Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Динамика и устойчивость сооружений — специальные разделы курса строительной механики, использующие ее принципы и методы расчета.

Динамическими принято называть нагрузки, действующие на сооружение, величина, направление и положение которых меняются в течение короткого промежутка времени.

При этом динамические нагрузки сообщают массам сооружения ускорения, в результате чего появляются дополнительные силы — силы инерции, сопровождающиеся возникновением колебаний этого сооружения.

Задачей динамического расчета сооружения является определение закона движения масс деформирующейся системы и величины инерционных сил, что в результате позволяет провести проверку системы на резонанс и дать оценку прочности и жесткости рассчитываемого сооружения.

По мере совершенствования методов расчета на прочность при проектировании конструкций они становились все более легкими и гибкими. При этом на первый план вышла необходимость их проверки на устойчивость. Постановка проблемы и первое решение задачи устойчивости тонкого сжатого стержня принадлежат Л. Эйлеру и датированы 1757 годом. Следует заметить, что в то время основными конструкционными материалами были дерево и камень. Особенности физико-механических свойств этих материалов явились причиной создания массивных конструктивных элементов, для которых вопрос упругой устойчивости не имел принципиального значения. Поэтому теоретическое решение Эйлера в отношении устойчивости гибких стержней долго оставалось невостребованным. Только с момента проектирования и строительства стальных мостов в начале XX века расчеты на устойчивость приобрели актуальность и стали широко применяться на практике. В разработку практических методов расчета на устойчивость существенный вклад внесли Ф. Энгессер, Ф.С. Ясинский, С.П. Тимошенко, Н.В. Корноухов и др.

Современный инженер должен уметь использовать на практике принципы и методы расчета на прочность и устойчивость при проведении расчетов сооружений на воздействие статических и динамических нагрузок.

1. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1.1. Общие сведения о динамических расчетах конструкций

1.1.1. Основные виды динамических воздействий

Задачей динамики сооружений является разработка принципов и методов расчета сооружений на действие динамических нагрузок. Особенностью воздействия динамических нагрузок является возникновение колебаний, и это становится причиной возникновения сил инерции, действующих на сооружение со стороны движущихся масс системы. При периодическом повторении динамических воздействий в определенных условиях происходит накопление энергии системы, выражающееся в постепенном увеличении размаха колебаний, а вместе с ним и интенсивности инерционных сил до очень больших значений. Подобное явление, называемое резонансом, особенно опасно для разного рода сооружений тем, что потеря ими эксплуатационных свойств, а порой и разрушение может произойти при малых величинах динамических воздействий.

Целью динамического расчета является не только определение т.н. динамической прочности сооружений, но также и динамических перемещений, ускорений и скоростей, которые при воздействии на людей и точные приборы не должны превышать определенных пределов.

В процессе эксплуатации сооружения подвергаются различного рода динамическим воздействиям, которые можно подразделить на следующие основные виды:

а) **вибрационная нагрузка** — периодические вибрационные воздействия от движения неуравновешенных частей машин и механизмов, в частности, электромоторов, ткацких станков и др.

Из всех периодических нагрузок весьма характерен случай, когда воздействия изменяются во времени, подчиняясь гармоникам синуса. Такая нагрузка и называется гармонической. Она появляется при наличии эксцентриситета вращающегося якоря электромотора (рис. 1.1). При равномерном вращении с постоянной угловой скоростью α появляется центробежная сила *P*. Если ее разложить на составляющие, получается, что на систему воздействуют две периодические силы (рис. 1.1):

