ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 8

Некоторые обозначения и сокращения 11

2. Краевые задачи 13
2.1. Задача вариационного согласования функции и производной и уравнение Эйлера для простейших функционалов 14
2.2. Уравнение неразрывности и уравнение диффузии (теплопроводности) 22
2.3. Струны, волны и метод разделения переменных 33
2.4. Приведение дифференциального уравнения 2-го порядка к самосопряженному виду 46
2.5. Динамика упругого стержня. Функция Грина для уравнений высокого порядка 51
2.6. Колебания рояльной струны с жесткостью 57

3. Задачи: краевая и Штурма–Лиувилля 63
3.1. Краевая задача с параметром 63
3.2. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с особыми точками 67
3.3. Условие неотрицательности решения самосопряженного уравнения второго порядка 67
3.4. Экстремальные свойства собственных функций 70
3.5. Теорема Куранта–Фишера 72
3.6. Зависимость собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля от параметров задачи 74
3.7. Теория возмущений собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля 77
3.8. Теоремы Штурма о собственных функциях 79

4. Простейшие методы решения краевых задач (продолжение) 82
4.1. Простейшая разностная аппроксимация краевой задачи и прогонка 83
4.2. Метод экстраполяции Ричардсона 87
4.3. Метод стрельбы (пристрелки) для решения краевых задач 88

5. Обобщенные функции, или распределения 91
5.1. Основные функции 92
5.2. Сходимость последовательности основных функций 94
5.3. Линейные функционалы — обобщенные функции 95
5.4. Сходимость последовательности обобщенных функций 99
5.5. Операции с обобщенными функциями 100

5.6. Обобщенные функции, зависящие от параметра 102
5.7. Разложение на плоские волны 107
5.8. Обобщенные решения дифференциальных уравнений 110

6. Преобразование Фурье 114
6.1. Прямое и обратное преобразования Фурье 114
6.2. Условие Дини 117
6.3. Обращение преобразования Фурье 118
6.4. Примеры преобразования Фурье 119
6.5. Функции Вебера–Эрмита — собственные функции преобразования Фурье 123
6.6. Оператор свертки и его собственные функции 126
6.7. Линейные замены независимых переменных и преобразование Фурье 127
6.8. Квантовая механика и принцип неопределенности Гейзенберга 127
6.9. Пространства Соболева и лемма о вложении 129
6.10. Фундаментальное решение уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и преобразование Фурье обобщенных функций 136
6.11. Уравнения Лапласа, Гельмгольца и бигармоническое 148
6.12. Классификация уравнений в частных производных: эллиптические, гиперболические, параболические 151
6.13. Преобразование Фурье для решения задачи Коши и интеграл ошибок . . . 158
6.14. Синус- и косинус-преобразования Фурье 161
6.15. Многомерное преобразование Фурье и функции Бесселя 162
6.16. Некорректная задача Коши 171
6.17. Положительная определенность функций и ядер и теорема Бохнера 174
6.18. Случайные поля, их оценивание и использование 177
6.19. Универсальность операторов Фредгольма — теорема Л. Шварца о ядре . . 185
6.20. Пример интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода — интерполяция случайных полей 186
6.21. Данные с шумом и уравнение Фредгольма 2-го рода 190

7. Компактные разностные схемы 193
7.1. Компактные аппроксимации оператора d_x^2 на совмещенной сетке 195
7.2. Компактные аппроксимации оператора d_x на совмещенной сетке 200
7.3. Сплайны Шёнберга для оценки производных 202
7.4. Компактная аппроксимация одномерной задачи на шахматной сетке 204
7.5. Компактные аппроксимации уравнения Пуассона на плоскости — совмещенная квадратная сетка 206
7.6. Компактные аппроксимации уравнения Пуассона на плоскости — шахматная квадратная сетка 209
7.7. Компактные аппроксимации третьей производной 211
7.8. Компактная аппроксимация производных на неравномерной сетке 214
7.9. Операторы интерполяции 218
7.10. Компактные операторы сглаживания 222

7.11. Компактные разностные соотношения высокого порядка точности между осредненными и точечными значениями гладких функций 229
7.12. Средние по пикселю и точечные значения функции двух переменных 238
7.13. Средние по части пикселя и точечные значения функции 242
7.14. Стохастическая оптимизация и компактные схемы 245

8. Приложение 1. Интерполяция и аппроксимация функций 247
8.1. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита 248
8.2. Интерполяция с учетом многих производных. Аппроксимация Паде–Эрмита 253
8.3. Оценка погрешности интерполяции. 256
8.4. Устойчивость результата интерполяции к шумам и константа Лебега 260

9. Приложение 2. Теорема Гершгорина и локализация спектра матриц 264
9.1. Теорема Гершгорина 264
9.2. Тёплицевы матрицы и циркулянты 266

10. Приложение 3. Теорема Чебышёва о наилучшем равномерном приближении многочленами или рациональными функциями 268

11. Приложение 4. Интерполяционные сплайны 272
11.1. Размерность пространства сплайнов. Алгоритм построения. Граничные условия 272
11.2. Оценка погрешности интерполяции функции сплайном Шёнберга. Периодическая прогонка 278

Список литературы 281
Предметный указатель 287

1

ВВЕДЕНИЕ

Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немыслима без меры.

Д.И. Менделеев [1]

От себя добавим: точная наука немыслима и без адекватного задаче математического анализа полученной информации.

