Содержание

От авторов 5

Основные теоретические сведения 8

§ 1. Сравнение числовых выражений 11

1.1. Методы сравнения числовых выражений 11

1.2. Сравнение действительных чисел 15

1.3. Сравнение выражений, содержащих дроби 16

1.4. Сравнение выражений, содержащих степени 17

1.5. Сравнение выражений, содержащих корни натуральной степени 18

1.6. Сравнение выражений, содержащих логарифмы. 20

1.7. Сравнение выражений разного вида 24

§ 2. Область определения выражения (функции) 26

§ 3. Алгебраические методы решения неравенств 28

3.1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем 28

3.2. Метод замены 53

3.3. Разбиение области определения неравенства на подмножества 64

§ 4. Функционально-графические методы решения неравенств . 69

4.1. Использование области определения функции 70

4.2. Использование непрерывности функции 70

4.3. Использование ограниченности функций 79

4.4. Использование монотонности функций 85
4.5. Графический метод 115
§ 5. Геометрические методы решения неравенств 118
5.1. Расстояние между точками на координатной прямой 118
5.2. Расстояние между точками на координатной плоскости 119
5.3. Векторная интерпретация неравенства 121
§ 6. Решение неравенств разными способами 123
§ 7. Системы неравенств 128

Упражнения 156

Ответы и указания к решению 192

Список литературы и источников 200

От авторов

Задание 15 контрольно-измерительных материалов — это задание повышенного уровня сложности, представляющее собой неравенство, которое содержит рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, а также модульные выражения или систему неравенств. При решении этих неравенств школьники должны продемонстрировать знание теорем о равносильности неравенств определённого вида, умение использовать стандартные и нестандартные методы решения.

Задание 15 оценивается двумя первичными баллами. За его выполнение берутся 30–40 % участников экзамена. Разработчиками КИМ в 2019–2024 гг. были предложены задания, в которых необходимо было решить логарифмическое или показательное неравенство. Ниже в таблице представлены данные о проценте участников экзамена, получивших за выполнение этого задания один или два первичных балла.

Кол-во баллов	**Процент участников экзамена, получивших соответствующее количество баллов**					
	2019 г.	**2020 г.**	**2021 г.**	**2022 г.**	**2023 г.**	**2024 г.**
1	1,31	1,00	7,2	1,7	1,1	Средний процент выполнения 27,3
2	33,93	14,84	7,2	34,4	17,2	

При решении логарифмических неравенств обычно достаточно использовать стандартные методы. К таким методам можно отнести:

- метод равносильных переходов;
- решение неравенства на промежутках;
- метод замены;
- обобщённый метод интервалов.

Иногда для решения неравенств необходимо использовать также и нестандартные методы:

- метод рационализации;
- метод оценки, в частности использование классических неравенств.

В демонстрационных вариантах ЕГЭ последних лет[1] по математике профильного уровня представлено следующее задание.

15. Решите неравенство

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\geqslant\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right).$$

Решение. Правая часть неравенства определена при $x<-5$ и $x>-\dfrac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2+7$ принимает положительные значения, при $x<-5$ и $x>-\dfrac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1}\geqslant\frac{8x+35}{x+5};$$

$$\frac{8x^3+40x^2+7x+35}{(x+5)(x^2+x+1)}\geqslant\frac{8x^3+43x^2+43x+35}{(x+5)(x^2+x+1)};$$

$$\frac{3x^2+36x}{(x+5)(x^2+x+1)}\leqslant 0;$$

$$\frac{3x(x+12)}{(x+5)(x^2+x+1)}\leqslant 0;$$

откуда $x\leqslant -12$, $-5<x\leqslant 0$. Учитывая ограничения $x<-5$ и $x>-\dfrac{35}{8}$, получаем $x\leqslant -12$, $-\dfrac{35}{8}<x\leqslant 0$.

Ответ: $(-\infty;-12]$; $\left(-\dfrac{35}{8};0\right]$.