$$P_x = P\cos\alpha t;\ P_y = P\sin\alpha t.$$

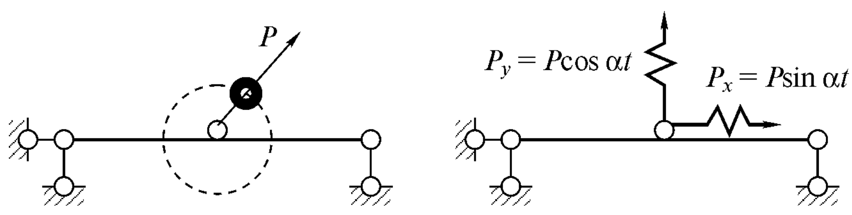


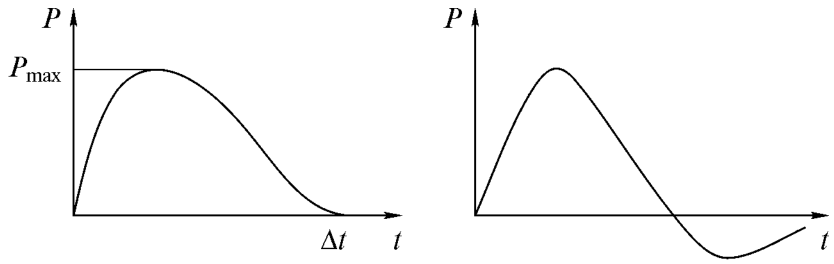
Рис. 1.1. Вращающийся якорь электромотора

Нагрузки этого вида почти не зависят от свойств конструкций, на которые они действуют, но являются основным источником их колебаний;

б) **ударная нагрузка**, создаваемая падающими частями механизмов (молотов, копров и др.). Эти нагрузки характеризуются небольшой продолжительностью действия (рис. 1.2, *а*). Максимальная величина нагрузки и время ее действия зависят от упругих и инерционных свойств конструкций, воспринимающих удар;

в) **подвижная нагрузка**, положение которой изменяется во времени, например, нагрузка от движения железнодорожного состава, мостовых кранов и т.п.;

г) **импульсное воздействие**: взрыв, волновая нагрузка, вызывающие резкое изменение давления (рис. 1.2, *б*) по поверхности сооружения;



а *б*

Рис. 1.2. Нагрузки:
а — ударная; *б* — подвижная

д) **сейсмические воздействия** на здания и сооружения, вызываемые землетрясением, являющиеся причиной возникновения перемещений основания, изменяющиеся во времени по сложному закону — сейсмограмме (рис. 1.3) и, как следствие, вызывающие колебания сооружения. Параметры сейсмического воздействия невозможно точно задать заранее.

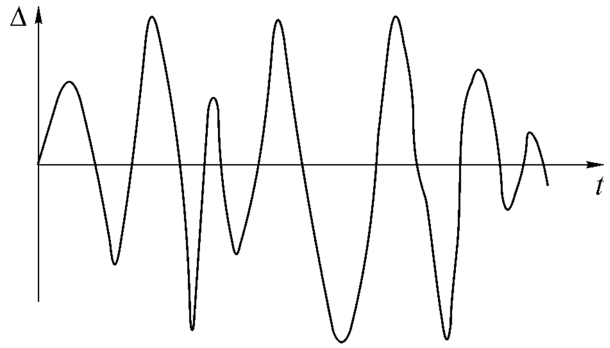


Рис. 1.3. Сейсмограмма

Такие воздействия рассматриваются как случайные величины или случайные функции, и расчет на их воздействие производится с привлечением не только методов динамики сооружений, но также и методов теории вероятности. Такие воздействия называют недетерминированными (неопределенными), а соответствующие им расчеты — вероятностными;

е) **ветровая нагрузка**.

1.1.2. Степень свободы в динамике сооружений

Наименьшее количество независимых геометрических параметров, определяющих положение колеблющихся масс в любой момент времени, называется числом степеней свободы этой системы. Число степеней свободы удобно определять как число связей, которые надо наложить на систему, чтобы массы остались в покое. Подсчет степеней свободы при кинематическом анализе в статике сооружений производится без учета деформаций стержней, которые считаются абсолютно жесткими. В динамике же сооружений при определении степени свободы системы рассматриваются именно упругие деформации ее элементов.

Число степеней свободы зависит от вида расчетной модели, при помощи которой аппроксимируется реальная конструкция. Для упрощения расчетов часто принимается, что стержень не имеет массы, которая сосредоточена в одной или нескольких точках.

Так, например, невесомая балка (рис. 1.4, *а*) с одной точечной массой имеет одну степень свободы, так как положение этой массы определяется только одним параметром y. Напомним, что при этом считается, что стержень нерастяжим и несжимаем, а посему масса не имеет возможности перемещаться по горизонтали. Если учесть не только деформации от изгиба, но и продольные, то балка будет иметь две степени свободы. Масса сможет перемещаться и по горизонтали, и по вертикали (рис. 1.4, *б*). Если массу рассматривать не как точечную, то необходимо учитывать инерцию ее вращения, и тогда число степеней свободы будет равно трем, так как положение массы в этом случае определяется уже не только горизонтальными и вертикальными перемещениями, но и углом ее поворота.

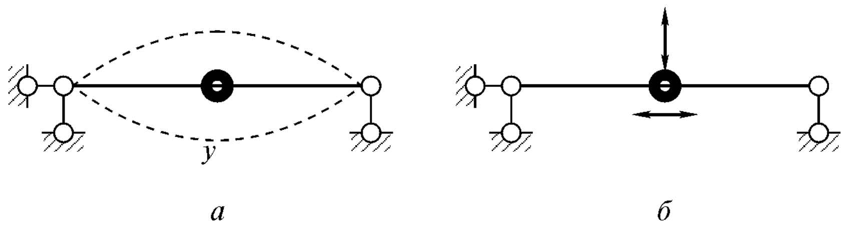


Рис. 1.4. Невесомая балка:
а — с одной точечной массой; *б* — с одной степенью свободы

Рама, показанная на рис. 1.5, с двумя сосредоточенными массами имеет три степени свободы, так как расположение первой массы характеризуется только ее вертикальным перемещением, а расположение второй — двумя ее перемещениями: горизонтальным и вертикальным.

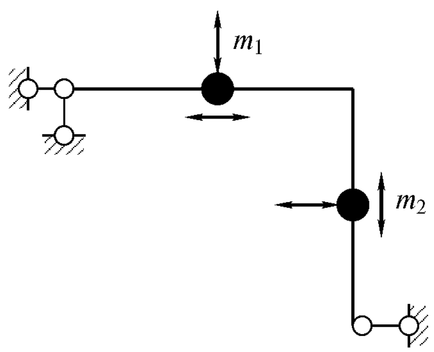


Рис. 1.5. Рама с двумя сосредоточенными массами

Для того, чтобы определить положение всех точек стержня, имеющего распределенную массу, необходимо задание бесконечно большого числа перемещений. Поэтому такие элементы рассматриваются как системы с бесконечным числом степеней свободы.

1.1.3. Способы решения задач динамики сооружений

Статический способ основан на применении уравнений динамического равновесия, которые, в отличие от уравнений статического равновесия, учитывают возникающие при колебаниях силы инерции, равные произведению массы на ускорение.

Энергетический способ основан на применении закона сохранения энергии М.В. Ломоносова, согласно которому сумма потенциальной и кинетической энергии упругой системы при колебаниях остается постоянной величиной в любой момент времени.

1.2. Свободные колебания системы без учета затухания

1.2.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без учета затухания

Рассмотрим систему с одной степенью свободы в виде невесомой балки, несущей точечную массу (рис. 1.6). Под действием силы веса, равного произведению массы на величину ускорения свободного падения *mg*, точка ее приложения переместится вниз на величину т.н. «**статического прогиба**» $Y_{\text{ст}}$. Упругая линия балки от статического действия ее веса изображена пунктирной линией. Она уравновешивается начальной силой реакции системы, поэтому ее можно исключить из рассмотрения. Если эту балку в результате некоторого внешнего воздействия вывести из состояния равновесия, то после его прекращения система начнет совершать колебания около своего положения статического равновесия. Подобные колебания в динамике сооружений называют **свободными**.

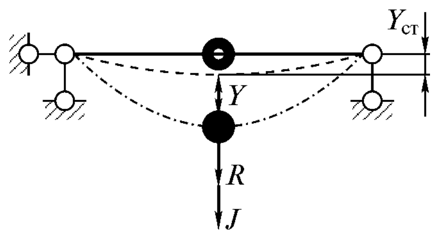


Рис. 1.6. Невесомая балка с одной точечной массой

Для составления уравнения движения воспользуемся принципом Даламбера. При свободных колебаниях балки на массу, отклонившуюся от положения статического равновесия на величину Y, будет действовать восстанавливающая сила R и сила инерции J.

Рассмотрим каждую из этих сил, считая положительными силы и перемещения, направленные вниз.

