Посвящается Бену и Норе,
вашим граням, всем вашим ребрышкам.
Люблю вас от вершины до кончиков пальцев

Содержание

От издательства 8
Предисловие 9
Введение 13

Глава 1 Леонард Эйлер и три его «великих» знакомца 22

Глава 2 Что такое многогранник? 38

Глава 3 Пять идеальных тел 42

Глава 4 Пифагорейское братство и атомистическая теория Платона 47

Глава 5 Евклид и его «Начала» 55

Глава 6 Кеплер и его многогранная Вселенная 61

Глава 7 Жемчужина Эйлера 72

Глава 8 Платоновы тела, мячи для гольфа, фуллерены и геодезические купола 83

Глава 9 Был ли Декарт первым? 89

Глава 10 Лежандр расставляет все по местам 95

Глава 11 Прогулка по Кёнигсбергу 107

Глава 12 Плоскостные многогранники Коши 118

Глава 13 Планарные графы, математические планшеты и брюссельская капуста 125

Глава 14 Этот красочный мир 137

Глава 15 Новые проблемы и новые доказательства 152

Глава 16 Резиновые листы, полые бублики и безумные бутылки 163

Глава 17 Разные или одинаковые? 180

Глава 18 Узловатая проблема 193

Глава 19 Как причесать ежа 209

Глава 20 Когда топология управляет геометрией 225

Глава 21 Топология искривленных поверхностей 237

Глава 22 Путешествие в *n* измерениях 246

Глава 23 Анри Пуанкаре и взлет топологии 258

Эпилог. Вопрос на миллион долларов 270
Благодарности 276
Приложение А. Создаем многогранники и поверхности своими руками 277
Приложение В. Рекомендуемое чтение 287
Примечания 290
Список литературы 297
Предметный указатель 313

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательства «ДМК Пресс» и Princeton очень серьезно относятся к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Математика – это автомат по переработке кофе в теоремы.
– *Альфред Реньи, часто приписывается Паулю Эрдёшу*[1]

Весной моего последнего года учебы в колледже я сказал приятелю, что осенью собираюсь получать степень доктора философии по математике. Он спросил: «А что ты собираешься делать в аспирантуре: изучать очень большие числа или вычислять новые знаки числа пи?»

Я на опыте знаю, что публика в большинстве своем очень слабо представляет, что такое математика, и уж, конечно, совершенно не понимает, чем занимаются математики. Люди с удивлением узнают, что в математике по-прежнему создается что-то новое. Они думают, что математика сводится к изучению чисел или что это серия курсов, которая обрывается на математическом анализе.

Но лично меня числа никогда особенно не интересовали. Устный счет – не моя стихия. Я могу посчитать, какую часть счета за обед должен оплатить, и вычислить размер чаевых, не прибегая к помощи калькулятора, но это займет у меня столько же времени, сколько у любого другого человека. А матанализ был самым нелюбимым мной предметом в колледже.

Мне нравится находить закономерности – особенно в визуальных образах – и разбираться в запутанных логических рассуждениях. Книжные полки в моем кабинете забиты сборниками задач и головоломок, на полях которых сохранились мои детские пометки. Передвинуть три спички, чтобы образовалась новая фигура, найти в лабиринте путь, удовлетворяющий определенным условиям, разрезать заданную фигуру на части, из которых можно сложить квадрат, добавить в чертеж три отрезка, чтобы получилось девять треугольников, и другие задачки такого рода. Вот чем для меня является математика.

Из-за любви к пространственным, визуальным и логическим задачам я всегда испытывал влечение к геометрии. Но, учась в колледже, я открыл для себя очарование топологии, которую обычно определяют как изучение нежестких фигур. Сочетание красивой абстрактной теории с конкретными пространственными манипуляциями точно отвечало моим математическим вкусам. Гибкое и свободное топологическое представление о мире

вселяло в меня ощущение комфорта существования. По сравнению с ним геометрия казалась такой пуританской и консервативной. Если геометрия облачена в строгий пиджак, то топология носит джинсы и футболку.

Эта книга посвящена истории и прославлению топологии. Рассказ начинается с предыстории – геометрии античной Греции и Возрождения и изучения многогранников. Затем мы перейдем к XVIII и XIX столетиям, когда ученые пытались ухватить идею формы и классифицировать объекты, не ограничиваясь жесткими рамками геометрии. И кульминационной точкой станет современная топология, получившая развитие в начале XX века.