Многие задачи естествознания сводятся к построению математической модели, включающей дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия. За несколько веков, вплоть до настоящего времени, разрабатывался и совершенствовался математический и вычислительный аппарат изучения таких моделей — иногда качественный, а иногда вычислительный, с доведением до конечного результата в виде таблиц и графиков, количественно описывающих соответствующие явления.

В последние десятилетия этот прогресс предлагает довольно обширный спектр общедоступных или платных программных средств, решающих тот или иной тип задач. Вместе с огромной экономией средств и времени на разработку собственных алгоритмов и программ такое богатство часто приводит к соблазну применять эти разнообразные солверы, не слишком вникая в их суть.

Как и многие другие соблазны, этот может привести к печальным последствиям: выбор неадекватного, неэффективного алгоритма, применение алгоритма к некорректно поставленной задаче (вместо того, чтобы более тщательно обдумать модель и модифицировать ее), наконец, неумение обнаружить ошибки в результатах применения алгоритма, очевидные знающему специалисту.

Содержание данного учебного пособия связано в первую очередь с моделями, основанными на дифференциальных уравнениях. С помощью модели, если она корректна, можно изучать качественные свойства решений (напри-

[1] Дмитрий Иванович Менделеев (1834–1907).

мер, свойства спектра краевой задачи) и конструировать солверы: алгоритмы построения решения по входным данным — начальным условиям, краевым условиям и заданному внешнему воздействию — форсингу (если он имеется). При построении алгоритма решения необходимо избежать некорректности модели (когда решение задачи не всегда существует, не всегда единственно или сильно меняется при малом возмущении входных данных).

Наряду с классическими темами: простейшие (и важнейшие) уравнения математической физики, краевая задача и задача Штурма[2]–Лиувилля[3] для линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке, уравнения с особой точкой и преобразование Фурье[4], здесь будут рассмотрены теория обобщенных функций и методы разностной аппроксимации задач. Основное место тут уделено компактным схемам, получившим развитие в последние десятилетия. Эти схемы позволяют существенно повысить по сравнению с классическими точность численного решения задачи почти без увеличения вычислительной трудоемкости алгоритма. В конце книги имеется несколько приложений, изучение которых должно снабдить читателя подсобными средствами для построения различных алгоритмов.

Учебное пособие адресовано студентам, аспирантам и научным сотрудникам, занимающимся практическим построением моделей для описания конкретных процессов. Ввиду ограниченности объема автор во многих случаях жертвовал трудными доказательствами, отсылая читателя к специальной литературе (по уравнениям математической физики на русском языке издано много отличных учебников и монографий). Зато рассмотрено большое количество разнообразных примеров из различных областей. Еще больше в книге контрольных вопросов (они обозначены буквой **K**), — их формулировки составляют важную часть материала. Преподаватели смогут использовать их в том числе и для курсовых работ.

Материалы, здесь изложенные, были включены в несколько курсов для студентов Высшей школы экономики. Им предлагалось проделать довольно много домашних работ, в которых часть заданий нужно было выполнить аналитически, а часть — на компьютере с последующим анализом полученных чисел и графиков.

Книгу можно использовать и как справочник по целому ряду методов и алгоритмов. Однако автор убежден, что без практического опыта решения упражнений профессиональное овладение предметом невозможно.

Предполагается, что читатель, приступающий к освоению материала этого учебного пособия, уже свободно владеет аппаратом линейной алгебры (в объеме нисколько не устаревшего, несмотря на почтенный возраст, учебника [Гельфанд, 1970]) и математического анализа. Также предполагается,

[2] Жак Шарль Франсуа Штурм (1803–1855).
[3] Жозеф Лиувилль (1809–1882).
[4] Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830).

что ему известна теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Тут имеется много замечательных учебников, например: [Айнс, 2005; Арнольд, 1984; Матвеев, 1967], весьма различных и по отобранному материалу, и по стилю изложения.

Настоящая книга является продолжением учебника «Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать» [Гордин, 2016] [5], где рассмотрены модели из самых разных областей, основанные на обыкновенных уравнениях, дифференциальных и разностных, а также методы качественного и количественного анализа их решений.

При написании книги я пользовался возможностью обсуждать рассмотренные в ней вопросы со своими коллегами. Это позволило улучшить изложение и избежать многих ошибок. Особенно я признателен Д.Я. Прессману, В.Е. Року, М.А. Смирнову, В.А. Тиморину и Б.А. Хесину, сделавшим много полезных замечаний.

[5] Издательский дом ВШЭ предполагает в ближайшее время выпустить переработанное издание этой книги.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$!$ — факториал,

$\mathbf{x}$ — величина векторная, — выделена жирным шрифтом; если все компоненты $\mathbf{x}$ — целые и неотрицательные, то эта величина иногда называется мультииндексом, и тогда $|\mathbf{x}| = x_1 + \ldots + x_n$,

$\overline{x}$ — комплексная величина, сопряженная к x,

$d_x u$ — производная функции $u(x)$,

∂_x — производная функции u нескольких переменных по переменной x,

$\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}} u(\mathbf{x})$ — производная $\partial_{x_1}^{j_1} \ldots \partial_{x_n}^{j_n} u(\mathbf{x})$,

grad — градиент,

div — дивергенция,

rot — ротор,

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — набор из n чисел; возможно, координаты n-мерного вектора,

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — скалярное произведение векторов,

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство,

$\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство,

$\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел,

$\mathbb{R}_-$ — множество неположительных вещественных чисел,

$\mathbf{O}(n)$ — группа ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$,

$\mathbf{SO}(n)$ — группа специальных ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. с определителем, равным $+1$,

ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$,

Ω_{n-1} — площадь $(n-1)$-мерной единичной сферы в $\mathbb{R}^n$,

∂D — граница области D,

$\overline{D}$ — замыкание области D,

$\mathbf{L}^2_\rho(G)$ — гильбертово пространство функций на области G, суммируемых в квадрате с положительной весовой функцией ρ, где скалярное произведение задается формулой: $(u, v)_{\mathbf{L}^2_\rho(G)} = \int\limits_G u(\mathbf{x})\overline{v}(\mathbf{x})\,\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$,

$\mathbf{C}(G)$ — банахово пространство ограниченных непрерывных функций на области G — норма задается формулой $\|u\|_{\mathbf{C}(G)} = \sup\limits_{\mathbf{x}\in G} |u(\mathbf{x})|$,

$\mathbf{C}^k(G)$ — банахово пространство функций, с ограниченными и непрерывными производными $\partial^{\mathbf{j}}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})$, $|j| \leqslant k$ на области G — норма задается формулой $\|u\|_{\mathbf{C}^k(G)} = \max\limits_{|\mathbf{j}| \leqslant k} \sup\limits_{\mathbf{x} \in G} |\partial^{\mathbf{j}}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})|$,

x^z_+ — обобщенная функция одного переменного типа функции, равная нулю при $x \leqslant 0$ и x^z при $x > 0$, где $z \in \mathbb{C}$,

$\varphi(\mathbf{x}) * \psi(\mathbf{x})$ — свёртка функций $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$,

A^* — линейный оператор, сопряженный к оператору A, или матрица, сопряженная к матрице A,

$\mathbf{Spec}\, A$ — спектр (множество всех собственных чисел) матрицы A,

A' — матрица, транспонированная к матрице A,

Δ — оператор Лапласа [1],

δ^n_m — символ Кронекера [2],

$\mathbf{dim}\, L$ — размерность пространства L,

δ — обобщенная дельта-функция Дирака [3],

СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений,

ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение,

ФСР — фундаментальная система решений (базис в пространстве решений линейного обыкновенного однородного дифференциального уравнения или системы).

[1] Пьер-Симон Лаплас (1749–1827).
[2] Леопольд Кронекер (1823–1891).
[3] Поль Адриен Морис Дирак (1902–1984).

2

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Для различных обыкновенных дифференциальных[1] уравнений и систем порядка n

$$d_t\mathbf{X} = \mathbf{F}(t,\, \mathbf{X}) \tag{2.1}$$

часто рассматривается задача Коши[2]:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \tag{2.2}$$

Предполагается, что правая часть — функция $\mathbf{F}$ в окрестности точки $\langle 0,\, \mathbf{X}_0\rangle$ непрерывна по совокупности всех $n+1$ аргументов, а по $\mathbf{X}$ она дополнительно Липшиц[3]-непрерывна, т.е. существует такая константа L, что при всех $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$, лежащих в этой окрестности, выполняется неравенство

$$|\mathbf{F}(t,\, \mathbf{X}_1) - \mathbf{F}(t,\, \mathbf{X}_2)| \leqslant L|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|;$$

Липшиц-непрерывность функции $\mathbf{F}$ следует (докажите!) из существования у нее ограниченной первой производной.

При таких предположениях теорема Пикара[4]–Линделефа[5] гарантирует (см. [Арнольд, 1984; Гордин, 2016; Камке, 1976; Матвеев, 1967]) существование и единственность решения такой задачи Коши «в малом» (т.е. при достаточно малых $|t|$), а также непрерывную зависимость этого решения от начальных условий (данных Коши) $\mathbf{X}_0$. Во многих случаях (например, для линейных уравнений и систем) гарантируется существование и единственность решения даже «в большом», т.е. при всех t.

Замечание А. Для нелинейного дифференциального уравнения 1-го порядка $d_t x = x^2$ при $x_0 > 0$ решение существует только в малом, причем время существования ограниченного решения зависит (докажите!) от начального условия x_0. Если же рассматривать решение дифференциального уравнения как функцию комплексного

[1] Во всей книге используется обозначение d_x для оператора дифференцирования по переменной x, — не путать с дифференциалом dx. Частная производная обозначается ∂_x.

[2] Огюстен Луи Коши (1789–1857).

[3] Рудольф Отто Сигизмунд Липшиц (1832–1903).

[4] Шарль Эмиль Пикар (1856–1941).

[5] Эрнст Леонард Линделёф (1870–1946).

переменного, то (при ограничениях на правую часть $\mathbf{F}$) решение уравнения может существовать при почти всех значениях $t \in \mathbb{C}$.

Замечание Б. Условие непрерывности $\mathbf{F}$ не является достаточным для единственности решения задачи Коши. Например, при $n = 1$, $F = \sqrt{|x|}$ существуют и нулевое, и ненулевые решения с одинаковым начальным условием $x_0 = 0$.

Если же вместо одного момента времени $t = 0$ дополнительные условия (в количестве, равном размерности вектора $\mathbf{X}_0$) заданы в несколько моментов времени, то могут поменяться весьма существенно свойства задачи: существование и единственность решения, как и непрерывная его зависимость от исходных данных (форсинга и граничных условий).