Восстанавливающая сила R — это реакция системы, возникающая при отклонении массы от положения статического равновесия, стремящаяся вернуть массу в положение первоначального равновесия. Эта реактивная сила направлена в сторону, противоположную перемещению, и поэтому будет отрицательной и равной произведению величине отклонения Y точки, в которой сосредоточена масса, на жесткость системы:

$$R = -ry.$$

Для определения жесткости системы необходимо определить реакцию балки в рассматриваемой точке при перемещении этой точки, равным единице (рис. 1.7, *а*). Иногда удобнее пользоваться податливостью системы $\delta = 1/r$.

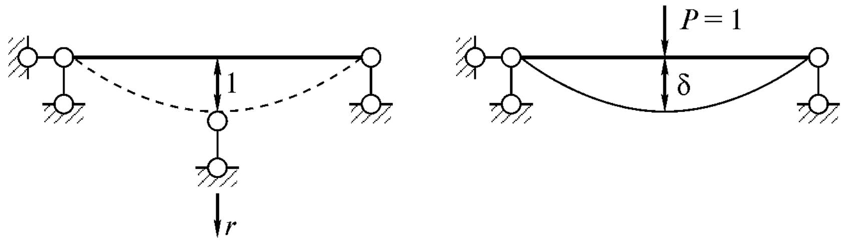


Рис. 1.7. Определение жесткости системы методом:
а — сил; *б* — перемещений

Для определения податливости необходимо вначале рассчитать систему (рис. 1.7, *б*) на действие единичной силы, приложенной по направлению колебаний массы. Затем по обычным правилам определения перемещений с помощью формулы Мора могут быть вычислены значения δ, и $r = 1/\delta$.

Сила инерции J равна произведению массы m на ее ускорение и направлена в сторону, противоположную перемещению:

$$J = -m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Уравнение динамического равновесия всех сил, действующих на массу, в проекции на ось y выглядит так:

$$R + J = 0.$$

Подставляя вместо сил R и J их выражения, получим:

$$-m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - ry = 0.$$

Разделив полученное выражение на массу m и поменяв при этом знак, получаем обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \tag{1.1}$$

Здесь

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta m}}. \tag{1.2}$$

Характеристическое уравнение в этом случае выглядит так: $k^2 + \omega^2 = 0$. Два корня этого уравнения $k_1 = i\omega$ и $k_2 = -i\omega$ определяют общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{1.3}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий при $t = 0$:

$$y = y_0,\ dy/dt = v_0.$$

Из этих условий найдем, что $C_1 = y_0$ и $C_2 = v_0/\omega$. Тогда решение для свободных колебаний можно записать так:

$$y = y_0 \cos \omega t + v_0/\omega \sin \omega t.$$

Положим, что

$$y_0 = A \sin \varphi_0; \tag{1.4}$$

$$v_0/\omega = A \cos \varphi_0, \tag{1.5}$$

где A и φ_0 — новые постоянные.

Тогда

$$y = A(\sin \varphi_0 \cos \omega t + \cos \varphi_0 \sin \omega t).$$

Применив формулу для синуса суммы двух углов, решению можно придать такой вид:

$$y = A \sin (\omega t + \varphi_0). \tag{1.6}$$

Для определения постоянной A возведем в квадрат формулы (1.4), (1.5) и сложим их:

$$(y_0)^2 + (v_0/\omega)^2 = A^2(\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0).$$

Откуда

$$A = \sqrt{y_0^2 + (v_0 / \omega)^2}. \tag{1.7}$$

Разделив равенство (1.4) на (1.5) получим выражение для φ_0:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(y_0\omega/v_0).$$

На графике (рис. 1.8) видны основные элементы гармонических свободных колебаний, описываемых равенством (1.6).

Величина A, наибольшее отклонение от положения равновесия, называется **амплитудой колебаний**. Величина φ_0, характеризующая отклонение точечной массы в начальный момент времени, называется **начальной фазой свободных колебаний**.