В школе и в вузе мы изучали математику по учебникам. В учебниках математика излагается строгим, логически последовательным образом: определение, теорема, доказательство, пример. Но открывали математику не так. Много лет уходило на то, чтобы понять предмет настолько хорошо, чтобы связно изложить его в учебнике. Математика развивается то медленно и постепенно, то гигантскими скачками, бывают шаги в ложном направлении, за которыми следуют исправления и установление связей. В этой книге мы увидим увлекательный процесс математического открытия в действии – как блестящие умы размышляют, задают вопросы, уточняют, развивают и изменяют работы своих предшественников.

Я не стал просто излагать историю топологии, а взял формулу Эйлера для многогранников в качестве путеводителя. Открытая в 1750-м, формула Эйлера знаменует начало перехода от геометрии к топологии. Мы проследим, как эта формула из любопытного курьеза превратилась в глубокую и полезную теорему.

Формула Эйлера – идеальный путеводитель, потому что заводит в изумительные помещения, куда редко заглядывают посетители. Идя по ее следам, мы познакомимся с самыми интригующими областями математики – геометрией, комбинаторикой, теорией графов, теорией узлов, дифференциальной геометрией, динамическими системами и топологией. С этими красивейшими предметами типичный студент, даже специализирующийся в математике, может никогда не встретиться.

Кроме того, по пути я буду иметь удовольствие представить читателю некоторых величайших математиков всех времен: Пифагора, Евклида, Кеплера, Декарта, Эйлера, Коши, Гаусса, Римана, Пуанкаре и многих других – все они внесли важный вклад в эту область и в математику в целом.

Никаких формальных предварительных знаний для чтения этой книги не требуется. Математики, изучаемой в средней школе, – алгебры, тригонометрии, геометрии – достаточно, но большая ее часть к обсуждаемой теме не имеет отношения. Книга вполне самостоятельна, а в тех редких случаях, когда это необходимо, я буду напоминать читателю факты из этих математических дисциплин.

Но не впадайте в заблуждение – некоторые излагаемые идеи весьма сложны и абстрактны, представить их наглядно нелегко. Читатель должен

быть готов воспринимать логические рассуждения и мыслить абстрактно. Чтение математического текста – совсем не то же самое, что романа. Иногда нужно остановиться и обдумать каждое предложение, еще раз прочитать рассуждение, попытаться придумать другие примеры, внимательно рассмотреть рисунки в тексте, представить картину в целом и заглянуть в предметный указатель, чтобы вспомнить точный смысл термина.

Конечно, не будет никаких домашних заданий и выпускного экзамена в конце книги. Вовсе не стыдно пропустить трудные места. Если в каком-то особенно каверзном рассуждении никак не удается разобраться, переходите к следующей теме. Это не помешает восприятию других частей книги. Можете загнуть уголок страницы и вернуться к ней позже.

Я полагаю, что аудитория этой книги отбирается сама собой. Всякий, кто *хочет* ее прочесть, *сможет* это сделать. Эта книга не для всех, но те, кто не в состоянии понять и оценить математику, наверное, не стали бы ей даже интересоваться.

У меня есть одно весьма ценное преимущество – я никогда не писал учебников. Я изо всех сил старался быть честным и строгим в описании математики, но мог позволить себе роскошь опускать докучные детали, которые больше запутывают, чем проясняют. Поэтому я мог вести изложение на более высоком уровне, сосредоточившись на идеях, интуитивном понимании и общей картине. По необходимости я вынужден был ограничиться в этой книге лишь поверхностным обсуждением многих чарующих идей. Если вы захотите узнать больше о рассматриваемых темах или восполнить недостающие детали, то обратитесь к рекомендованной в приложении В литературе.

Хотя эта книга доступна широкой аудитории, я писал ее также для математиков. Местами она пересекается с другими книгами, но я не знаю ни одной, в которой бы содержалась вся изложенная здесь информация. В конце книги приведена обширная библиография, в т. ч. ссылки на многие оригинальные статьи. Это поможет ученым, желающим глубже покопаться в предмете.

Эта книга организована следующим образом. В главах 2, 3, 4, 5 и 6 описывается теория многогранников, существовавшая до Эйлера. В основном речь в них идет о самом знаменитом классе – правильных многогранниках. В главах 7, 9, 10, 12 и 15 представлена формула Эйлера для многогранников и ее обобщения на другие жесткие многогранные тела. Это обсуждение событий, имевших место до середины XIX века. Главы 16, 17, 22 и 23 посвящены топологической интерпретации формулы Эйлера, развитой в конце столетия. Сюда входят обобщения на поверхности и многомерные топологические объекты.

В книге также упоминаются многочисленные приложения формулы Эйлера. В главе 8 описаны ее элементарные применения, в главах 11, 13 и 14 – применения в теории графов. В главах 18, 19, 20 и 21 речь пойдет

о поверхностях, их связях с формулой Эйлера, а также о ее применениях к теории узлов, динамическим системам и геометрии.

Надеюсь, что вы испытаете такое же удовольствие от чтения этой книги, какое испытывал я, когда писал ее. Для меня весь этот проект стал гигантской головоломкой – академической «охотой за предметами». Поиск нужных кусочков и соединение их в связную историю было для меня вызовом и источником восторгов. Я люблю свою работу.

Дэйв Ричесон,
колледж Дикинсон,
6 июля 2007

Введение

Философия записана в этой огромной книге, которая постоянно открыта перед нашими глазами (я говорю о Вселенной), но чтобы её понять, надо научиться понимать язык и условные знаки, которыми она написана. Она написана на языке математики, а её буквы – треугольники, круги и другие геометрические фигуры; без них невозможно понять ни слова, без них – тщетное блуждание по темному лабиринту.

– *Галилео Галилей*[1]

Все они прошли мимо нее. Древние греки – такие светила математики, как Пифагор, Теэтет, Платон, Евклид и Архимед, одержимые многогранниками, – прошли мимо. Иоганн Кеплер, великий астроном, так восторгавшийся красотой многогранников, что положил их в основу ранней модели Солнечной системы, прошел мимо. В своем исследовании многогранников математик и философ Рене Декарт находился всего в нескольких логических шагах от ее открытия, но тоже прошел мимо. Все эти и многие другие математики не заметили связи такой простой, что ее можно объяснить любому школьнику, и вместе с тем настолько фундаментальной, что она вошла в плоть и кровь современной математики.

А великий швейцарский математик Леонард Эйлер (1707–1783) мимо не прошел. 14 ноября 1750 г. в письме к своему другу Христиану Гольдбаху (1690–1764), занимавшемуся теорией чисел, Эйлер писал: «Меня поражает, что такое общее свойство стереометрии (геометрии пространственных тел) до сих пор, насколько мне известно, никем не было замечено»[2]. В этом письме Эйлер описал свое наблюдение, а годом позже представил доказательство. Наблюдение настолько фундаментальное и важное, что теперь оно называется *формулой Эйлера для многогранников*.

Многогранником называется трехмерный объект наподобие изображенных на рис. I.1. Он состоит из многоугольных *граней*. Каждая пара соседних граней имеет общий прямолинейный отрезок, называемый ребром, а соседние ребра пересекаются в угловой точке, называемой *вершиной*. Эйлер заметил, что количества вершин, ребер и граней (V, E, F) всегда связаны простым и элегантным арифметическим соотношением:

$$V - E + F = 2.$$

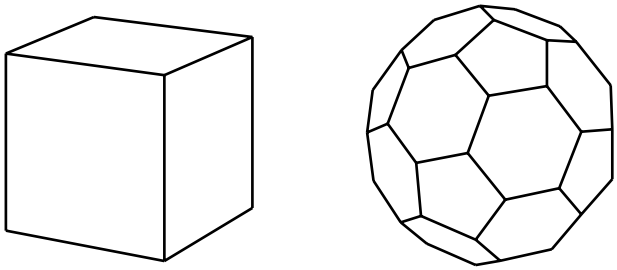

Рис. I.1. Куб и футбольный мяч (усеченный икосаэдр) удовлетворяют формуле Эйлера

Самым известным многогранником, наверное, является куб. Нетрудно посчитать, что у него шесть граней: по одному квадрату сверху и снизу и четыре по бокам. Границы этих квадратов – ребра куба. Всего их насчитывается двенадцать: по четыре сверху и снизу и четыре вертикальных по бокам. Четыре верхних и четыре нижних угла дают нам восемь вершин. Таким образом, для куба имеем $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$ и, конечно же,

$$8 - 12 + 6 = 2,$$

как и должно быть. Для многогранника на рис. I.1, напоминающего футбольный мяч, подсчет сложнее, но можно убедиться, что он имеет 32 грани (12 пятиугольных и 20 шестиугольных), 90 ребер и 60 вершин. И снова

$$60 - 90 + 32 = 2.$$

Но открытие Эйлера – только начало истории. Помимо работы по многогранникам, Эйлер создал новую дисциплину *analysis situs*, которая сегодня известна под названием топологии. Геометрия изучает жесткие объекты. Геометров интересует измерение таких величин, как площади, углы, объемы и длины. Топология, получившая популярное прозвище «резиновая геометрия», изучает эластичные фигуры. Объект внимания тополога не обязан быть жесткой геометрической фигурой. Топологов интересует связность, наличие дырок и скрученность. Когда клоун скручивает из надувного шара собаку, его топология не меняется, но геометрические тела совершенно различны. Но когда ребенок протыкает воздушный шарик карандашом, он оставляет в нем зияющую дыру, в результате чего топология изменяется. На рис. I.2 мы видим три примера топологических поверхностей: сфера, тор в виде бублика и перекрученная лента Мёбиуса.