В этой главе рассмотрены такие задачи. Основное внимание уделяется линейному дифференциальному уравнению второго порядка на отрезке $[a, b]$, когда одно граничное (краевое) условие задано при $t = a$, а второе — при $t = b$.

2.1. ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО СОГЛАСОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ И УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть два разных прибора измеряют положение $\widetilde{x}(t)$ автомобиля на прямолинейной дороге и его скорость $\widetilde{v}(t)$ при $t \in [a, b]$ (например, ГЛОНАСС и спидометр). Если показания приборов, как это обычно бывает, не вполне согласованы между собой из-за погрешностей измерений, то приближенное равенство

$$d_t\widetilde{x}(t) \approx \widetilde{v}(t)$$

выполняется лишь с некоторой погрешностью. Предположим, что у нас имеется априорное представление о точности обоих приборов. Тогда можно поставить *задачу вариационного согласования* показаний. Среди таких пар функций $\langle x(t), v(t)\rangle$, которые удовлетворяют точно соотношению

$$d_t x(t) = v(t), \tag{2.3}$$

нужно найти минимально отличающиеся от измерений:

$$\mathbf{I}[x(t), v(t)] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \alpha(t)\,[x(t) - \widetilde{x}(t)]^2 + \beta(t)\,[v(t) - \widetilde{v}(t)]^2\,dt \to \min_{x(t),\,v(t)}, \tag{2.4}$$

т.е. минимизировать функционал $\mathbf{I}[x(t), v(t)]$ при условии (2.3).

Поставленная задача — бесконечномерный аналог хорошо известного метода наименьших квадратов, предназначенного для поиска минимума положительно определенной квадратичной формы на заданном подпространстве конечномерного пространства (см., например, [Гельфанд, 1970]).

Здесь предполагается, что все известные функции, $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{v}(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, достаточно гладкие, а также что и решение вариационной задачи должно получиться гладким. Если функция $\widetilde{x}(t)$ терпит скачки, то будет терпеть скачки и 2-я производная решения. Если терпит скачок функция $\widetilde{v}(t)$, то будет терпеть скачки 1-я производная решения.

Положительные коэффициенты $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ (имеющие разную физическую размерность) описывают наше относительное доверие к показаниям приборов: чем больше доверие, тем больше вес. Разумеется, если умножить оба эти коэффициента на одинаковое число, решение задачи не изменится. Коэффициент $1/2$ в определении функционала использован для удобства дальнейших вычислений.

Задачу минимума функционала (2.4) при условии (2.3) можно заменить на задачу абсолютного (безусловного) минимума неотрицательного функционала

$$\mathbf{J}[x(t)] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \alpha(t)\,[x(t)-\widetilde{x}(t)]^2 + \beta(t)\,[d_t x - \widetilde{v}(t)]^2\;dt \to \min_{x(t)}. \tag{2.5}$$

К.1. Сформулируйте аналогичную задачу о наилучшем согласовании независимой информации о координате, скорости и ускорении. Все три веса доверия предполагаются известными.

Используем основную идею математического анализа (видимо, принадлежащую Кеплеру[6]): около минимума или максимума гладкой функции ее изменения имеют более высокий порядок малости, нежели изменения аргумента.

Пусть $x_*(t)$ искомая функция, на которой достигается минимум функционала (2.5). Прибавим к ней $\delta x(t)$ — функцию с малой нормой (здесь буква δ напоминает об этой малости). Здесь норма[7] понимается в смысле $\mathbf{C}^1$.

Оценим изменение значения функционала при малом изменении функции $x_*(t)$:

$$\mathbf{J}[x_*(t)+\delta x(t)] - \mathbf{J}[x_*(t)] =$$
$$= \int\limits_a^b \alpha(t)\left\{\delta x(t)\,[x_*(t)-\widetilde{x}(t)] + \frac{1}{2}\,(\delta x(t))^2\right\} +$$
$$+\,\beta(t)\left\{d_t(\delta x(t))\,[d_t x_* - \widetilde{v}(t)] + \frac{1}{2}\,(d_t\delta x(t))^2\right\}\,dt. \tag{2.6}$$

[6] Иоганн Кеплер (1570–1630).

[7] Напомним определение. Пусть L — линейное пространство. *Нормой* называется неотрицательная функция (обозначение $\|\mathbf{f}\|$, $\mathbf{f}\in L$), такая что а) $\|\mathbf{f}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} = \mathbf{0}$; б. $\|\lambda\mathbf{f}\| = |\lambda|\cdot\|\mathbf{f}\|$ для любого числа λ и любого $\mathbf{f}\in L$ (это свойство *нормы* называется *полулинейностью*); б) $\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\| \geqslant \|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|$ (это свойство называется *неравенством треугольника*). Нетрудно проверить, что в пространстве k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,\,b]$ формула $\|f(t)\|_k = \sum\limits_{j=0}^{k}\Big[\max\limits_{t\in[a,\,b]}|d_t^j f(t)|\Big]$ действительно задает норму.