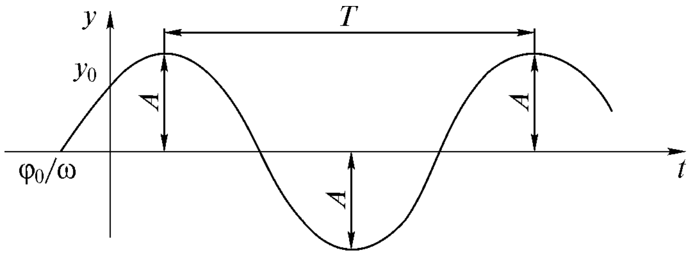


Рис. 1.8. График свободных незатухающих гармонических колебаний

Продолжительность полного цикла колебаний называют **периодом колебаний**, определяемым формулой

$$T = 2\pi/\omega.$$

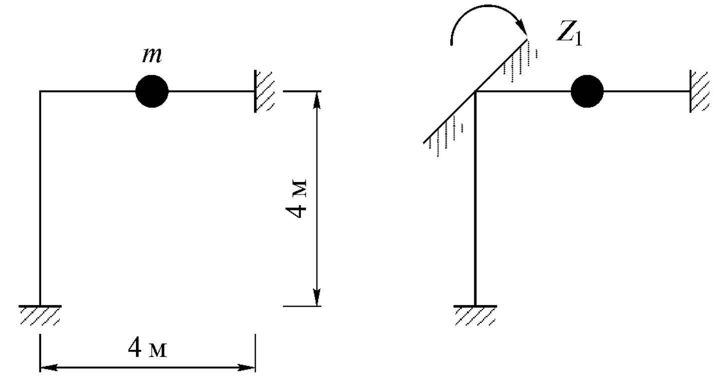
Величина, обратная периоду колебаний, называется **частотой колебаний**. Она выражается в герцах и равняется числу полных циклов колебаний за 1 секунду.

$$n = 1/T = \omega/2\pi.$$

Под ω понимают т.н. **круговую частоту** колебаний, которая определяется по формуле (2.2) и равняется числу полных циклов колебаний за период времени, равный 2π секунд.

Пример 1.1. Требуется определить круговую частоту колебаний массы m, закрепленной на середине ригеля (рис. 1.9, *а*). Собственный вес не учитывается.

Для нахождения круговой частоты собственных колебаний по формуле (2.2) необходимо определить податливость системы в месте расположения массы. Для этого надо построить эпюру от единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке крепления массы по направлению возможного перемещения. Заданная рама статически неопределима, и для построения эпюры изгибающих моментов от действия единичной силы проще всего применить метод перемещений. Система имеет один жесткий узел, в который введем заделку, препятствующую возможному угловому смещению, которое обозначим Z_1 (рис. 1.9, *б*).



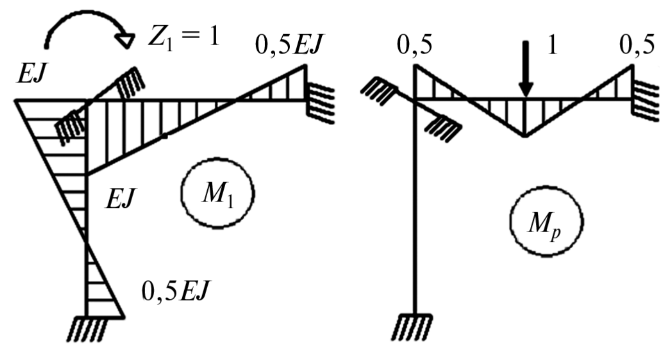
а *б*

Рис. 1.9. Схема:
а — исходная стержневая система; *б* — основная система метода перемещений

Каноническое уравнение метода перемещений запишется в виде

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0.$$

Единичная эпюра показана на рис. 1.10, *а*. Грузовая эпюра моментов — на рис. 1.10, *б*.



а *б*

Рис. 1.10. Эпюры моментов:
а — единичная; *б* — грузовая

Для определения коэффициента r_{11} и свободного члена R_{1p} — реактивных моментов в наложенной связи — вырежем узел и рассмотрим его равновесие. На рисунке 1.11, *а* показан узел, вырезанный с единичной эпюры, с учетом действующих на него моментов со стороны отброшенных частей рамы и реактивным моментом в защемлении. Из равновесия узла находим: $r_{11} = 2EJ$.

Аналогично вырезаем узел из грузовой эпюры; из его равновесия найдем реактивный момент $R_{1p} = -0{,}5$ кН · м (рис. 1.11, *б*). Решая каноническое уравнение метода перемещений, найдем неизвестное:

$$Z_1 = -(-0{,}5)/2EJ = 0{,}25/EJ.$$

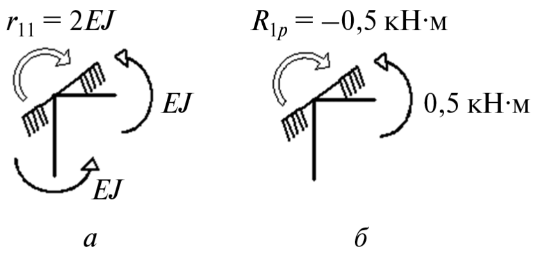


Рис. 1.11. Равновесие узла:
а — для определения r_{11}; *б* — для определения R_{1p}

Окончательная эпюра изгибающих моментов, построенная по формуле: $M_p = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_p$, представлена на рисунке 1.12, *а*. Необходимой и достаточной проверкой правильности построенной эпюры является равновесие жесткого узла.

Так как заданная система статически неопределимая, то для упрощения расчетов необходимо построить еще одну эпюру изгибающих моментов от единичной сосредоточенной силы в любой основной системе метода сил. Заданная система три раза статически неопределима, и для получения статически определимой системы проще всего отбросить заделку снизу. В этом случае эпюра будет только на ригеле (рис. 1.12, *б*).

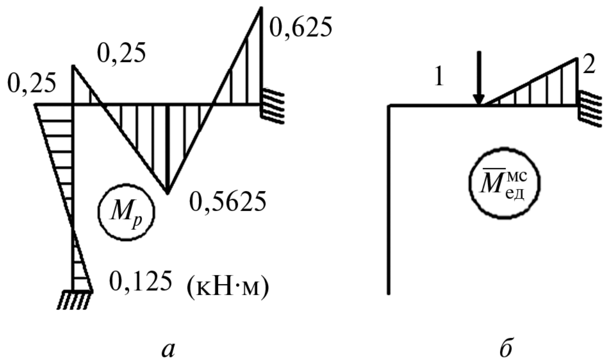


Рис. 1.12. Эпюры моментов:
а — окончательная; *б* — единичная в простейшей основной системе метода сил

Коэффициент податливости δ системы определяется по формуле Мора:

$$\delta = \sum \int \frac{\overline{M_p^2} ds}{EJ} = \sum \int \frac{\overline{M_p M_{\text{ед}}^{\text{мс}}} ds}{EJ} = \frac{2}{6EJ}(2 \cdot 2 \cdot 0,625 - 0,5625 \cdot 2) = \frac{0,4583}{EJ}.$$

По формуле (2.2) найдем частоту собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta m}} = \sqrt{\frac{EJ}{0,45833 \cdot m}} = 1,447\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

1.2.2. Свободные колебания системы с конечным числом степеней свободы

Свободные колебания системы с конечным числом степеней свободы рассмотрим на примере невесомой балки с двумя точечными массами (рис. 1.13). Составим уравнения движения для этой дискретной системы, совершающей свободные колебания. Предположим, что массы получили некоторые начальные скорости и перемещения, после чего балка начала совершать свободные колебания, характеризуемые независимыми перемещениями масс y_1 и y_2.

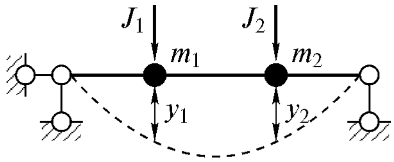


Рис. 1.13. Балка с двумя сосредоточенными массами

При колебаниях на систему будут действовать инерционные силы J_1 и J_2, приложенные к каждой массе по направлению их возможных перемещений: $J_1 = -m_1 \cdot \dfrac{d^2 y_1}{dt^2}$; $J_2 = -m_2 \cdot \dfrac{d^2 y_2}{dt^2}$. Перемещение первой массы y_1 может быть получено, используя принцип независимости действия сил:

$$y_1 = \delta_{11} J_1 + \delta_{12} J_2 = -\delta_{11} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \delta_{12} m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}.$$

Перемещения δ_{11} и δ_{12} вычисляются от единичных сил, приложенных в точках расположения точечных масс. Аналогично определяется перемещение второй массы:

$$y_2 = \delta_{21} J_1 + \delta_{22} J_2 = -\delta_{21} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \delta_{22} m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}.$$

Полученные уравнения являются однородными дифференциальными уравнениями, описывающими свободные колебания системы с двумя степенями свободы. Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений можно искать в виде:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь A_1 и A_2 — амплитуды колебаний соответствующих масс, ω — частота собственных колебаний, φ_0 — начальная фаза колебаний.

Подставляя это решение в систему дифференциальных уравнений и сократив на $\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$, получим:

$$(\delta_{11} m_1 - 1/\omega^2) A_1 + \delta_{12} m_2 A_2 = 0,$$

$$\delta_{21} m_1 A_1 + (\delta_{22} m_2 - 1/\omega^2) A_2 = 0. \qquad (1.8)$$

Тривиальное решение системы уравнений (1.8) заключается в равенстве нулю амплитуд колебаний $A_1 = A_2 = 0$, что приводит к отсутствию колебаний.

Для того, чтобы однородная система линейных уравнений имела нетривиальное, т.е. ненулевое решение, необходимо, чтобы детерминант системы (1.8) был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 - 1/\omega^2 & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 - 1/\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.9)$$

Полученный определитель носит название **характеристического**, или же **векового уравнения**. Последнее название возникло в связи с задачами небесной механики о периодических отклонениях планет от своих орбит.

Раскрыв определитель (1.9), получим алгебраическое уравнение второго порядка относительно $1/\omega^2$. Оба корня этого уравнения должны быть положительными и не равными нулю, а сами частоты — действительными. Совокупность частот колебаний системы называется ее **спектром частот**. Наименьшая частота называется **основной**, или **обертоном**.

Свободные периодические колебания, совершаемые по гармоническому закону (т.е. синусоидально) с одной частотой, называются **собственными**, а формы, им соответствующие, — **собственными**, или **главными**.

Каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма свободных колебаний, для определения которой надо подставить найденную частоту собственных колебаний в систему (1.8). Так как эта система однородная, то из нее можно найти лишь соотношение между амплитудами колебания масс. Из двух уравнений системы можно использовать любое. Обычно одну из амплитуд приравнивают к единице.

В общем случае для системы с n степенями свободы получаем систему n уравнений (1.8) и, соответственно, определитель n степени, из которого получаем n частот собственных колебаний. Для определения форм колебаний используют любые $(n-1)$ уравнений системы (1.8).

Формы собственных колебаний обладают свойством ортогональности:

$$\sum_{(i=1)}^{n} m_1 A_1^k A_1^l = 0. \tag{1.10}$$

Для доказательства возьмем две формы колебаний с частотами ω_k и ω_l (рис. 1.14, *а*, *б*).

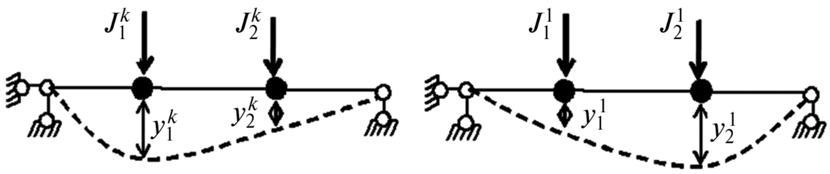


Рис. 1.14. Формы колебаний для частот:
а — катой; *б* — первой

Составим условие взаимности возможных работ для этих двух состояний: $A_{k1} = A_{1k}$:

$$J_1^k y_1^l + J_2^k y_2^l = J_1^l y_1^k + J_2^l y_2^k. \tag{1.11}$$

Учитывая, что:

$$y_1^k = A_1^k \sin(\omega_k t + \varphi_0);\ y_2^k = A_2^k \sin(\omega_k t + \varphi_0);$$

$$y_1^l = A_1^l \sin(\omega_l t + \varphi_0);\ y_2^l = A_2^l \sin(\omega_l t + \varphi_0).$$

Соответствующие инерционные силы будут равны:

$$J_1^k = -m_1 \frac{d^2 y_1^k}{dt^2} = m_1 A_1^k \omega_k^2 \sin(\omega_k t + \varphi_0);\ J_2^k = -m_2 \frac{d^2 y_1^k}{dt^2} = m_2 A_2^k \omega_k^2 \sin(\omega_k t + \varphi_0);$$

$$J_1^l = -m_1 \frac{d^2 y_1^l}{dt^2} = m_1 A_1^l \omega_l^2 \sin(\omega_l t + \varphi_0);\ J_2^l = -m_2 \frac{d^2 y_1^l}{dt^2} = m_2 A_2^l \omega_k^2 \sin(\omega_l t + \varphi_0).$$