[1] www.fipi.ru

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Анализ школьных учебников показывает, что в большинстве из них методам решения неравенств с использованием свойств функций не уделяется должного внимания, а в заданиях ЕГЭ почти каждый год предлагаются неравенства, решение которых упрощается, если применить свойства функций. Проверка работ ЕГЭ подтверждает тот факт, что большинство учащихся решают неравенства с использованием стандартных, алгоритмических методов, а это иногда приводит к громоздким выкладкам. Умение использовать необходимые свойства функций при решении неравенств позволяет учащимся выбирать наиболее рациональный способ решения.

В данном пособии рассматриваются различные методы решения неравенств с одной переменной (алгебраические, функционально-графические, геометрические) и их систем.

В конце пособия приведено большое количество упражнений, к которым даны ответы и указания к решению.

Желаем успеха!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты издательства legionrus@legionrus.com.

Основные теоретические сведения

Основные понятия

Прежде чем перейти к рассмотрению неравенств, остановимся на некоторых важных вопросах, имеющих непосредственное отношение к их решению.

Область определения выражения

Основные ограничения на переменную, входящую в выражение, связаны с действием деления (деление на нуль не определено), действием извлечения корня чётной степени (корень чётной степени определён для неотрицательных чисел), действием нахождения логарифма (логарифм с положительным основанием, отличным от единицы, определён для положительных чисел).

Из определения корня натуральной степени следует, что выражения вида $\sqrt[6]{-4}$, $\sqrt[-2]{5}$, $\sqrt[0]{8}$ не определены.

Из определения логарифма следует, что выражения вида $\log_3(-4)$, $\log_7 0$, $\log_{-6} 5$, $\log_0 9$, $\log_1 15$ не определены.

Отметим, что решение неравенств с переменной обычно включает в себя нахождение области определения данного неравенства, или области допустимых значений неизвестной неравенства.

Следствие и равносильность

Если множество решений неравенства A принадлежит множеству решений неравенства (системы, совокупности) B, то неравенство (система, совокупность) B называется *следствием* неравенства A, и это обозначают $A \Rightarrow B$.

Если множества решений неравенства A и неравенства (системы, совокупности) B совпадают, то эти неравенства (неравенство и система, неравенство и совокупность) называются *равносильными*, и это обозначают $A \Leftrightarrow B$.

Как правило, преобразования используют для того, чтобы в неравенстве освободиться от знаменателей, от знаков корней, от знаков модуля, от степеней, от знаков логарифма и привести данное неравенство к более простым неравенствам. При этом выполняют преобразования над обеими частями неравенства, используя свойство монотонности соответствующей функции, или преобразования отдельных выражений, входящих в неравенство, применяя формулы. Применение формулы для замены одного выражения другим может оказаться неравносильным для неравенства.

Приведём примеры равносильных переходов.

1) $\log_3 x > 1 \;\Leftrightarrow\; \log_3 x > \log_3 3 \;\Leftrightarrow\; x > 3.$

2) $(x-1)\log_3 x \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ \log_3 x \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ \log_3 x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

3) $\lg(x-2)+\lg(27-x) \leqslant 2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-2>0, \\ 27-x>0, \\ \lg\Big((x-2)(27-x)\Big) \leqslant 2. \end{cases}$

4) $\sqrt{x+2} \leqslant x \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x+2 \geqslant 0, \\ x+2 \leqslant x^2. \end{cases}$

5) $\dfrac{x^2-7}{x-4} \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (x-4)(x^2-7) \leqslant 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Системы неравенств и совокупности неравенств

Решение неравенства с использованием равносильных преобразований часто приводит к решению системы или совокупности неравенств.

При решении системы неравенств с одной переменной обычно решают каждое неравенство, затем находят пересечение полученных множеств решений.

При решении совокупности неравенств с одной переменной обычно решают каждое неравенство, затем находят объединение полученных множеств решений.

Две системы (совокупности) неравенств называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Приведём примеры решения системы неравенств и совокупности неравенств.

1) $\begin{cases} 6x+2 \leqslant 4x+24, \\ 2x-1 \geqslant x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leqslant 22, \\ x \geqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 11, \\ x \geqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \leqslant x \leqslant 11.$

2) $\left[\begin{array}{l} x^2-4>0, \\ x-6<0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)(x+2)>0, \\ x<6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>2, \end{array} \right. \\ x<6. \end{array} \right.$

Отсюда x — любое действительное число.

Методы решения неравенств

В зависимости от трактовки или интерпретации неравенства различают алгебраический, функциональный или геометрический подходы в решении неравенств.

Первые два подхода различаются в понятии неравенства, которое рассматривается либо как сравнение двух выражений, либо как сравнение двух функций.

При алгебраическом подходе выполняют равносильные общие (над обеими частями неравенства) или частичные преобразования неравенств (отдельных выражений, входящих в неравенство).

При функциональном подходе используют свойства функций (монотонность, ограниченность и т. д.), входящих в данное неравенство.

В некоторых случаях алгебраический и функциональный подходы взаимно заменяемы. Это можно проследить, начиная с определения неравенства. Поэтому далее в преобразованиях неравенства мы используем утверждения, придерживаясь алгебраической или функциональной линии. Например, утверждение «Если обе части неравенства $g(x) > h(x)$ возвести в одну и ту же нечётную степень, то получим неравенство $g^{2n+1}(x) > h^{2n+1}(x)$, равносильное данному» можно заменить другим утверждением «По свойству строго возрастающей функции $y = t^{2n+1}$ $(n \in N)$ на R неравенства $g(x) > h(x)$ и $g^{2n+1}(x) > h^{2n+1}(x)$ равносильны».

Основой геометрического подхода является интерпретация неравенств и их решений на координатной прямой или координатной плоскости, что позволяет перейти к равносильным неравенствам, опираясь на геометрические утверждения.

§ 1. Сравнение числовых выражений

Иногда при решении неравенств одним из трудоёмких этапов является сравнение значений чисел для правильного расположения их относительно друг друга на числовой прямой. Необходимость в этом возникает в случае объединения или пересечения промежутков, числовые значения концов которых выражаются через радикалы, логарифмы и т. д. Приходится сталкиваться с необходимостью сравнения чисел без помощи микрокалькулятора. Рассмотрим некоторые подходы к решению задач такого типа.

1.1. Методы сравнения числовых выражений

При сравнении числовых выражений A и B используют следующие общие методы.

Метод сравнения с нулём разности выражений

В этом случае сравнивают разность выражений с нулём.
Если $A - B > 0$, то $A > B$;
если $A - B = 0$, то $A = B$;
если $A - B < 0$, то $A < B$.

Пример 1 Сравнить числа $\frac{1}{\sqrt{6}} - 1$ и $-\frac{4}{5}$.

Решение. Найдём разность

$$\frac{1}{\sqrt{6}} - 1 - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{5} = \frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}.$$

Так как $5 - \sqrt{6} = \sqrt{25} - \sqrt{6} > 0$ и $5\sqrt{6} > 0$, то $\dfrac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} > 0$ и $\dfrac{1}{\sqrt{6}} - 1 > -\dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{6}} - 1 > -\dfrac{4}{5}$.

Метод сравнения с единицей отношения выражений

Если выражения A и B положительны, то для определения большего из них можно сравнить их отношение с единицей.

Если $\dfrac{A}{B} > 1$, то $A > B$;

если $\dfrac{A}{B} = 1$, то $A = B$;

если $\dfrac{A}{B} < 1$, то $A < B$.

Пример 2 Сравнить числа $\dfrac{2^{2012}+1}{2^{2013}+1}$ и $\dfrac{2^{2013}+1}{2^{2014}+1}$.

Решение. Пусть A — первое выражение, а B — второе. Поскольку они оба положительны, то рассмотрим их частное:

$$\frac{A}{B} = \frac{2^{2012}+1}{2^{2013}+1} : \frac{2^{2013}+1}{2^{2014}+1} = \frac{2^{4026}+5\cdot 2^{2012}+1}{2^{4026}+4\cdot 2^{2012}+1}.$$

Так как числитель получившейся дроби больше знаменателя, то $\dfrac{A}{B} > 1$. Отсюда следует, что $A > B$.

Ответ: $\dfrac{2^{2012}+1}{2^{2013}+1} > \dfrac{2^{2013}+1}{2^{2014}+1}$.

Метод разделения выражений

Если удаётся показать, что одно из сравниваемых выражений A больше некоторого числа (или выражения) C, а второе B, наоборот, меньше C, то первое выражение будет больше второго, т. е. из неравенств $A > C > B$ следует неравенство $A > B$.

Пример 3 Сравнить числа $\log_2 5$ и $\log_3 6$.

Решение. Заметим, что $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$, а $\log_3 6 < \log_3 9 = 2$. Следовательно, имеем

$$\log_2 5 > 2 > \log_3 6 \;\Leftrightarrow\; \log_2 5 > \log_3 6.$$

Ответ: $\log_2 5 > \log_3 6$.

Метод использования параметра

Пример 4 Сравнить числа $\sqrt[3]{60}$ и $2+\sqrt[3]{7}$.

Решение. Представим первое число следующим образом: $\sqrt[3]{60}=\sqrt[3]{4(8+7)}$. Пусть $a=2$ и $b=\sqrt[3]{7}$. Сравним выражения:

$$\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \ \vee \ a+b \ \Leftrightarrow \ 4(a^3+b^3) \ \vee \ (a+b)^3 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ 3(a^3+b^3) \ \vee \ 3ab(a+b) \ \Leftrightarrow \ a^2-ab+b^2 \ \vee \ ab \ \Leftrightarrow \ (a-b)^2 \ \vee \ 0.$$

Так как $a\neq b$, то $(a-b)^2>0$ и тогда $\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$.

Ответ: $\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$.

Метод использования свойств функций

В этом случае для сравнения выражений используют монотонность или выпуклость функций на промежутках.

Пример 5 Сравнить числа e^π и π^e.

Решение. Заметим, что

$$e^\pi \ \vee \ \pi^e \ \Leftrightarrow \ \ln e^\pi \ \vee \ \ln \pi^e \ \Leftrightarrow \ \pi \ln e \ \vee \ e\ln\pi \ \Leftrightarrow \ \frac{\ln e}{e} \ \vee \ \frac{\ln\pi}{\pi}.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ и сравним числа $f(e)$ и $f(\pi)$. Функция $f(x)$ определена при $x>0$. Её производная равна $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Так как $f'(x)=0$ при $x=e$, $f'(x)>0$ при $0<x<e$ и $f'(x)<0$ при $x>e$, то функция при $x=e$ принимает наибольшее значение на всей области определения. Значит, $f(e)>f(\pi)$, откуда следует, что $e^\pi>\pi^e$.

Ответ: $e^\pi>\pi^e$.

Графический метод

Графический метод удобно использовать при сравнении двух выражений, которые частично одинаковы (равные показатели степеней, равные основания степеней, равные показатели корней, равные подкоренные числа, равные основания логарифмов, равные подлогарифмические числа и т. д.).

Пример 6 Сравнить числа $\log_3 6$ и $\log_4 6$.

Решение. Построим схематично графики функций $y = \log_3 x$ и $y = \log_4 x$ (см. рис. 1).

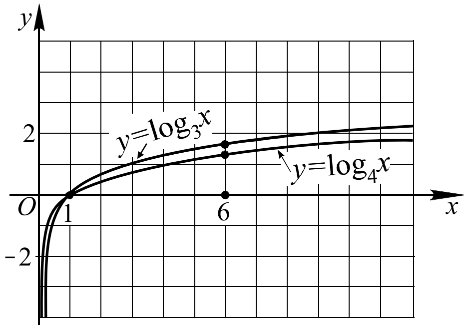

Рис. 1

Сравнивая значения функций при $x = 6$, получаем $\log_3 6 > \log_4 6$.

Ответ: $\log_3 6 > \log_4 6$.

Метод использования классических неравенств

Обычно достаточно знания следующих классических неравенств:

неравенство Коши:

при любом $n \in N$ для неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n};$$

неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел a_1 и a_2 (случай $n = 2$ в неравенстве Коши):

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2};$$

неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел:

$$\left|a + \frac{1}{a}\right| \geqslant 2;$$

неравенство Бернулли:

для любого $n \in N$ при $x \geqslant -1$ $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru