Содержание

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com, указав название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Введение

Книга посвящена задаче о том, как соединить данное множество пунктов на плоскости кратчайшей сетью прямолинейных отрезков. Этот трудный и важный вопрос интересен еще и тем, что даже в простейших случаях он приводит к любопытным и непростым геометрическим задачам.

Пример такой задачи: где построить школу для учащихся из трех деревень, так чтобы сумма расстояний от нее до этих деревень была минимальна. Автор в школьные годы не раз встречал ее в научно-популярной математической литературе. Впоследствии он узнал, что этой задаче чуть менее 400 лет и она вызывала интерес у нескольких ученых XVII века, наиболее известными из которых были Пьер Ферма и Эванджелиста Торричелли (разумеется, речь шла не о деревнях, а о точках плоскости). Трудно сказать, как они пришли к этой задаче. Вряд ли у них был прикладной интерес, скорее всего, она их привлекла простотой и естественностью своей формулировки. Наверное, сыграло роль и то обстоятельство, что в XVII веке ученые начали широко исследовать экстремальные задачи (задачи, в которых нужно было найти максимум или минимум некоторой величины) и искать методы их решения. Одним из первопроходцев в этой области и был Ферма (до этого времени экстремальные задачи исследовались лишь эпизодически, например древнегреческий геометр Зенодор изучал задачу о построении многоугольника данного периметра и максимальной площади).

Но если обратиться к прикладному значению этой задачи, то стоит заметить, что оно существенно только в случае, когда руководство района решит соединить школу с деревнями шоссейными дорогами и начнет возить школьников на учебу на автобусах. Тогда оптимальный выбор места для школы минимизирует и расходы на строительство шоссе, и расходы на горючее для автобусов. В случае когда школьникам приходится ходить пешком, наверное, школу лучше построить на равном расстоянии от деревень (в центре описанного вокруг данного треугольника круга), чтобы никому не было обидно.

Разумеется, рассматриваемую задачу можно интерпретировать и по-другому, например как выбор оптимального места установки электростанции (с целью минимизации расходов на постройку линий электропередач). Эта интерпретация сразу подсказывает обобщение рассматриваемой задачи: где для данных n точек выбрать одну точку так, чтобы минимизировать сумму расстояний от нее до данных точек. Но и с точки зрения чистой математики этот вопрос также возникает естественно, поэтому неудивительно, что им занимались и в XIX веке. И он оказался более сложным, чем случай трех точек. Было установлено, что оптимальная точка всегда существует и определена однозначно. Любопытно, что для 4 точек плоскости эта задача решается проще, чем в случае $n = 3$. Действительно, если четырехугольник выпуклый, то оптимальная точка совпадает с пересечением его диагоналей, а для треугольника ответ зависит от величины его углов. Если один из углов не меньше 120°, то оптимальная точка совпадает с его вершиной, а в противном случае эта точка лежит внутри треугольника и его стороны из нее видны под равными углами (очевидно, по 120° каждый).

Однако если четыре точки не лежат в одной плоскости (т. е. являются вершинами некоторого тетраэдра), то задача поиска оптимальной точки становится гораздо более сложной, чем в плоском случае. А если пять точек лежат на плоскости, то в некоторых случаях оптимальную точку нельзя построить циркулем и линейкой. Впрочем, в некоторых случаях оптимальную точку можно легко построить. Например, если n точек лежат в вершинах правильного n-угольника, то оптимальная точка совпадает с его центром.

Но интерпретация рассматриваемой задачи как проблемы построения минимальной сети из линий электропередач приводит естественным образом к следующему ее обобщению: допустим, что для построения этой сети можно использовать не одну вспомогательную точку (из которой идут отрезки во все данные точки), а несколько точек, которые можно соединять отрезками как между собой, так и с данными точками, и данные точки тоже можно соединять отрезками напрямую друг с другом. В частности, можно соединить данные точки отрезками прямых, вообще не используя вспомогательных точек, можно соединить, используя только одну вспомогательную точку, можно соединить, используя две вспомогательные точки, и т. д. Как из всего этого множества вариантов (при большом n огромного множества) выбрать оптимальный? Эту задачу сейчас связывают с именем знаменитого швейцарского геометра Якоба Штейнера.

В общем случае эта задача очень трудна и является предметом серьезных современных исследований. Разумеется, ее обобщили во многих разных направлениях. В нашей книжке будет подробно рассмотрен только случай данных трех или четырех точек на плоскости либо в пространстве, но зато на уровне, доступном пониманию даже школьников.

В последней главе рассматривается задача о нахождении минимального стягивающего дерева для данного n-вершинного графа, в котором ребрам приписаны произвольные веса (числа). Она является естественным обобщением задачи Штейнера для данных n точек плоскости или пространства, в которой запрещено использовать вспомогательные точки. В случае малых n эта задача легко решается полным перебором всех стягивающих деревьев. Однако с ростом n размер перебора растет настолько быстро, что его становится невозможно выполнить даже на суперкомпьютере. Тем не менее в 20-е г. XX века чешские математики Борувка и Ярник изобрели быстрые алгоритмы для решения этой задачи, не использующие прямой перебор. В случае применения этих алгоритмов для построения кратчайшей сети для точек плоскости еще большего их ускорения можно достичь, дополняя эти алгоритмы найденным в 30-е г. известным советским математиком Б. Н. Делоне алгоритмом построения триангуляции для данного множества точек (триангуляции Делоне). После переоткрытия этих алгоритмов американскими программистами в 50-е годы XX века они стали едва ли не самыми популярными алгоритмами информатики. Читатель найдет их описание в конце нашей книжки.

Глава 1

Кратчайшие сети и задача Ферма–Торричелли

Всё к лучшему в этом лучшем из миров, и все законы природы должны выражаться экстремальными принципами.

Г. В. Лейбниц

1.1. Случай трех точек

Пусть даны три точки. Расстояния между ними обозначим a, b, c. Обозначения выберем так, чтобы $a \le b \le c$. Периметр $a + b + c$ этого треугольника (он может вырождаться в отрезок) обозначим P (буквой p обычно обозначают полупериметр $P/2$). Кажется очевидным, что кратчайшая сеть (система линий), соединяющая эти точки, имеет длину $f = a + b$ и состоит из двух «меньших» сторон треугольника.

Действительно, кратчайшие линии, попарно соединяющие эти точки, имеют длины, не меньшие a, b, c соответственно, а для связности сети достаточно двух линий из трех.

Первая задача простая.

Задача 1. Докажите, что $P/2 \le f \le 2P/3$, и приведите примеры, показывающие, что эти неравенства точные (другими словами, они могут обращаться в равенства).

Довольно неожиданно, что если использовать вспомогательную точку, то сумма расстояний от нее до вершин треугольника (случай вырождения треугольника в отрезок очевиден и поэтому далее не упоминается) иногда может быть меньше f.

Точка, в которой достигается минимум этой суммы расстояний, называется точкой Ферма–Торричелли, а сам этот минимум далее обозначается t.

Задача 2. Если треугольник имеет угол, не меньший 120°, то $f = t$, значит, $P/2 < f = t \leq 2P/(2 + \sqrt{3})$, причем левое неравенство хотя и неточное, но заменить его на неравенство $cP \leq t$, где $c > 1/2$, нельзя. Правое неравенство лучше, чем следующее из задачи 1 неравенство $t = f \leq 2P/3$, и оно точное, так как достигается в случае равнобедренного треугольника с углом 120° при вершине.

Задача 3. Если в треугольнике все углы не больше 120°, то $P/2 < t \leq P/\sqrt{3}$, причем левое неравенство, как и в задаче 2, улучшить нельзя, а правое неравенство точное и достигается только для правильных треугольников. Точка Торричелли однозначно определяется тем, что из нее все стороны треугольника видны под равными углами (очевидно, по 120°).

Задача 4. Если в треугольнике все углы не больше 120°, то $\sqrt{3}f/2 \leq t < f$, причем правое неравенство улучшить нельзя, а левое неравенство точное и достигается только для правильных треугольников.

Убедиться в точности данных неравенств несложно. В задаче 2 достаточно вычислить отношения сторон указанного в ней равнобедренного треугольника, а в задаче 3 нужно воспользоваться указанным свойством точки Ферма–Торричелли и заметить, что в случае правильного треугольника она совпадает с его центром, а потом вычислить радиус описанного вокруг него круга.

Неравенство $f > P/2$ следует из неравенства треугольника $f = a + b > c$, неравенство $t > P/2$ на самом деле справедливо для суммы расстояний до вершин от любой точки на плоскости треугольника.

Задача 5. Докажите, что для любой точки O справедливо неравенство $AO + BO + CO \geq (AB + AC + BC)/2$.

Указание. В силу неравенства треугольника $AO + BO \geq AB$. Напишите еще два аналогичных неравенства и почленно их сложите. Остается поделить пополам обе части.

Задача 6. Докажите, что неравенство $t > P/2$ улучшить, вообще говоря, нельзя.

Указание. Пусть $b = 1$, а a достаточно мало, угол между AC и BC меньше 120°, а T – точка, такая что $\angle ATC = \angle BTC = 120°$. При уменьшении a величина $t = AT + BT + CT$ будет неограниченно приближаться к 1, а периметр P – к 2.

Задача 7. Докажите, что неравенство $t < f$ улучшить, вообще говоря, нельзя.

Указание. Пусть $a = b = 1$, угол между AC и BC меньше 120°, а T – точка, такая что $\angle ATC = \angle BTC = 120°$. При стремлении угла $\angle ACB$ к 120° величина $t = AT + BT + CT$ будет неограниченно приближаться к 2.

1.2. Точки Ферма–Торричелли для треугольника

> Я хочу только, чтобы он знал, что наши вопросы о максимумах и минимумах и о касательных к кривым линиям были решены восемь или десять лет тому назад, и несколько человек, которые знали про это в последние пять или шесть лет, могут это засвидетельствовать.
>
> *Пьер Ферма,*
> *письмо Рене Декарту, 1638*

Для решения задач 2, 3, 4 вначале докажем, что если углы треугольника меньше 120°, то минимальное значение суммы расстояний от произвольной точки плоскости до его вершин достигается только в точке Торричелли, которая лежит внутри этого треугольника. Воспользуемся красивыми рассуждениями из книги [1], которые в ней приписываются студенту Бюкнеру.

Пусть дан $\triangle BCD$ и точка A в его плоскости. Повернем его сторону DC вокруг точки D на 60° против часовой стрелки. Точка C переместится в точку F, такую что $\triangle FDC$ будет правильным треугольником. Аналогично при том же повороте точка A перейдет в точку E и $\triangle FDA$ будет правильным, значит, $EA = DA$. При том же повороте $\triangle ADC$ переходит в равный ему $\triangle EDF$, поэтому $FE = CA$. Следовательно, сумма $AC + AD + AB$ равна длине ломаной $FEAB$ с фиксированными (т. е. не зависящими от выбора точки A) концами F

и B. Длина этой ломаной, а значит, и сумма расстояний от точки A до вершин $\triangle BCD$, не меньше BF, и равенство достигается, только когда ломаная вырождается в отрезок прямой FB. Это возможно, только когда AB и EA лежат на одной прямой, т. е. когда $\angle DAC = 120°$, и когда FE и EA лежат на одной прямой, т. е. когда $\angle FED = 120°$, а значит, и равный ему $\angle CAD = 120°$. Но тогда и угол, под которым видна третья сторона CB из точки A, равен $360 - 120 - 120 = 120°$. Такая точка существует, только если у $\triangle BCD$ нет угла, большего или равного 120°, и она определена однозначно и находится внутри этого треугольника.


Рис. 1.1 ❖ Пьер де Ферма (1607–1665) и Эванджелиста Торричелли (1608–1647)

Очевидно, верно и обратное: если в $\triangle BCD$ все углы меньше 120°, то, выбрав в качестве A точку Ферма–Торричелли, получим, что она имеет сумму расстояний до его вершин, равную длине отрезка BF.

Поэтому минимальное значение этой суммы достигается в этом случае только в точке Ферма–Торричелли, и оно равно BF. Из доказанного легко выводится утверждение следующей задачи:

Задача 8. Если в треугольнике все углы меньше 120°, то отрезки, соединяющие каждую его вершину с вершиной правильного треугольника, построенного на противоположной ей стороне, так чтобы он не накладывался на данный треугольник, имеют равную длину и пересекаются в одной точке. Окружности, описанные вокруг указанных трех правильных треугольников, также пересекаются в этой точке.

Указание. Эта точка и есть точка Ферма–Торричелли. А длина каждого из этих трех отрезков равна минимальной сумме расстояний от произвольной точки до вершин данного треугольника.

Иногда теорему о том, что три указанные окружности пересекаются в одной точке, приписывают Наполеону вместе с теоремой о том, что центры этих окружностей (т. е. центры указанных правильных треугольников) образуют еще один правильный треугольник.

Наполеон неплохо знал математику и несколько раз участвовал в заседаниях Академии наук в Париже, когда еще не был императором. Говорят, что на одном из этих заседаний Лаплас сказал ему: «Менее всего мы ждем урока геометрии от вас, генерал». Впоследствии Наполеон присвоил Лапласу (выходцу из третьего сословия) титул графа империи, а Фурье – титул барона. Но легенда о том, что Наполеон открыл эти теоремы о правильных треугольниках, возможно, вызвана его любовью к треуголкам, в которых его чаще всего изображали художники.

Заметим, что наиболее простой способ построения точки Ферма–Торричелли циркулем и линейкой, вероятно, таков: строим правильные треугольники только на двух сторонах данного треугольника, проводим два из упомянутых трех отрезков, их точка пересечения и есть точка Ферма–Торричелли. Использование для ее построения пары окружностей выглядит более сложным.

На рис. 1.2 изображен случай, когда $\angle DCB > 120°$. В этом случае точки Ферма–Торричелли не существует, и минимальное значение суммы расстояний будет больше FB, так как ломаная $FEAB$ никогда не вырождается в отрезок FB. Но если точка A лежит внутри $\triangle DCB$, то возможны два случая. В первом из них ломаная $FEAB$ пересекает отрезок FC в некоторой точке G, поэтому длина ломаной FEG больше длины отрезка FG, а длина ломаной GAB больше длины ломаной GCB с теми же концами (это также следует из неравенства треугольника), значит, длина ломаной $FEAB$ больше длины ломаной FCB, которая равна сумме сторон CB и CD данного треугольника. Во втором случае чертеж выглядит как на рис. 1.3, в котором ломаная $FEAB$ не пересекает ломаную FCB, и поэтому тоже имеет большую длину, чем сумма сторон *CB* и *CD* (так как из двух выпуклых ломаных с общими концами длиннее та, которая охватывает другую, это тоже выводится из неравенства треугольника).

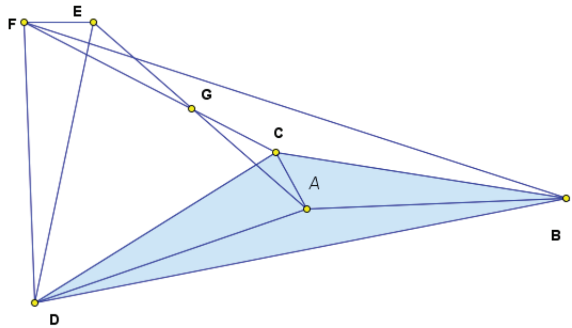

Рис. 1.2

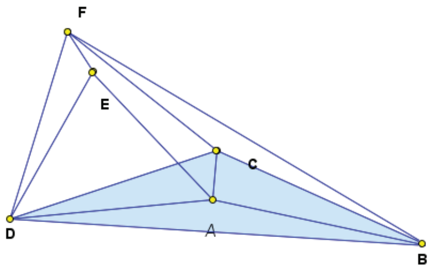

Рис. 1.3

Таким образом, среди точек, лежащих внутри треугольника с углом, большим или равным 120°, минимальная сумма расстояний от них до его вершин будет только у вершины этого угла. В этом случае такую точку иногда называют точкой Ферма, который также занимался этой задачей и решил ее методами дифференциального исчисления (которыми он фактически владел еще до Ньютона и Лейбница).

Случай, когда точка лежит вне треугольника, можно разобрать подобным же образом (заинтересованный читатель может попробовать это сделать самостоятельно).

1.3. Кратчайшие сети из двух отрезков и из трех отрезков

> […] основные результаты математики чаще выражаются неравенствами, а не равенствами.
>
> *Эдвин Беккенбах, Ричард Беллман, «Введение в неравенства», 1961*

Вернемся к решению задач 2, 3, 4. Для доказательства неравенства $t \leq 2\mathrm{P}/(2+\sqrt{3})$ можно без ограничения общности считать, что $c = 1$, и доказать, что среди треугольников с основанием 1 и углом при вершине не больше 120° наибольший периметр (и сумму $a + b$) имеет равнобедренный треугольник с углом 120°, после чего остается воспользоваться монотонным ростом функции $x/(1 + x)$. Так как вершина этого угла лежит в сегменте круга с радиусом $1/\sqrt{3}$ и с хордой 1, то ее можно, не уменьшая периметр треугольника, посадить на дугу, ограничивающую этот сегмент (передвигаем ее так, чтобы получившийся треугольник содержал в себе исходный, и пользуемся тем, что если один треугольник содержит другой, то его периметр больше). Поэтому далее можно считать, что угол при вершине в точности равен 120°. Остается решить следующую задачу, известную, видимо, со времен Древней Греции.

Задача 9. Докажите, что среди всех треугольников с данным $\angle A$ и стороной a наибольший периметр (и площадь) имеет равнобедренный.

Указание. Пусть $\triangle ABC$ имеет данное основание BC и данный угол α при вершине A. Отложим на продолжении стороны BA отрезок $AD = AC$. Тогда $\angle BDC = \alpha/2$, вершина D лежит на дуге окружности, из точек которой отрезок BC виден под равным углами $\alpha/2$, и $BD = BA + BC$, поэтому для нахождения точки A, для которой периметр $\triangle ABC$ максимальный, нужно на этой дуге взять в качестве D точку, диаметрально противоположную точке B.

Рассмотрим случай, когда у треугольника все углы меньше 120°.

1.3.1. Окончание решения задачи 4: почти чистая геометрия

Далее понадобится широко известная

Задача 10. Докажите, что угол против наибольшей стороны треугольника не меньше 60°, а угол против наименьшей стороны не больше 60°. Равенство возможно лишь для правильного треугольника.

Указание: против большей стороны лежит больший угол.

Применяя задачи 8 и 10, заметим, что если обозначить AB наибольшую сторону данного треугольника ABC и через F – вершину правильного треугольника, построенного на стороне CB, то у треугольника FCA угол $\angle FCA$ не меньше $60 + 60 = 120°$, а сторона $FA = t$ равна сумме расстояний от вершин треугольника ABC до его точки Ферма–Торричелли. Из неравенства треугольника следует, что $t < a + b = f$. Применяя задачу 9, получаем, что при заданном основании t треугольника FCA сумма $f = a + b$ его боковых сторон принимает наибольшее значение у равнобедренного треугольника с углом $\gamma + 60°$ при вершине, где γ – угол $\angle ACB$. Так как этот треугольник содержится внутри равнобедренного треугольника с тем же основанием и с углом 120° при вершине, то f не больше удвоенной боковой стороны треугольника с углами 120°, 30°, 30°. Эта сторона является гипотенузой треугольника с углами 30° и 60° и большим катетом $t/2$, значит, она равна $t/\sqrt{3}$, откуда $f \le 2t/\sqrt{3}$, то есть $t \ge \sqrt{3}f/2$, что и требовалось доказать.

1.3.2. Завершение решения задачи 3: алгебра и немного тригонометрии

Неравенство $t \le P/\sqrt{3}$ следует из более точного неравенства

$$t^2 \le ab + ac + bc \le (a + b + c)^2/3 = P^2/3.$$

Для его доказательства понадобятся несколько известных алгебраических неравенств, интересных и сами по себе (целью этого раздела является, в частности, ознакомление читателя с этими неравенствами).

Задача 11. Докажите тождество

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = ((x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2)/2$$

и выведите из него неравенства

$$xy + xz + yz \le x^2 + y^2 + z^2,$$
$$3(xy + xz + yz) \le (x + y + z)^2.$$

Задача 12. Из неравенств задачи 11 выведите неравенства

$$(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

(частный случай неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным) и

$$3xyz(x + y + z) \le (xy + xz + yz)^2$$

(частный случай неравенств Мюрхеда).

Докажем теперь неравенство $t^2 \le P^2/3$. Воспользуемся доказанным в разделе 1.2 равенством $t = AA_1$, где A_1 – вершина правильного треугольника BCA_1. Из задачи 10 следует, что $\phi = \angle BCA \ge \pi/3$.

Из формулы косинуса суммы следует, что

$$\cos\angle A_1CA = \cos(\phi + \pi/3) = \frac{\cos\phi}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin\phi}{2},$$

из теоремы косинусов для $\triangle ABC$ имеем

$$\cos\phi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

из формулы для площади $\triangle ABC$ получаем, что $\sin\phi = 2S/ab$, значит,

$$\cos\angle A_1CA = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4ab} - \frac{\sqrt{3}S}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 4\sqrt{3}S}{4ab}.$$

Применяя теорему косинусов к $\triangle A_1CAC$, имеем

$$t^2 = |AA_1|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle A_1CA$$
$$= a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 4\sqrt{3}S}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}S.$$

Далее понадобится интересное и сравнительно малоизвестное неравенство.

Задача 13. Для площади треугольника со сторонами a, b, c справедливо неравенство Хадвигера–Финслера

$$S \le \frac{2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Указание. Выражая площадь S по формуле Архимеда–Герона, подставляя в нее вместо $p = (a + b + c)/2$ сумму $(p - a) + (p - b) + (p - c) = 3p - P = p$, из неравенства задачи 12

$$3xyz(x + y + z) \leq (xy + xz + yz)^2,$$

которое для положительных чисел можно записать в виде

$$\sqrt{3}\sqrt{xyz(x + y + z)} \leq xy + xz + yz,$$

выводим неравенство

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3}S &= 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &\leq 4((p-a)(p-b) + (p-a)(p-c) + (p-b)(p-c)) \\ &= 4(3p^2 - 2p(a + b + c) + ab + ac + bc) = 4(ab + ac + bc - p^2) \\ &= 4(ab + ac + bc) - (a + b + c)^2 \\ &= 2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2. \end{aligned}$$

Используя неравенство задачи 13, имеем

$$t^2 = |AA_1|^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}S \leq ab + ac + bc.$$

Остается применить неравенство задачи 11 и получить, что

$$t^2 \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{P^2}{3} = \frac{4p^2}{3},$$

откуда сразу следует неравенство $t \leq \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{2p}{\sqrt{3}}$. В равенство оно может обращаться только при $a = b = c$.

Задача 14. При $a \leq b \leq c$ из доказанных неравенств следует

$$3(a + b)^2/4 = (\sqrt{3}f/2)^2 \leq t^2 \leq ab + ac + bc.$$

Докажите его непосредственно.

Указание: $ab + ac + bc \geq 2ab + b^2$, $2ab + b^2 - 3(a + b)^2/4 = (3a + b)(b - a)/4 \geq 0$.

Заметим, что доказательство неравенства $t \leq P/\sqrt{3}$ нельзя получить из очевидных неравенств $t < 3R$, $t < 2(m_a + m_b + m_c)/3$, где R – радиус описанного круга, а m_a, m_b, m_c – медианы треугольника, потому что $m_a + m_b + m_c \leq 9R/2$, и $3P/4 < m_a + m_b + m_c < P$, причем оба неравенства неулучшаемы, так как сумма медиан может быть сколь угодно близка P (в случае равнобедренного треугольника с достаточно малым основанием в сравнении с боковой стороной) и сколь угодно близка к $3P/4$ (в случае равнобедренного треугольника с достаточно малой высотой в сравнении с основанием).

1.3.3. Еще одно неравенство для длины сети Ферма–Торричелли

В дополнение к неравенству $t \geq \sqrt{3}f/2$ докажем еще следующее неравенство Ласло Фейеш Тота.

Задача 15. Для любой точки сумма ее расстояний до вершин треугольника не меньше $2\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$.

Указание. Можно считать, что эта точка внутри треугольника. Согласно теореме Торичелли–Ферма, минимум суммы расстояний до вершин достигается в точке, из которой стороны видны под углами 120°, или в вершине с углом не меньше 120°. Если обозначить расстояния от этой точки до вершин x, y, z, то в первом случае площадь треугольника равна

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + xz + yz)$$

(для этого сложим площади трех треугольников, на которые данный треугольник разрезается отрезками длины x, y, z, соединяющими точку Ферма–Торричелли с его вершинами, и воспользуемся тем, что углы при точке Ферма–Торричелли у них равны по 120°), а во втором случае $xyz = 0$, в обоих случаях

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + xz + yz).$$

Остается применить неравенство задачи 11.

Другое доказательство можно получить следующим образом. Отразим точку относительно сторон треугольника и рассмотрим шестиугольник, образованный полученными тремя точками и вершинами треугольника. Его площадь равна $2S$, а полупериметр равен указанной сумме расстояний. Остается применить изопериметрическое неравенство для этого шестиугольника (его можно найти, например, в [5]).

Для треугольников с достаточно малой площадью это неравенство слабее, чем неравенства задач 4 и 6, но для правильного треугольника оно совпадает с неравенством задачи 4, а для равнобедренного треугольника с углом при вершине, большим 60° и меньшим 120°, оно лучше неравенства задачи 4.

1.3.4. Второе доказательство неравенства $t \leq P/\sqrt{3}$

Продолжая рассуждения, приведшие к неравенству $x + y + z \geq 2\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$, получим еще одно доказательство неравенства

$$t = x + y + z \leq (a + b + c)/\sqrt{3} = P/\sqrt{3}$$

для треугольника со сторонами a, b, c.

Рассмотрим треугольники, на которые данный треугольник разрезается отрезками длины x, y, z, соединяющими точку Ферма–Торричелли с его вершинами. Применяя к ним формулу косинусов, получаем, что при подходящих обозначениях

$$a^2 = x^2 + y^2 + xy, \quad b^2 = x^2 + z^2 + xz, \quad c^2 = z^2 + y^2 + zy.$$

Далее понадобится следующая

Задача 16. Докажите неравенство

$$x^2 + y^2 + xy \geq 3(x + y)^2/4.$$

Указание: проверьте тождество $x^2 + y^2 + xy - 3(x + y)^2/4 = (x - y)^2/4$. Применяя неравенство задачи 16, имеем

$$a \geq \sqrt{3}(x + y)/2, \quad b \geq \sqrt{3}(x + z)/2, \quad c \geq \sqrt{3}(z + y)/2.$$

Складывая полученные неравенства почленно, получаем неравенство

$$a + b + c \geq \sqrt{3}(x + y + z),$$

которое можно записать в виде $t = x + y + z \leq (a + b + c)/\sqrt{3} = P/\sqrt{3}$.

1.3.5. Еще о треуголках Наполеона

Вернемся к задаче 8. Ее утверждение верно и для треугольников с углом, большим 120° (см. рис. 1.4). Но точка пересечения прямых, на которых лежат отрезки AA_1, BB_1, CC_1, в этом случае уже не будет точкой Ферма–Торричелли, и равенство отрезков и конкурентность этих прямых (так называется свойство трех прямых иметь общую точку) надо доказывать другим способом.

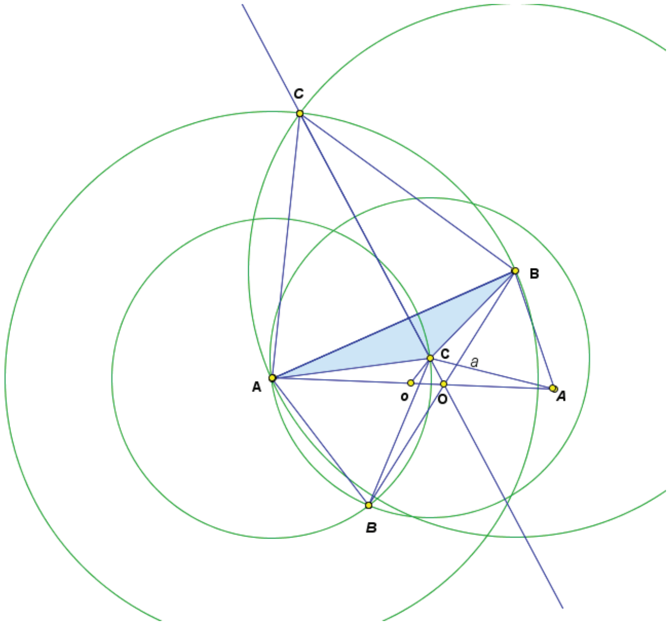

Рис. 1.4

Задача 17. Докажите это.

Указание. Заметьте, что $\triangle ACA_1 = \triangle BCB_1$, так как получаются друг из друга поворотом на 60°. Поэтому $\triangle CBO$ при том же повороте переходит в $\triangle CA_1O_1$ и $\triangle COO_1$ – правильный. Поэтому сторона AC из точки O видна под углом 60°. Аналогичное утверждение верно и про сторону BC. Тогда сторона AB видна под углом 120°. Аналогично $\triangle ABA_1 = \triangle CBC_1$ получаются друг из друга поворотом на 60°. Значит, угол между прямыми CC_1 и AA_1 равен 60°. Поэтому эти прямые пересекаются в точке O. Из равенства треугольников следует равенство отрезков AA_1, BB_1, CC_1, а также равенство $AA_1 = AO + BO - CO$.

Задача 18. Может быть, читатели смогут доказать чисто геометрически, что точка X, для которой $AX + BX - CX$ минимальна, совпадает с точкой O?

1.4. Точка Ферма–Торричелли и механика

> Однако бояться Асмодея не было нужды. Достаточно обратиться к нему по имени и сказать «Ты истинно Асмодей!» Тогда этот демон вручит заклинателю магическое кольцо и сделает его сведущим в геометрии, арифметике, астрономии и механике.
>
> *Курт Зелигман,*
> *«История магии и оккультизма»*

Еще один подход к решению задачи Ферма–Торричелли основан на соображениях из механики (а точнее ее раздела, называемого статикой)[1]. На плоской доске отметим точки A, B, C и просверлим в этих пометках небольшие отверстия. Возьмем три веревки (их длины обозначим l_1, l_2, l_3), привяжем к каждой из них по маленькой гирьке равного веса, а свободные концы этих веревок свяжем в один узел. Пропустим гирьки сквозь сделанные отверстия, держа доску горизонтально (см. рис. 1.5).

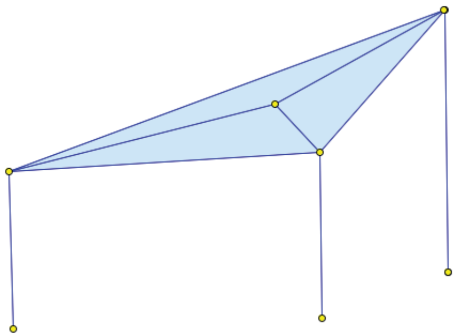

Рис. 1.5

Гирьки опустятся вниз и займут положения на некоторых расстояниях h_1, h_2, h_3 от доски. Тогда узел окажется в точке, удаленной от вершин треугольника $\triangle ABC$ на расстояния $d_i = l_i - h_i$, $i = 1, 2, 3$. Если углы треугольника меньше 120°, то эта точка будет точкой Ферма–Торричелли этого треугольника (если в треугольнике есть

[1] Об этом можно прочитать, например, в замечательной книжке [2], хотя для решения этой задачи механику применяли намного раньше.