Исследователи, занимавшиеся новой наукой, топологией, были очарованы формулой Эйлера и попытались применить ее к топологическим поверхностям. Возник очевидный вопрос: где расположены вершины, ребра и грани на топологической поверхности? Топологи отбросили жесткие ограничения, налагаемые геометрами, и допустили искривленные грани и ребра. На рис. I.3 мы видим разбиение сферы на «прямоугольные» и «тре-

угольные» области. Это разбиение образовано в результате проведения 12 меридианов, сходящихся в полюсах, и 7 параллелей. На этом изображении глобуса имеется 72 криволинейные прямоугольные грани и 24 криволинейные треугольные грани (последние расположены вблизи полюсов) – всего 96 граней. Имеется также 180 ребер и 86 вершин. Стало быть, как и в случае многогранников,

$$V - E + F = 86 - 180 + 96 = 2.$$

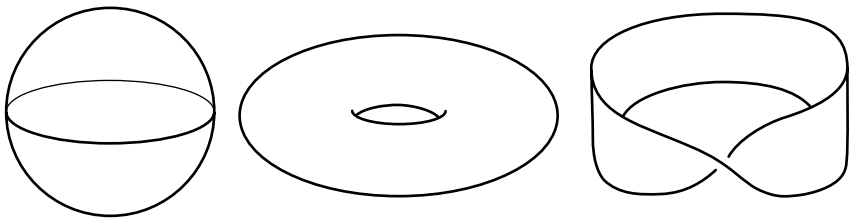

Рис. I.2. Топологические поверхности: сфера, тор и лента Мёбиуса

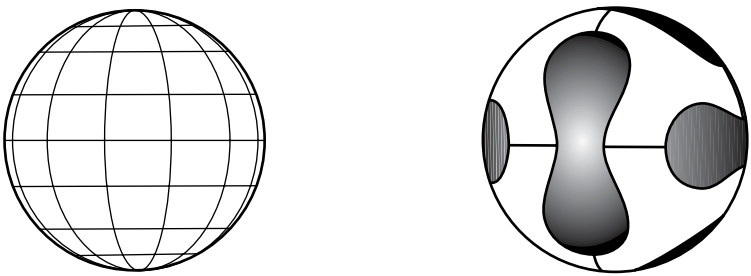

Рис. I.3. Два разбиения сферы

Мяч, которым играли на Всемирном чемпионате по футболу в 2006 году, состоял из шести четырехсторонних кусков в форме песочных часов и восьми бесформенных шестиугольных кусков (рис. I.3). Он также удовлетворяет формуле Эйлера ($V = 24$, $E = 36$, $F = 14$).

Возникает искушение сделать вывод, что формула Эйлера справедлива для любой топологической поверхности. Однако если разбить тор на прямоугольные грани, как на рис. I.4, то получится неожиданный результат. Разбиение образовано проведением двух окружностей вокруг центрального отверстия тора и четырех окружностей на самой кольцевой трубке. Оно состоит из 8 четырехсторонних граней, 16 ребер и 8 вершин. При этом

$$V - E + F = 8 - 16 + 8 = 0,$$

а не 2, как предсказывает формула Эйлера.

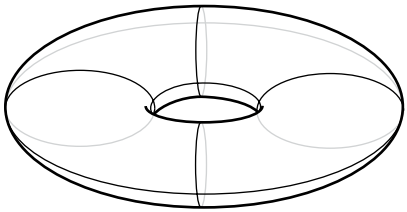

Рис. I.4. Разбиение тора

И если бы мы построили другое разбиение тора, то обнаружили бы, что эта знакопеременная сумма по-прежнему равна нулю. Поэтому для тора мы получаем *новую* формулу Эйлера:

$$V - E + F = 0.$$

Можно доказать, что у любой топологической поверхности есть «своя» формула Эйлера. Не важно, на сколько граней разбить поверхность сферы – на 6 или на 1600, все равно формула Эйлера всегда будет давать 2. И точно так же, если применить формулу Эйлера к любому разбиению тора, получится 0. Это число может служить характеристикой поверхности, подобно тому, как количество колес характеризует транспортные средства. У любой легковой машины четыре колеса, у тягача с прицепом восемнадцать, а у мотоцикла два колеса. Если у транспортного средства не четыре колеса, то это не легковая машина, а если у него не два колеса, то это не мотоцикл. Аналогично, если $V - E + F$ не равно 0, то поверхность топологически не эквивалентна тору.

Величина $V - E + F$ внутренне связана с формой поверхности. Топологи говорят, что она является *инвариантом* поверхности. Из-за этого свойства инвариантности величина $V - E + F$ называется *эйлеровой характеристикой* поверхности. Эйлерова характеристика сферы равна 2, а тора – 0.

В данный момент тот факт, что у каждой поверхности своя эйлерова характеристика, может показаться не более чем математическим курьезом, над которым забавно поразмышлять, держа в руках футбольный мяч или глядя на геодезический купол – мол, «круто же». Но, конечно же, это далеко не так. Как мы увидим, эйлерова характеристика – незаменимый инструмент при изучении многогранников, не говоря уже о топологии, геометрии, теории графов и динамических системах, и у нее есть весьма элегантные и неожиданные применения.

Математический узел, показанный на рис. I.5, похож на спутанную веревочную петлю. Два узла считаются эквивалентными, если один можно деформировать в другой, не разрезая и не склеивая заново веревку. При некоторой изобретательности мы можем использовать эйлерову характеристику также для различения узлов и доказать, что два узла на рис. I.5 не эквивалентны.

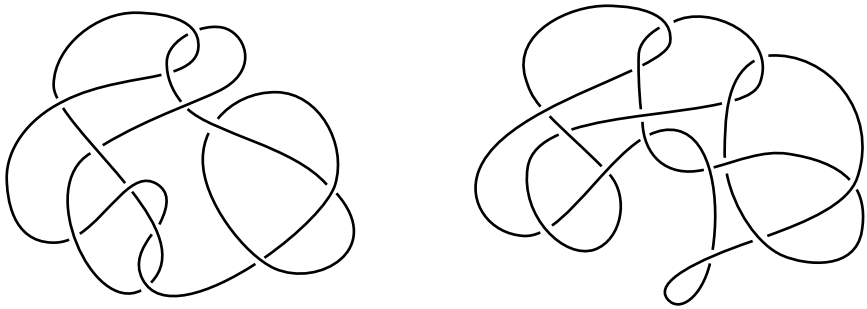

Рис. I.5. Это один и тот же узел?

На рис. I.6 показана карта направления ветров на поверхности Земли. Рядом с побережьем Чили мы видим точку, где ветра нет. Она расположена в центре тайфуна, вращающегося по часовой стрелке. Можно доказать, что на поверхности Земли всегда существует по крайней мере одна точка, в которой нет ветра. И это вытекает не из знания метеорологии, а из чисто топологических соображений. Существование такой точки затишья следует из факта, который математики называют теоремой о причесывании ежа[i]. Неформально говоря, невозможно причесать свернувшегося клубком ежа, так чтобы у него не торчала ни одна иголка. В главе 19 мы увидим, как эйлерова характеристика позволяет доказать это смелое утверждение.

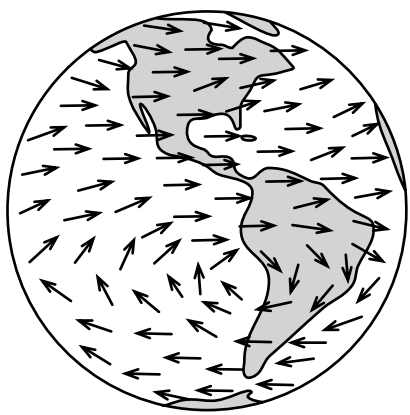

Рис. I.6. Всегда ли на поверхности Земли существует точка, в которой не дует ветер?

[i] В англоязычной литературе ее называют теоремой о волосатом шаре: если представлять себе стрелки, показывающие направление ветра, как волосы на поверхности Земли, то обязательно найдется точка, в которой волосы образуют хохолок. – *Прим. перев.*

На рис. I.7 изображен многоугольник, все вершины которого находятся в узлах равномерной сетки, отстоящих друг от друга на единичное расстояние. Удивительно, но мы можем точно вычислить площадь этого многоугольника, просто подсчитав количество точек. В главе 13 мы увидим, что формула Эйлера позволяет вывести элегантную формулу, выражающую площадь многоугольника через количество точек на его границе (B) и количество точек внутри (I):

$$\text{Площадь} = I + B/2 - 1.$$

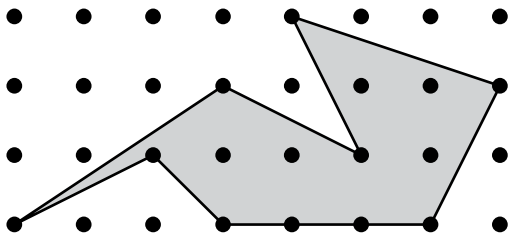

Рис. I.7. Можно ли определить площадь закрашенного многоугольника путем подсчета точек?

Согласно этой формуле, площадь показанного многоугольника равна $5 + 10/2 - 1 = 9$.

Существует старая и интересная задача о том, сколько цветов необходимо для раскрашивания карты таким образом, что любые два области, имеющие общую границу, раскрашены в разные цвета. Возьмите чистую карту США и попробуйте раскрасить ее, используя как можно меньше цветных карандашей. Очень скоро вы обнаружите, что для большей части карты достаточно всего трех карандашей, но, чтобы завершить краску, понадобится четвертый цвет. Например, штат Невада окружен нечетным числом штатов, поэтому для их раскраски нужно три карандаша, но тогда для самой Невады потребуется четвертый карандаш (рис. I.8). При умном подходе можно обойтись без пятого карандаша – четырех цветов достаточно для раскраски всей карты США. Уже давно предполагалось, что любую карту можно раскрасить в четыре цвета или меньше. Эта знаменитая гипотеза, которая никак не поддавалась усилиям математиков, получила название проблемы четырех красок. В главе 14 мы подробно расскажем эту увлекательную историю; в 1976 году она закончилась вызвавшим много споров доказательством, в котором эйлерова характеристика сыграла ключевую роль.

Графит и алмаз – два материала, состоящие только из атомов углерода. В 1985 года трое ученых – Роберт Кёрл, Ричард Смолли и Харольд Крото – шокировали научное сообщество, открыв новый класс молекул, состоящих только из углерода. Они назвали их *фуллеренами* в честь архитектора Бак-

минстера Фуллера, изобретателя геодезического купола (рис. I.9). Такое название было выбрано, потому что фуллерены представляют собой большие молекулы в форме многогранников, напоминающих эту конструкцию. За открытие фуллеренов все трое были удостоены Нобелевской премии по химии за 1996 год. В фуллерене каждый атом углерода связан ровно с тремя соседями, так что образуются пятиугольные и шестиугольные кольца атомов. Первоначально Кёрл, Смолли и Крото обнаружили фуллерены, составленные из 60 и 70 атомов углерода, но затем были открыты и другие. Самую красивую молекулу фуллерена, C_{60}, имеющую форму футбольного мяча, она назвали бакминстерфуллереном. Поразительно, что, ничего не зная о химии, а располагая только формулой Эйлера, мы можем утверждать, что некоторые конфигурации атомов углерода не могут встречаться в фуллеренах. Например, фуллерен любого размера должен иметь ровно 12 пятиугольных углеродных колец, хотя количество шестиугольных колец может разниться.

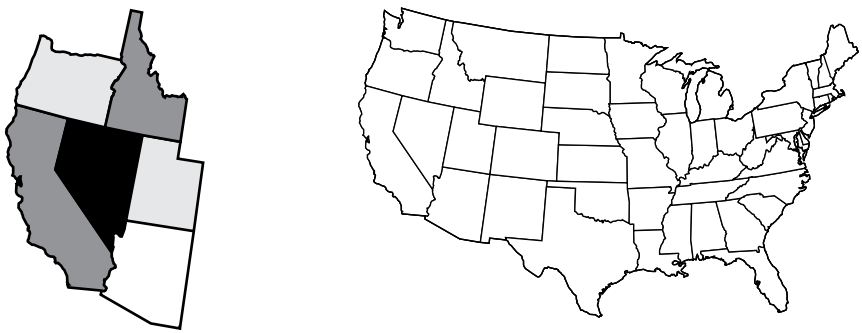

Рис. I.8. Можно ли раскрасить карту США в четыре цвета?

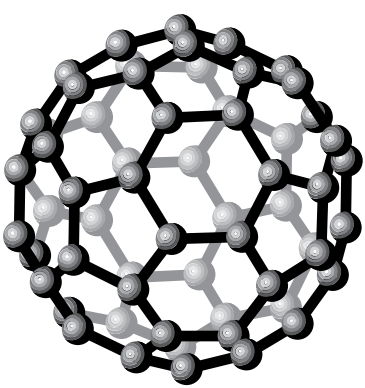

Рис. I.9. Молекула бакминстерфуллерена C_{60}

Тысячи лет люди рисуют красивые и манящие правильные многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники (рис. I.10). Греки знали пять таких тел, Платон включил их в свою атомистическую теорию, а Кеплер положил их в основу ранней модели Солнечной системы. Тайна, окружавшая эти пять многогранников, отчасти связана с тем, что их так мало, – больше ни один многогранник не удовлетворяет строгим критериям правильности. Одно из самых элегантных применений формулы Эйлера – очень короткое доказательство этого факта.

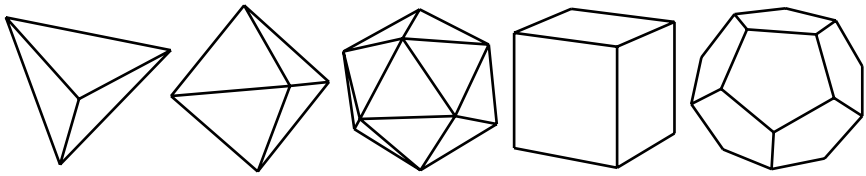

Рис. I.10. Пять правильных многогранников

Несмотря на свою важность и красоту, формула Эйлера практически неизвестна широкой публике. Ее нет в стандартном школьном курсе математики. Некоторые старшеклассники знают формулу Эйлера, но большая часть студентов, изучающих математику, встречаются с ней только в колледже.

Математическая слава – странная вещь. Некоторые теоремы хорошо известны, потому что вколочены в головы школьников: теорема Пифагора, формула корней квадратного уравнения, основная теорема математического анализа. Другие результаты оказываются на слуху, поскольку решают знаменитую задачу. Великая теорема Ферма оставалась недоказанной в течение трехсот лет, пока в 1993 году Эндрю Уайлс не удивил мир своим доказательством. Проблема четырех красок была поставлена в 1853 году, а доказана Кеннетом Аппелем и Вольфгангом Хакеном в 1976 году. Знаменитая гипотеза Пуанкаре была выдвинута в 1904 году и вошла в число семи проблем тысячелетия по версии Института математики Клэя, который счел их настолько важными, что математику, решившему любую из них, была обещана награда в размере миллиона долларов. Эта сумма была присуждена Григорию Перельману, предложившему доказательство гипотезы Пуанкаре в 2002 году. Некоторые математические факты хорошо известны в силу своего междисциплинарного характера (последовательность чисел Фибоначчи в природе) или исторической значимости (бесконечность множества простых чисел, иррациональность числа π).

Формула Эйлера должна быть известна так же хорошо, как эти великие теоремы. У нее красочная история, а в теорию внесли вклад многие величайшие математики. Это глубокая теорема, и понимание всей ее глубины только возрастает по мере развития математики.

Книга, которую вы держите в руках, – рассказ о красивой теореме Эйлера. Мы проследим ее историю и покажем, как она перебрасывает мост между многогранниками древних греков и современной топологией. Мы расскажем о многих обличьях, под которыми скрывается формула Эйлера в геометрии, топологии и динамических системах. Мы также приведем примеры теорем, доказательства которых основаны на формуле Эйлера. Мы увидим, почему эта долгое время остававшаяся незамеченной формула стала одной из самых уважаемых теорем в математике.

Глава 1

Леонард Эйлер и три его «великих» знакомца

Читайте, читайте Эйлера – он наш общий учитель.
– *Пьер-Симон Лаплас*[1]

Мы привыкли к гиперболам. Телевизионная реклама, рекламные щиты, спортивные комментаторы, популярные музыканты регулярно извергают такие эпитеты, как величайший, лучший, ярчайший, быстрейший и прочее. Эти слова давно уже утратили свое буквальное значение и используются как естественная часть продвижения товара или развлечения зрителя. Поэтому слова о том, что Леонард Эйлер был одним из самых влиятельных и плодовитых математиков, когда-либо рождавшихся на свет, могут не произвести никакого впечатления на читателя. Но мы ничего не преувеличиваем. Эйлер наряду с Архимедом (287–211 до н. э.), Исааком Ньютоном (1643–1727) и Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) признан как один из десяти – или даже пяти – самых важных и значительных математиков в истории.

За свою 76-летнюю жизнь Эйлер написал столько математических работ, что для их печати потребовалось семьдесят четыре весьма объемистых тома, – больше, чем любой другой математик. Когда все его работы были опубликованы (а новые материалы обнаруживались в течение 79 лет после его смерти), оказалось, что он автор ошеломительных 866 трудов, включая статьи и книги по самым передовым предметам, элементарные учебники, научно-популярные работы и технические руководства. И сюда еще не включены предположительно пятнадцать томов писем и записных книжек, которые все еще готовятся к печати.

Но значимость Эйлера определяется не его плодовитостью, а глубиной основополагающих вкладов в математику. Эйлер не специализировался в какой-то одной области. Он был одним из великих универсалов, оставившим след в самых разных дисциплинах. Он опубликовал влиятельные статьи и книги по математическому анализу, теории чисел, комплексному

анализу, вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и топологии. И это не считая вклада в такие прикладные предметы, как оптика, электричество и магнетизм, механика, гидродинамика и астрономия. Ко всему прочему Эйлер обладал чертой, редкой среди больших ученых и тогда, и в наше время: он был превосходным стилистом. В отличие от своих предшественников, Эйлер писал простым и ясным языком, благодаря чему его работы равно доступны специалистам и студентам.

Рис. 1.1. Леонард Эйлер

Эйлер был мягким скромным человеком, его жизнь была сосредоточена на большой семье и работе. Он жил сначала в Швейцарии, потом в России, Пруссии и снова в России и активно переписывался со многими известными мыслителями XVIII века. Его профессиональная жизнь была связана с тремя «Великими» правителями Европы – Петром Великим, Фридрихом Великим и Екатериной Великой. Во времена правления этих монархов были созданы или воскрешены национальные академии наук их стран. Эти академии финансово поддерживали Эйлера, так что он мог заниматься чистой наукой. Взамен ожидалось лишь, что время от времени он будет применять свой научный опыт на благо государства, а его известность принесет славу нации.

Леонард Эйлер родился в швейцарском городе Базеле 15 апреля 1707 года в семье Пауля Эйлера и Маргариты Брукер Эйлер. Вскоре после этого семья переехала в близлежащий городок Рихен, где Пауль был назначен пастором местной кальвинистской церкви.

Первые уроки математики Эйлеру давал отец. Он не был математиком, но учился математике у знаменитого Якоба Бернулли (1654–1705), ког-

да Пауль и младший брат Якоба Иоганн (1667–1748), будучи студентами Базельского университета, столовались в доме Якоба. Якоб и Иоганн Бернулли были членами семейства, которому суждено было стать одной из самых известных фамилий в математике. Больше ста лет клан Бернулли играл заметную роль в развитии математики, вклад в которую внесли по меньшей мере восемь Бернулли.

Формальное обучение Леонард начал в Базельском университете в возрасте 14 лет. В то время столь юный возраст не считался чем-то необычным для студента университета. Университет был небольшим – всего несколько сотен студентов и девятнадцать профессоров. Пауль надеялся, что сын пойдет по его стопам и станет пастором, поэтому Эйлер изучал теологию и иврит. Но его математические способности были несомненны, и очень скоро он привлек внимание друга отца Иоганна Бернулли. К тому времени Иоганн стал одним из ведущих европейских математиков.

Иоганн был заносчивым резким человеком, он всегда желал быть первым, что приводило к известным скандалам по поводу приоритета (в том числе со своим братом и сыном). Тем не менее он заметил выдающийся талант мальчика и посоветовал ему строить карьеру в математике. В своей автобиографии Эйлер писал: «Если я сталкивался с каким-то препятствием или трудностью, то мог свободно прийти к нему в субботу вечером, и он доброжелательно объяснял мне то, чего я не мог понять»[2]. Эти уроки сыграли большую роль в становлении математической техники Эйлера.

Несмотря на то что Леонард преуспевал в своих частных занятиях математикой, Пауль все еще надеялся, что его сын станет пастором. В семнадцать лет Эйлер получил степень магистра философии. Иоганн опасался, что его протеже может оказаться потерян для математики и станет приобретением Церкви, поэтому вмешался и твердо сказал Паулю, что Леонард может стать выдающимся математиком. Из-за теплых чувств, питаемых к математике, Пауль уступил. Но хотя Эйлер отказался от идеи стать пастором, он всю свою жизнь оставался набожным кальвинистом.

Свой первый независимый математический результат Эйлер получил в девятнадцать лет. За теоретическую работу по идеальному размещению мачт на судне он заслужил «похвальное упоминание» в престижном конкурсе, организованном Французской академией наук. Это достижение было бы невероятным для любого юноши его возраста, а особенно для молодого человека из Швейцарии, который никогда не видел океанского корабля. В том конкурсе Эйлер не стал победителем, что было бы примерно эквивалентно получению сегодняшней Нобелевской премии, но в последующие годы он удостаивался высшей награды двенадцать раз.

В то время, когда родился Эйлер, в тысяче миль на северо-запад от Базеля российский император Петр Великий (1672–1725) строил город Санкт-Петербург. Он был основан в 1703 году в болотистой местности недалеко от места впадения Невы в Балтийское море. Петр использовал рабский труд

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru