
$ax^2 = bx + c$
$ax^2 + bx = c$
$ax^2 + c = bx$
$ax^2 = bx$
$ax^2 = c$
$bx = c$
ИСТИНА
98.6°F
100°F
умное округление
1 −1 −(−1) −(−(−1))
573
389
$K=\frac{1}{2}mv^2$
На 1/3 недосып,
на 2/3 теория игр


А, элементарно
шокодоллар
10×10
1/4 + 1/6 =
y=mx+b
Нееет
125
+ 124
249
π ≈ 3.14
1/10×10×10
5×3
умножение
0 5 10 15 20 25 30 35
многократное сложение
3.14 π 22/7
3.140 3.141 3.142 3.143 3.144
дальше
ближе
деление на 1/2
17 34
деление на 2
3.4104398
+ 2.5899496
6.0003894
шепот разговор звук блендера ночной
20 30 40 50 60 70 80 90 100
×1000
÷10
10⁻¹ 10⁰ 10¹ 10² 10³
0.1 1 10 100 1,000
ДЕНЬ ПИ!
3/14
x²=3x
τ ≈ 6.28
$10
17 × что угодно
3 + −1.78
82,771
8÷2(2+2)
8÷2(4)
8÷8
1
8÷2(4)
4(4)
16
1,414 с чем-то
11
6
2
17/34
зашумленный
вокруг
поперек
a÷b/c = ac/b
4^{7/2} =
+++
−(−(−(−1)))
ax²
НЕТОЧНА
96°F 97°F
4/7
∀ε>0,
∃δ>0:
|x−a|<δ→
|f(x)−L|<ε
"857"
$2.50!
5^{5^5}
5↑↑3
многократное возведение в степень
тетрация
???

СУЩЕСТВИТЕЛЬНЫЕ

Вещи под названием «числа»

Обычно существительное определяется как «слово, обозначающее лицо, место или вещь». В детстве это определение меня всегда смущало. Казалось очевидным, что люди и места — тоже вещи, так зачем эта избыточность? Почему бы не определять существительное просто как «слово, обозначающее вещь»? Оглядываясь назад, я вижу, что этот приступ детского педантизма служит примером одного из необычных принципов математического языка: все есть вещь.

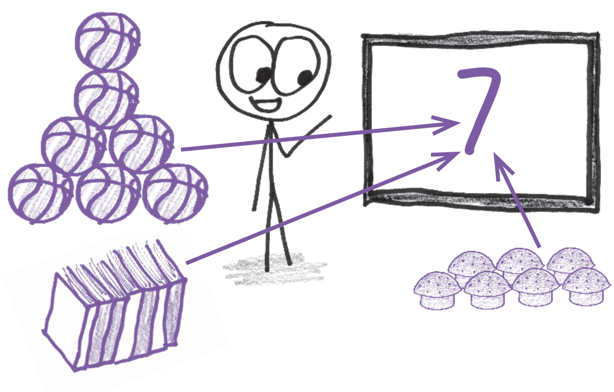
Возьмите наш случай: *числа*. Они — древнейшие, самые привычные математические вещи, только на самом деле они вовсе не вещи. Объехав весь свет, вы переплывете семь морей, попробуете семь пицц или сразитесь с семью ниндзя, но вы никогда не встретите такую *вещь*, как «семь».

Не существует никакого «семь», бывает только семь чего-то. Сказать «семь шариков» все равно что сказать «синие шарики» — это свойство, характеристика. Не существительное, а прилагательное.

По крайней мере, так скажет здравомыслящий человек. Но математики далеки от здравомыслия. Они больше похожи на взбесившихся философов или потерявших берега логиков.

Как от прилагательного «красивый» образуется существительное «красота», так и от прилагательного «семь» образуется существительное, которое тоже (чтобы окончательно нас запутать) называется «семь» и определяется как таинственное свойство семеричности — характеристика, общая для всех групп из семи предметов.

Таким образом, число — это существительное, образованное от прилагательного. Это неосязаемое свойство, столь убедительное, что мы изучаем его само по себе, как если бы оно было предметом. Как мы увидим дальше, числа не единственные существительные в математике, но они самые основные, и поэтому им будет отведен первый раздел этой книги.



Писательница Карен Олссон характеризует математику как «облачный край соблазнительных абстрактных структур, кривых, плоскостей, полей и векторных пространств, доступных только тем, кто владеет изощренным облачным языком, средством формулирования истин, которые нельзя выразить ни на каком другом наречии»[1].