Проинтегрируем в (2.6) по частям и перегруппируем слагаемые:

$$\mathbf{J}[x_*(t)+\delta x(t)]-\mathbf{J}[x_*(t)]=\delta\mathbf{J}[\delta x(t)]+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \alpha(\delta x)^2+\beta(t)(d_t\delta x)^2\,dt, \qquad (2.7)$$

где функционал $\delta\mathbf{J}[\delta x(t)]$ определяется формулой (проверьте, что он линеен по δx):

$$\int\limits_a^b \delta x(t)\left\{\alpha(t)\left(x_*(t)-\widetilde{x}(t)\right)-d_t\left[\beta(t)\left(d_t x_*(t)-\widetilde{v}(t)\right)\right]\right\}\,dt+$$

$$+\left\{\delta x(t)\left[\beta(t)\left(d_t x_*(t)-\widetilde{v}(t)\right)\right]\right\}\Big|_{t=a}^{t=b}. \qquad (2.8)$$

Функционал $\delta\mathbf{J}[\delta x(t)]$ называется *первой вариацией функционала* $\mathbf{J}$ от аргумента δx при фиксированной функции $x_*(t)$.

Значения первой вариации при малой норме возмущения δx имеют первый порядок малости, а второй интеграл в (2.7) — второго порядка малости. Его величина оценивается сверху величиной $|b-a|\Big[\max\limits_{t\in[a,\,b]}|\alpha(t)|\cdot||\delta x(t)||^2_{\mathbf{C}}+$ $+\max\limits_{t\in[a,\,b]}|\beta(t)|\cdot||d_t\delta x(t)||^2_{\mathbf{C}}\Big]$. Следовательно, существует константа K (укажите для нее явную формулу), гарантирующая оценку сверху квадратом нормы: $K\cdot||\delta x(t)||^2_{\mathbf{C}^1}$. Это величина второго порядка малости при $||\delta x(t)||^2_{\mathbf{C}^1}\to 0$.

Лемма. Необходимое условие минимума на функции $x_*(t)$ гладкого функционала $\mathbf{J}$ — тождественное (т.е. при всех функциях $\delta x(t)$) равенство нулю его первой вариации — линейного функционала $\delta\mathbf{J}[\delta x(t)]$, вычисленного в $x_*(t)$.

Действительно, если существует функция $\delta x(t)$, такая что $\delta\mathbf{J}[\delta x(t)]\neq 0$, то либо $\delta\mathbf{J}[\delta x(t)]<0$, либо $\delta\mathbf{J}[-\delta x(t)]<0$. Пусть, например, реализуется первый вариант.

Рассмотрим семейство функций $s\cdot\delta x(t)$, где $s\to+0$. Поскольку второе слагаемое в формуле (2.7) зависит от s квадратично, оно при достаточно малых s убывает быстрее, чем первая вариация (т.е. первая вариация будет «главнее» этого остатка, а значит, при достаточно малых s левая часть в (2.7) отрицательна, т.е. $x_*(t)$ — не минимум функционала $\mathbf{J}$ — в сколь угодно малой окрестности $x_*(t)$ существуют функции, на которых функционал $\mathbf{J}$ принимает меньшие значения.

К.2. Проведите доказательство леммы для случая $\delta\mathbf{J}[-\delta x(t)]<0$.

Ограничимся сначала возмущениями δx, обращающимися в нуль на краях отрезка. Тогда внеинтегральные слагаемые в (2.8) обращаются в нуль.

Лемма. Необходимое условие тождественного равенства нулю линейного функционала $\delta\mathbf{J}[\delta x(t)]$ — равенство нулю при всех t функции:

$$\alpha(t)\left(x_*(t)-\widetilde{x}(t)\right)-d_t\left[\beta(t)\left(d_t x_*(t)-\widetilde{v}(t)\right)\right]=0. \qquad (2.9)$$

Доказательство от противного. Если в точке $t_0 \in [a, b]$ равенство нарушено и левая часть (обозначим ее $f(t)$) равна числу $\mu > 0$, то из непрерывности всех входящих в него функций следует, что существует ϵ-окрестность t_0, в которой $f(t) > \mu/2$. Предположим, что эта окрестность целиком лежит на интервале (a, b).

Рассмотрим функцию (постройте ее график):

$$\delta x(t) = \begin{cases} (t - t_0 - \epsilon)^2 (t - t_0 + \epsilon)^2 & \text{при} \quad |t - t_0| \leqslant \epsilon, \\ 0 & \text{при} \quad |t - t_0| \geqslant \epsilon. \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда выполняются неравенства:

$$\delta \mathbf{J}[\delta x(t)] \geqslant \epsilon^5 \mu/2 > 0,$$

т.е. мы пришли к противоречию.

К.3. Докажите лемму в случаях, когда $\mu < 0$ или когда ϵ-окрестность точки t_0 не лежит целиком в интервале (a, b).

Равенство (2.9) выполняется при всех t, а значит, его можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка на функцию $x_*(t)$. Оно называется *уравнением Эйлера* [8] для функционала $\mathbf{J}$. Его решения $x_*(t)$ называются *экстремалями* (не путать с экстремумами).

До сих пор мы ограничивались рассмотрением вариаций $\delta x(t)$, обращающихся в нуль на краях отрезка. Предположим, что уравнение Эйлера выполнено, т.е. $x_*(t)$ — экстремаль задачи. Рассмотрим теперь такую функцию $\delta x(t)$, которая обращается в нуль только на правом краю отрезка. Интегральное слагаемое в (2.8) равно нулю, а внеинтегральное (при $t = a$) равно

$$\delta x(a) \cdot \beta(a) \cdot (d_t x_*(t) - \widetilde{v}(t)).$$

Поскольку первая вариация в точке минимума функционала $\mathbf{J}$ тождественно равна нулю, а $\delta x(a) \cdot \beta(a) \neq 0$, получаем отсюда граничное условие:

$$d_t x_*(a) = \widetilde{v}(a). \tag{2.11}$$

Граничное условие (2.11) на искомую экстремаль $x_*(t)$ называется *условием трансверсальности* для функционала $\mathbf{J}$.

Теорема. Вместе с аналогичным условием трансверсальности на правом краю:

$$d_t x_*(b) = \widetilde{v}(b) \tag{2.12}$$

условие (2.11) выделяет единственное решение дифференциального уравнения Эйлера (2.9), которое и реализует минимум функционала $\mathbf{J}[\delta x]$ среди всех гладких функций $x(t)$, т.е. наилучшее согласование данных о динамике координаты и скорости автомобиля.

[8] Леонард Эйлер (1707–1783).

K.4. Пусть $a = 0$, $b = 1$, $\alpha \equiv 2$, $\beta \equiv 3$. Пусть $\widetilde{x} = \sin(t)$, $\widetilde{v} = \cos(t)$. Проверьте, что функция $x_*(t) = \widetilde{x}(t)$ удовлетворяет и уравнению Эйлера, и условиям трансверсальности, а функционал $\mathbf{J}$ принимает на этой экстремали нулевое значение.

K.5. Пусть $a = 0$, $b = 1$, $\alpha \equiv \sin(\pi t)$, $\beta \equiv 3$. Пусть $\widetilde{x} = \sin(t)$, $\widetilde{v} = \cos(t)$. Проверьте, что функция $x_*(t) = \widetilde{x}(t)$ удовлетворяет и уравнению Эйлера (т.е. является экстремалью функционала), и условиям трансверсальности, а функционал $\mathbf{J}$ принимает на этой экстремали нулевое значение.

K.6. Остается ли верным утверждение теоремы, если $\alpha \equiv 0$, $\beta > 0$?

K.7. Получите уравнение Эйлера и граничные условия трансверсальности (по два на каждом краю отрезка) для задачи согласования информации о динамике координаты, скорости и ускорения автомобиля $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{v}(t)$, $\widetilde{a}(t)$, известных с положительными весами доверия $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$.

Предположим теперь, что нам дополнительно точно известно положение автомобиля в момент старта и финиша:

$$x(a) = A,\ x(b) = B,\ A,\ B \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Тогда вариация δx на краях отрезка равна нулю. Вывод граничных условий на производную (2.11, 2.12) оказывается неверен (почему?), а единственное решение уравнения Эйлера выделяется с помощью *граничных условий Дирихле*[9] (2.13). Другими словами, мы ищем минимум функционала $\mathbf{J}$ не среди всех гладких функций $x(t)$, а лишь среди тех, которые удовлетворяют условиям (2.13). Эти два условия в бесконечномерном пространстве гладких функций задают бесконечномерную плоскость.

K.8. Пусть в условиях **K.4** используются не граничные условия трансверсальности, а граничные условия Дирихле, причем в этих условиях Дирихле присутствует ошибка: $x(0) = p$, $x(1) = \sin(1) + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$. Постройте экстремаль, удовлетворяющую этим граничным условиям. Оцените величину рассогласованности — значения функционала $\mathbf{J}[x_*]$ в зависимости от параметров p, q. Постройте изолинии погрешности на плоскости параметров p, q.

K.9. Пусть в условиях **K.6** используются не граничные условия трансверсальности, а граничные условия Дирихле. Верно ли утверждение теоремы?

K.10. Пусть в условиях **K.9** весовая функция α — маленькая отрицательная константа. При каких значениях α/β утверждение теоремы остается верным?

K.11. Пусть $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $\beta(x) = c(x - a)$, $c > 0$, т.е. коэффициент при старшей производной в уравнении (2.9) обращается в нуль на левом краю отрезка. Используя метод Фробениуса[10] для дифференциального уравнения с особенностью в точке $x = a$ (см. разд. 26.2 из [Гордин, 2016]), постройте решение ограниченного решения уравнения Эйлера (2.9) в виде ряда по целым степеням $(x - a)$ (предполагается, что функции $\widetilde{x}$ и $\widetilde{v}$ также представимы в виде таких рядов).

[9] Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859).

[10] Фердинанд Георг Фробениус (1849–1917).

Замечание А. Поскольку в ОДУ из **К.11** у определяющего уравнения корень $\rho = 0$ имеет кратность 2, одно решение однородного уравнения может быть представлено в виде ряда Тейлора [11] (это так называемая специальная *функция Похгаммера* [12] или *вырожденная гипергеометрическая функция)*, а другое содержит логарифмическую особенность. Поэтому вместо граничного условия трансверсальности на левом краю отрезка нужно ставить условие ограниченности решения. Константа α/c входит в функцию Похгаммера как параметр.

Рассмотрим случай, когда значение экстремали задано не на краях, а в какой-то промежуточной точке $x(c) = C$, $c \in (a, b)$. Тогда на краях отрезка получаем граничные условия трансверсальности. Но задача согласования информации распадается на две: для левого и правого полуотрезков они решаются независимо, а условие, заданное в точке c, используется для обеих. Поэтому общее решение будет непрерывно в точке c, но гладкость экстремали в этой точке, как правило, отсутствует.

К.12. Приведите примеры, подверждающие это утверждение. Постройте график экстремали с изломом в точке c.

Описанный здесь метод вариационного согласования разнородной информации может быть использован для ее автоматического контроля. Предположим, что нужно обработать большой архив парных данных о координатах и скоростях автомобилей. Конечно, можно построить графики пары измеренных функций $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{v}(t)$ и постараться их сопоставить «на глазок». Но можно доверить это компьютеру: для каждой пары определяем экстремали, удовлетворяющие условиям трансверсальности (т.е. решаем задачу вариационного согласования информации). Для каждой найденной экстремали вычислим минимальное значение функционала $\mathbf{J}[x_*(t)]$. Если на какой-то паре отношение $\mathbf{J}[x_*(t)]/(b-a)$ заметно превосходит большинство остальных, то, вероятно, в этой паре содержатся ошибки, возникшие при измерениях или при передаче информации. Разумеется, нужен материал обучения, чтобы конкретизировать, что такое «заметно большие значения».

Замечание Б. Обычно информация об измерениях относится не ко всему отрезку $t \in [a, b]$, а к дискретному набору моментов времени $\{t_j\}_{j=0}^N$. Вместо оператора дифференцирования d_t можно, например, использовать формулу центральных разностей во внутренних точках $j \neq 1$, N, а в крайних — формулу направленных разностей. Вместо интеграла воспользуемся суммой. Рассматривая максимумы функций $|x_*(t) - \widetilde{x}(t)|$ и $|d_t x_*(t) - \widetilde{v}(t)|$, можно локализовать момент, когда допущена ошибка в исходных данных.

К.13. Пусть $\widetilde{x} = \sin(t)$, $\widetilde{v} = \cos(t)$, а узлы сетки $\{t_j\}_{j=0}^N$ расположены на отрезке $[0, 2\pi]$ равномерно с шагом $h = 2\pi/N$. Как зависит значение функционала $\mathbf{J}$ (его аргумент — пара векторов размерности $N+1$) от числа N?

[11] Брук Тейлор (1685–1731).

[12] Лео Август Похгаммер (1841–1920).

К.14. Пусть на компоненты векторов $\widetilde{x} = \sin(t)$, $\widetilde{v} = \cos(t)$ при $N = 20$ наложен случайный шум с амплитудой A. С помощью компьютерного эксперимента оцените, как зависит значение функционала $\mathbf{J}$ от A? Для ответа на вопрос постройте график этой зависимости в билогарифмической системе координат $\langle \ln(A),\ \ln \mathbf{J} \rangle$.

Результаты получаются точнее, если оператор дифференцирования аппроксимировать не по формуле центральных разностей, а с помощью кубических сплайнов (см. прил. 4) или формулы компактного дифференцирования (см. разд. 7.2).

К.15. Получите оценки **К.13, 14** для этих конечномерных аппроксимаций оператора дифференцирования в функционале $\mathbf{J}$.

Рассмотрим аналогичный пример вариационного согласования информации о функции и ее производной из метеорологии [Гордин, 1987б]. Пусть заданы (получены из наблюдений двумя приборами одного метеорологического зонда) две функции давления, которое здесь используется в качестве вертикальной координаты: высота (геопотенциал) соответствующей точки и ее температура, $\widetilde{H}(p)$, $\widetilde{T}(p)$, входящие в *уравнение гидростатики*:

$$\frac{dH}{d\ln p} = -\gamma T, \quad \gamma = \frac{R_{\text{уд}}}{g}, \tag{2.14}$$

где $R_{\text{уд}}$ — удельная газовая постоянная, которую для сухого [13] воздуха тропосферы и стратосферы Земли можно принять равной 289,7 дж/(кг·град), g — ускорение свободного падения.

Уравнение (2.14) получается из уравнения Клапейрона [14] для совершенного газа: и из уравнения гидростатики в z-системе координат:

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho, \tag{2.15}$$

которое, в свою очередь, получается из уравнения газовой динамики для вертикальной компоненты скорости [Гордин, 1987а; Гордин, 1987б; Гордин, 2010].

Замечание В. Уравнение (2.15) получается, если пренебречь вертикальным ускорением в уравнении газовой динамики (см., например, [Гордин, 1987б]). Из (2.15) следует известный *закон Архимеда* [15] [Гордин, 2016]. При движении самолета или судна на подводных крыльях вертикальные ускорения в окрестности крыла велики, и закон Архимеда (в отличие от исходных уравнений газовой динамики) там сильно нарушается.

[13] Для учета вклада водяного пара, имеющего другую удельную газовую постоянную, вместо обычной *температуры* вводится так называемая *виртуальная* температура, которую имел бы сухой воздух с той же плотностью и при том же давлении: $T_v = T(1 + 0{,}608s)$, где s — удельная влажность воздуха. Виртуальная температура отличается от обычной на величины порядка 1°С.

[14] Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (1799–1864).

[15] Архимед Сиракузский (287–212 до н.э.).

Чтобы согласовать показания приборов, измеряющих при произвольном давлении p геопотенциал и температуру, введем две положительные функции $\alpha(p)$, $\beta(p)$, которые характеризуют относительное «доверие» к измерениям геопотенциала и температуры при разных значениях независимого переменного — давления $\ln p$.

Требуется найти на отрезке $[P_1, P_2]$ новые функции $H(p)$, $T(p)$, которые удовлетворяют уравнению гидростатики (2.14) и минимизируют функционал

$$\mathbf{I}[H, T] = \frac{1}{2} \int\limits_{\ln P_1}^{\ln P_2} \Big\{ \alpha(p) \cdot \big[\widetilde{H}(p) - H(p)\big]^2 + \\ + \beta(p) \cdot \big[\widetilde{T}(p) - T(p)\big]^2 \Big\} \, d \ln p \to \min_{H,T}. \tag{2.16}$$

Можно упростить задачу, подставив в интегральный функционал функцию T из уравнения (2.14):

$$\mathbf{J}[H] = \frac{1}{2} \int\limits_{\ln P_1}^{\ln P_2} \Big\{ \alpha(p) \cdot \big[\widetilde{H}(p) - H(p)\big]^2 + \\ + \beta(p) \cdot \big[\widetilde{T}(p) + A d_{\ln p} H\big]^2 \Big\} \, d \ln p \to \min_{H}, \tag{2.17}$$

где $A = \dfrac{g}{R_{\text{уд}}}$.

Теперь минимизация проводится только по одной неизвестной функции $H(p)$ без дополнительных условий — в таких случаях говорят, что разыскивается *абсолютный минимум* функционала $\mathbf{J}[H]$.

К.16. Докажите, что уравнение Эйлера при $p \in (P_1, P_2)$ для задачи вариационного согласования геопотенциала и температуры (2.16) имеет вид

$$\alpha(p) \left[H(p) - \widetilde{H}(p)\right] - d_{\ln p} \left\{ A \, \beta(p) \left[\widetilde{T}(p) + A d_{\ln p} H\right] \right\} = 0. \tag{2.18}$$

К.17. Получите условия трансверсальности для задачи согласования информации о геопотенциале и температуре, полученных в вертикальном столбе воздуха.

Уравнение гидростатики (2.14) выполняется лишь приближенно. Например, оно может нарушаться из-за того, что метеорологический зонд поднимается не вертикально вверх, а его (одновременно с подъемом архимедовой силой) сносит ветром по горизонтали, а значения давления на одинаковой высоте над различными точками земной поверхности могут различаться, можно изменить саму постановку задачи вариационного согласования и искать абсолютный минимум другого квадратичного функционала, зависящего от двух независимых функций: $H(p)$ и $T(p)$. Вес доверия к выполнению соотношения (2.14) обозначим $\gamma(p)$.

Будем минимизировать функционал

$$\mathbf{I}[H,\,T] = \frac{1}{2}\int\limits_{\ln P_1}^{\ln P_2} \Big\{\alpha(p)\cdot\big[\widetilde{H}(p) - H(p)\big]^2 +$$

$$+\,\beta(p)\cdot\big[\widetilde{T}(p) - T(p)\big]^2 + \gamma(p)\cdot\big[T(p) + Ad_{\ln p}H\big]^2\Big\}\,d\ln p \to \min_{H,\,T}. \qquad (2.19)$$

Для этого будем независимо давать функционалу приращение $H \to H + \delta H$ и приращение $T \to T + \delta T$. В первом случае нужно использовать интегрирование по частям, а во втором — нет. Получим, соответственно, дифференциальные уравнения:

$$\alpha(p)\left[H(p) - \widetilde{H}(p)\right] - Ad_{\ln p}\left\{\gamma(p)\left[T(p) + Ad_{\ln p}H\right]\right\} = 0 \qquad (2.20)$$

и

$$\beta(p)\left[T(p) - \widetilde{T}(p)\right] + \gamma(p)\cdot\left[T(p) + Ad_{\ln p}H\right] = 0. \qquad (2.21)$$

К.18. Докажите это утверждение.

Порядок уравнения (2.20) можно понизить, подставив в него (2.21):

$$\alpha(p)\left[H(p) - \widetilde{H}(p)\right] + Ad_{\ln p}\left\{\beta(p)\left[T(p) - \widetilde{T}(p)\right]\right\} = 0. \qquad (2.22)$$

Систему двух линейных неоднородных ОДУ первого порядка (2.21, 2.22) по независимой переменной $\ln p$ можно сначала разрешить относительно производных.

К.19. Пусть α, β, $\gamma = \mathrm{const}$ и коэффициенты системы ОДУ (2.21, 2.22) постоянны. Определите характеристический многочлен этой системы.

К.20. Докажите, что при варьировании функционала $\mathbf{I}$ по H получаются два граничных условия трансверсальности:

$$Ad_{\ln p}H = -T(p) \quad \text{при } p = P_1,\ P_2, \qquad (2.23)$$

а при варьировании по T никаких граничных условий не возникает.

К.21. Пусть α, β, $\gamma = \mathrm{const}$. Верно ли, что при любых данных измерений $\widetilde{H}$, $\widetilde{T}$ решение краевой задачи (2.21, 2.22, 2.23) существует и единственно.

К.22. Как изменятся уравнение Эйлера и условия трансверсальности, если в интегралах (2.16, 2.17, 2.19) интегрировать не по переменной $d\ln p$, а по dp?

2.2. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ И УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ)

Закон сохранения вещества для системы, состоящей, скажем, из пяти камней, прост: число камней и масса каждого из них не меняются со временем. Этим о задаче сказано все. Пастух, отправившийся на пастбище

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru