ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги — сделать доступной для студентов, инженеров и прикладных физиков работу по изучению движения жидкости, которая будет пригодна в качестве подготовки решения задачи. Выбор предмета не был продиктован какой-то узкой областью инженерных задач, а включает в себя темы, представляющие интерес для авиационных инженеров, механиков, инженеров-химиков, применяемые в прикладной механике и физике.

При выборе материала из обширной литературы была поставлена основная цель — сделать книгу практически значимой для технических целей. Для достижения этой цели используется философия, что наиболее практичным является подход к механике жидкости, в котором сочетаются теоретический анализ, ясные физические рассуждения и эмпирические результаты. Каждый из этих элементов механики опирается на другой для взаимной поддержки и в целом дает больше, чем сумма частей.

Аналитические разработки этой книги включают в себя два типа: те, что приводят к разработке методов проектирования, и те, которые приводят к характерным (образцовым) методам. Методы проектирования являются прямыми и быстрыми и легко соотносятся с различными задачами. Таким образом, они подходят для использования в инженерной практике. Обсуждение этих методов проектирования делается подробно, и часто даются иллюстративные примеры. Примерные (образцовые) методы, с другой стороны, включают те теоретические изыскания, которые обычно требуют много времени, создания новых математических процедур и которые нелегко применить к различным задачам. Такие методы в основном дают подробные ответы на небольшое число типовых задач. Хотя они сами по себе не подходят для инженерного бюро, примеры, для которых они были разработаны, часто предоставляют важную информацию о поведении жидкостей в типичных ситуациях. Таким образом, они служат в качестве направляющих для конструктора в решении многих сложных проблем, где даже так называемых методов проектирования недостаточно. Анализ оригинальных методов в этой книге, как правило, состоит из краткого описания метода вместе с презентацией этих результатов, полученных с его помощью, которые освещают важные вопросы относительно движения жидкости и помогают формировать жизненно важное «чувство» по желанию конструктора.

В частях книги, имеющих дело с основами, акцент делается на внедрении новых концепций в однозначной форме, на обеспечении четкого понимания физического применения анализа, на строгом применении физических законов и на показе плодотворных путей подхода в аналитическом мышлении. Оставшаяся часть работы тогда происходит в более быстром темпе, что и подобает технической зрелости продвинутых студентов и профессионалов. Основным мотивом создания книги послужило малое время, выделяемое в современных учебных планах на механику жидкости и газа. Поэтому на основе переносных свойств жидкости удалось компактно спроектировать фундаментальные уравнения МЖГ и уделить внимание прикладным вопросам ее использования. По существу, курс МЖГ построен не на изложении ее основ, а на ее создании, конструировании на основе механики твердого тела.

Общая структура изложения материала следует курсу, проложенному в XVIII в. выдающимся французским ученым Ж. Л. Лагранжем — обсуждение общих принципов, вывод общих уравнений и затем их применение к отдельным частным задачам. Планируется построение единообразного алгоритмического аппарата механики жидкости, позволяющего стандартными методами решать самые разнообразные задачи гидрогазодинамики.

Предварительные сведения, необходимые для освоения материала книги, таковы, что она может быть использована в качестве учебного пособия для старшего курса общеобразовательного цикла и для первого курса специализированного цикла. Предполагается, что студент владеет математическим анализом и элементарными понятиями физики. В конце каждой темы даются контрольные вопросы, ответы на которые помогают закрепить рассмотренный материал. Упражнения (задачи), которые даются в конце книги, предназначены для приобретения умения использовать теоретический материал на практике.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет механики жидкости и газа

Механика жидкости и газа (МЖГ) является разделом механики, в котором изучают движение жидкости, а также силовое взаимодействие между жидкостью и обтекаемыми ею телами или ограничивающими ее поверхностями.

Исторически механика жидкости является одной из самых древних наук в мире. Археологическими исследованиями в Китае и в других странах древнего мира найдены описания различных гидравлических сооружений, представленных в виде рисунков, используемых еще за 5000 лет до н. э. Так, в Древнем Египте, Индии, Китае были построены каналы и водохранилища грандиозных по тем временам размеров. В Индии глубина некоторых водохранилищ достигала 15 м, в Китае примерно 2500 лет назад был построен Великий канал длиной около 1800 км, который соединял приустьевые участки крупных рек страны. В Древнем Риме 2300 лет назад был построен первый водопровод. Некоторые из каналов, построенных в низовьях Амударьи около 2000 лет назад, эксплуатируют и по сей день (естественно, после многоразовых ремонтов и реконструкций).

Первые указания о научном подходе к решению гидравлических задач относятся к 250 г. до н. э., когда Архимедом был открыт закон о равновесии тела, погруженного в жидкость. Работы Архимеда послужили толчком к появлению ряда замечательных гидравлических аппаратов. Наиболее известными из них являются: поршневой насос Ктесебия, сифон Герона и многие другие.

Потом на протяжении 1500 лет особых изменений гидравлика не получала. Наука в то время почти совсем не развивалась, образовался своего рода застой. И только в XVI–XVII вв. н. э. появились работы Галилея, Леонардо да Винчи, Паскаля, Ньютона, которые заложили основы для совершенствования гидравлики как науки. В XV–XVI вв. Леонардо да Винчи (1452–1519) написал работу «О движении и измерении воды», которая была опубликована лишь более чем через 400 лет после ее создания. С. Стевин (1548–1620) написал книгу «Начала гидростатики». Стевин первый сформулировал принцип затвердевания жидкости, позволяющий применять в гидростатике обычные приемы статики твердого тела. Галилео Галилей (1564–1642) в 1612 г. в трактате «Рассуждения о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в ней движутся» рассмотрел основные законы плавания и гидростатический парадокс. Э. Торичелли (1608–1647) получил формулу истечения невязкой жидкости из отверстия, Блез Паскаль (1623–1662) открыл закон о передаче давления в жидкости, прямым следствием чего явилось появление в то время большого числа простых гидравлических машин (прессы, домкраты и т. п.), И. Ньютон (1643–1727) в 1686 г. сформулировал гипотезу о внутреннем трении в жидкости.

Если античная механика твердого тела зародилась главным образом в связи с грандиозными строительными работами древних и необходимыми для этих работ подсобными механизмами, то созданию первых идей механики жидкости и газа способствовали вопросы строительства водопроводов, плавания судов, полета метательных снарядов. Основной гидродинамической проблемой того времени явилось выяснение природы взаимодействия между движущимся твердым телом и окружающей его средой — водой или воздухом — при плавании или полете. Леонардо да Винчи в 1506 г. первый установил понятие сопротивления жидких и газообразных сред движущимся в них телам. Сопротивление объяснялось им сжатием воздуха в лобовой части тела. Полное сопротивление тела, по Ньютону, складывается из сопротивления, зависящего от инертности жидкости, и сопротивления, определяемого трением жидкости о поверхность обтекаемого тела.

Расцвет общей механики твердого тела в конце XVII в. подготовил мощный скачок в развитии механики жидкости и газа. Обобщение установленных Ньютоном основных законов и уравнений динамики на сплошные среды и в первую очередь на жидкость привело к образованию специального раздела теоретической механики — гидродинамики.

Честь создания теоретической гидродинамики как специальной науки с широкими задачами и строгими методами их разрешения принадлежит Российской Академии наук в лице ее двух академиков — Леонарда Эйлера (1707–1783) и Даниила Бернулли (1700–1782).

В своем трактате «Общие принципы движения жидкости» (1755) Эйлер впервые вывел основную систему уравнений движения *идеальной* жидкости, положив этим начало аналитической механике сплошной среды. В противовес ньютоновским взглядам на *ударную* природу взаимодействия твердого тела с набегающей на него жидкостью, было выдвинуто новое для того времени представление об *обтекании* тела жидкостью. Давление в точке тела определяется не наклоном поверхности в данной точке к направлению набегающего потока, а движением жидкости вблизи этой точки поверхности. Эйлеру принадлежат первый вывод уравнения неразрывности жидкости (в частном случае движения жидкости в трубе это уравнение в гидравлической трактовке в 1628 г. было дано учеником Галилея Кастелли), формулировка теоремы об изменении количества движения применительно к жидким и газообразным средам, вывод *турбинного уравнения*, создание теории реактивного колеса Сегнера и многое другое.

Наибольшее значение для развития механики жидкости и газа имел трактат Д. Бернулли «Гидродинамика» (1783). В нем Бернулли изложил теорему, устанавливающую связь между давлением, уровнем жидкости и скоростью движения тяжелой жидкости. Согласно этой фундаментальной теореме гидродинамики, если в точках потока, находящихся на одном уровне, понижается скорость, то давление должно повышаться — результат, который вначале казался парадоксальным. Действительно, в связи с ньютоновскими воззрениями на давление жидкости на обтекаемое тело, да и исследованиями самого Бернулли о давлении жидкости на преграду прочно установился взгляд о возрастании давления жидкости на тело при увеличении скорости набегания ее на тело. Эйлер разъяснил, что теорема Бернулли как гидродинамическая интерпретация закона живых сил справедлива лишь тогда, когда наблюдается движение частиц одной и той же струи, т. е. рассматривается изменение давления вдоль данной струи, обтекающей тело.

В XIX в. динамика идеальной жидкости дополняется зарождающейся динамикой вязкой жидкости и газовой динамики. Следует упомянуть роль Д. И. Менделеева в развитии учения о газах при больших и малых давлениях, в области метеорологии высоких слоев атмосферы. Д. И. Менделееву принадлежит опубликованная в 1880 г. монография «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании», в которой дается не только систематическое и критическое изложение существовавших к тому времени взглядов на сопротивление среды, но и указывается на необходимость учета вязкости жидкости при определении сопротивления трения хорошо обтекаемого тела.

Термину «жидкость» в МЖГ придают более широкий смысл, чем это принято в обыденной жизни. В понятие «жидкость» включают все тела, для которых свойственна *текучесть — способность изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил.* Таким образом, в это понятие включают как обычные жидкости, называемые капельными, так и газы. Первые отличаются тем, что в малом количестве под действием поверхностного натяжения принимают сферическую форму, а в большом — образуют свободную поверхность раздела с газом. Важной особенностью капельных жидкостей является их несжимаемость — они ничтожно мало изменяют свой объем при изменении давления. Газы, наоборот, могут значительно изменять свой объем при изменении давления, т. е. они обладают большой сжимаемостью.

Несмотря на это различие, законы движения капельных жидкостей и газов при определенных условиях можно считать одинаковыми. Основным из этих условий является малая скорость газа по сравнению со скоростью распространения в нем слабых возмущений, скоростью звука.

В гидравлике изучают движение главным образом капельных жидкостей, причем в подавляющем большинстве случаев последние рассматривают как несжимаемые. В газовой динамике рассматриваются течения сжимаемых жидкостей — газов. Внутренние течения газа относятся к области гидравлики лишь в тех случаях, когда их скорости значительно меньше скорости звука (не более 30% скорости звука). Такие случаи движения встречаются в практике довольно часто (например, течение воздуха в вентиляционных системах, в системах кондиционирования воздуха, газопроводах). В настоящее время дисциплины «Гидравлика» и «Газовая динамика» часто объединяются под названием «Механика жидкости и газа» (МЖГ), или «Гидрогазодинамика».

Гидравлика дает методы расчета разнообразных гидротехнических устройств и сооружений, гидромашин, а также трубопроводных систем.

Газовая динамика посвящается решению задач течения газов в проточной части энергоустановок, элементах трубопроводных систем, предназначенных для перемещения газов и трубопроводных систем в целом.

Актуальность механики жидкости и газа в повседневной жизни человека обусловлена главным свойством жидкости — текучестью. Благодаря этому свойству жидкость способна переносить не только свои свойства, но и энергию. И поэтому жизнь человека оснащена гидравлическими и газодинамическими устройствами — от систем водоснабжения и водоотведения до двигателей для космических полетов.

Теоретической базой решения задач МЖГ является теоретическая механика — механика твердого тела. Но так как при своем движении жидкость может менять объем и форму, то теоретическая механика дополняется сведениями из физики жидкости и газа.

1.2. Моделирование

В своей деятельности исследователю приходится заниматься изучением сложных систем, к которым можно отнести системы из самых разных областей естествознания и техники и т. п. Изучение подобных систем требует привлечения больших материальных ресурсов, которые не всегда оказываются доступными. Стремление решить исходную задачу требует ее упрощения. Такое упрощение может быть достигнуто в том случае, когда удается пренебречь отдельными свойствами системы, несущественными на том или ином этапе изучения этой системы. Понятно, что если в свойствах сложной системы какие-то ее особенности исключены, то это уже другая система, ее образ. Свойства упрощенной системы полностью не воспроизводят свойства исходной системы. Более того, в упрощенной системе по сравнению с исходной могут появиться новые свойства, которые могут быть расценены как «паразитные». Действительно, существует подобная опасность, однако достойных альтернатив методам изучения сложных систем, связанным с упрощением исходной постановки задачи, нет, и поэтому такие методы широко применяются в практической деятельности исследователя.

Технология изучения сложной системы, связанная с ее упрощением и изменением части свойств, называется моделированием. Упрощенная система называется моделью. Таким образом, моделирование — это процесс замены исследуемой сложной системы подобной ей упрощенной системой и проведение исследований упрощенной системы с целью получения информации об исходной системе. Модель можно рассматривать как «некий объект-заместитель, который в определенных условиях может заменять объект-оригинал, воспроизводя интересующие нас свойства и характеристики оригинала, причем имеет существенные преимущества и удобства».

Моделирование — это инструмент, используемый в любой целенаправленной деятельности. Например, учебу можно воспринимать как модель будущей работы, тренировку спортсмена — как модель участия в предстоящем соревновании, тренажеры — как модели реальных жизненных ситуаций и т. п. Качество принимаемых при упрощении сложной системы допущений и их количество могут быть самыми разнообразными, а потому и количество моделей системы, вообще говоря, может быть каким угодно большим. Можно построить вполне определенную иерархическую структуру моделей, при этом главным условием в этой структуре будет требование адекватности описания любой моделью свойств исследуемой исходной системы.

Всю известную совокупность моделей, используемых исследователем, можно классифицировать по разным критериям и категориям. Так, все модели с позиции их «полезности» в практической деятельности человека можно разделить на два класса.

1. Познавательные модели — это модели, которые являются формой организации и представления знаний, средством соединения новых знаний с имеющимися. Примерами таких моделей могут быть модели в астрономии, теории ядерной материи, философские теории о строении и развитии мира и т. п. Особенность этих моделей — они постоянно развиваются и стремятся «подтянуться» к реальности.

2. Прагматические модели — это модели, которые являются средством управления или средством организации практических действий. В отличие от предыдущего типа моделей в прагматических моделях реальность упрощают. Этот вид моделей находит применение в основном в технических приложениях.

Оба приведенных выше класса моделей могут быть рассмотрены и с других позиций. Так, все модели могут быть разделены на классы физических (реальных, материальных) и абстрактных (идеальных) моделей.

1. Физические модели — это модели, которые образуются из совокупности материальных объектов (систем). При этом не обязательно, чтобы природа исходного объекта и модели совпадала.

Если природа исходного объекта и модели одинакова, то говорят о прямом подобии. Примерами могут быть масштабированные модели и макеты реальных объектов (например, самолетов, автомобилей, зданий), картины и фотографии реальных объектов и т. п. В то же время природа исходного объекта и модели может быть разной, но поведение и закономерности их подобны. Такие модели называются аналоговыми, или косвенными. Аналоговое моделирование широко используется в теории управления, теории теплопроводности и в других науках. Исследование закономерностей в таких модельных объектах осуществляется, например, с помощью электрических цепей. В частности, с использованием электрических цепей удается решать дифференциальные уравнения (задачу Коши и краевую задачу), системы нелинейных алгебраических уравнений, описывать движение материальной точки в потенциальном поле, исследовать кинетику гомогенных химических реакций, кинематику кривошипно-шатунного механизма, решать игровые задачи, решать задачи о плоском изгибе балок, задачи линейного программирования и т. п.

Можно привести и другие примеры аналогового моделирования. Например, часы — это аналог времени, подопытные животные у медиков — это аналог человеческого организма, команды автопилота на борту самолета — аналог поведения летчика и т. п. Отметим, что отдельные примеры, приведенные выше, иногда относят к условным моделям. К таким моделям можно отнести, например, деньги (они отражают модель стоимости), удостоверение личности (выражает официальную модель владельца), карты местности и т. п.

2. Абстрактные (идеальные) модели — это модели, которые построены средствами мышления, сознания. Компонентами таких моделей являются понятия, знаки, сигналы и т. п. Определенную роль в построении абстрактной модели играют языковые и неязыковые средства, в частности эмоции, интуиция, озарение, образное мышление, подсознание и прочие средства.

Абстрактные модели могут быть нескольких видов.

- Гносеологические модели.

Такие модели направлены на изучение объективных законов природы. В качестве примеров можно привести модели Солнечной системы, биосферы, мирового океана, модели катастрофических явлений природы и т. п.

- Информационные модели.

Эта группа моделей описывает поведение объекта-оригинала, но не копирует его. Описание может быть, например, словесным. К информационным моделям можно отнести описания явлений, объектов техники, личности и т. п.

- Сенсуальные модели.

К сенсуальным моделям могут быть отнесены модели чувств, эмоций либо модели, оказывающие воздействие на чувства человека.

- Концептуальные модели.

Эта группа моделей выявляет причинно-следственные связи, присущие исследуемому объекту и существенные в рамках определенного исследования. Один и тот же объект может представляться различными концептуальными моделями в соответствии с выбранной целью исследования. Примерами таких моделей могут быть пневмогидравлические схемы в ракетных системах, в которых отображается функционирование системы во времени, проводится анализ влияния отказов на работоспособность системы и пр.

- Математические модели.

К математическим моделям относят абстрактные модели, представленные, как правило, с использованием математических и (или) логических соотношений.

- Алгоритмические (дискретные) модели.

К алгоритмическим моделям относят такие, в которых траектория изменения исследуемого объекта расписана пошагово. Отметим, что с использованием вычислительных методов в группу алгоритмических могут быть переведены математические модели.

- Компьютерные модели.

Компьютерные модели — это алгоритмические модели, запрограммированные для решения на цифровых вычислительных машинах.

Отметим дополнительно следующие важные свойства, справедливые для перечисленных выше групп моделей. Любая модель конечными средствами пытается описать, вообще говоря, бесконечную совокупность существующих объективных связей, что делает обязательным использование упрощений.

Упрощения достигаются принятием допущений, и степень приближения модели к исходному объекту зависит от характера принимаемых допущений. В зависимости от цели, поставленной в начале исследования, количество и характер допущений могут различаться, но в любом случае применяемая модель соответствует уровню развития цивилизации. Действительно, построение любой модели предполагает наличие определенных знаний об исследуемом объекте, требует привлечения конкретных материальных и людских ресурсов. Перечисленные факторы позволяют сделать вывод о том, что модели прогнозируют поведение реального объекта всегда приближенно, и по мере исторического развития модели постоянно развиваются и подвержены определенной динамике. Необходимо отметить, что при исследовании сложных систем и объектов математические соотношения в любом случае не сумеют воспроизвести в полной мере качественное и количественное поведение исследуемого объекта.

В дальнейшем изложении для нас будут представлять интерес последние три группы моделей (математические, алгоритмические и компьютерные). Отметим, что разделение этих трех групп моделей в ряде случаев представляется условным. Кроме того, все сформулированные выше группы моделей (гносеологические, информационные, сенсуальные, концептуальные) не исключают возможности применения математического аппарата и, по существу, тоже могут быть классифицированы как математические модели.

Математическое моделирование технического объекта или процессов его функционирования предполагает построение замкнутой математической модели, адекватно, в рамках заданных требований, описывающей реальный объект или процесс. Построение математической модели состоит из нескольких этапов. В частности, при построении математической модели технического объекта необходимо выполнить следующее.

1. Описание объекта и особенностей его функционирования. Чем качественнее будет выполнено такое описание, тем проще будет сформулировать математическую модель рассматриваемого объекта.

2. Перечень конструктивных параметров, значимых при анализе объекта, и их математическое описание. Ошибки на этом этапе формулирования математической модели либо излишне усложняют решаемую задачу (например, при избыточном количестве перечисленных значимых параметров), либо делают решение задачи неоднозначным (если какой-либо значимый параметр упущен в описании).

3. Перечень допущений, упрощающих решение задачи, и соответствующие этим допущениям ограничения на основные конструктивные параметры.

Необходимо отметить, что все принимаемые допущения должны быть обоснованы. Обоснование должно базироваться либо на имеющихся экспериментальных или расчетных фактах, либо следовать из целей решаемой задачи.

4. Математические связи, характеризующие исследуемый технический объект. В число математических связей включаются системы дифференциальных уравнений в частных производных, системы обыкновенных дифференци-

альных уравнений, системы линейных и нелинейных алгебраических уравнений, отдельные алгебраические и (или) логические соотношения, условия, записанные в виде равенств и неравенств, и т. п. В то же время, в состав математической модели могут быть включены отдельные фрагменты, описание которых представлено простейшими табличными соотношениями, связывающими друг с другом две или более переменных.

5. Перечень дополнительных условий и ограничений, обеспечивающих единственность решения задачи об объекте. В частности, при записи дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) необходимо задать начальные и граничные условия. В качестве дополнительных условий могут быть записаны ограничения на недопустимые комбинации конструктивных параметров и т. п.

Математическое моделирование — инструмент, эффективность применения которого обеспечивается специальными технологиями. Возможности технологий математического моделирования непрерывно возрастают вслед за ростом мощности применяемых вычислительных машин и играют все большую роль в инженерной практике при создании новых технических объектов, вытесняя физическое и (или) натурное моделирование. Все чаще результаты, полученные с помощью технологий математического моделирования, оказываются более точными и более приемлемыми на практике, чем результаты, полученные в ходе экспериментальных исследований.

Построение (формулирование) математической модели — первый этап технологии математического моделирования. Следующий этап связан с выбором математических методов, обеспечивающих решение задач, входящих в состав математической модели, и этот этап сопряжен с определенными трудностями. Прежде всего, нет единого метода, позволяющего решить любую математическую задачу. Другая трудность состоит в том, что решение всех задач должно выполняться одновременно (совместно), потому что все уравнения математической модели связаны друг с другом. Учитывая применение вычислительной техники при решении задач математического моделирования, математические методы базируются, прежде всего, на аппарате вычислительной математики. Конечный результат этого этапа — получение вычислительного алгоритма.

Если учесть тот факт, что сложность математических моделей, применяемых в технике, велика и непрерывно возрастает (это обусловлено необходимостью повышения качества прогнозирования реального поведения технического объекта), то единственным инструментом решения задач, поставленных в математической модели, остается вычислительная техника.

Заключительным этапом работ, связанным с реализацией технологии математического моделирования, является анализ результатов расчетов, который позволяет оценить правильность построения модели и выполнить те или иные необходимые коррекции. На этом этапе для оценки правильности и точности моделей следует применять известные аналитические и численные решения.

Особая роль на этом этапе отводится сравнению результатов численного анализа с результатами натурных (физических) экспериментов.

Методика решения задач МЖГ заключается в следующем. Выделяется расчетный участок системы, который называется *контрольным объемом*. Все, что окружает жидкость в контрольном объеме (*окружающая среда*), отбрасывается. Чтобы движение жидкости в контрольном объеме не изменилось, действие окружающей среды на выделенный объем заменяется соответствующими силами, которые и определяют движение жидкости. Для жидкости, протекающей через контрольный объем, записываются *уравнения законов сохранения*: закона сохранения массы, закона количества движения (второго закона Ньютона), закона сохранения и превращения энергии. К уравнениям законов сохранения должны быть добавлены *уравнения и зависимости, определяющие свойства жидкости и термодинамический процесс течения.* Полученная система уравнений должна быть совместной — число уравнений должно быть равно числу неизвестных. Поскольку уравнения законов сохранения имеют всеобщий характер для заданной жидкости, то особенность, конкретность задачи определяется заданием *начальных и граничных условий.* Граничными условиями являются форма и расположение границ контрольного объема, а также значения параметров жидкости на границах выделенного объема. Под начальными условиями понимают значения параметров жидкости во всех точках контрольного объема в начальный момент времени.

Полученная система уравнений и вспомогательных зависимостей вместе с начальными и граничными условиями должна быть решена каким-либо методом — аналитическим, численным, экспериментальным. Из-за сложностей решения уравнений исследуемое течение реальной жидкости сначала упрощают (моделируют), затем упрощенное (модельное) течение рассчитывают. Полученные результаты сравнивают с опытом, выявляют степень расхождения, уточняют и исправляют постановку задачи. Многие явления, трудно поддающиеся теоретическому анализу, исследуют экспериментальным путем, а результаты представляют в виде эмпирических формул. В настоящее время в связи с развитием численных методов расчета доля аналитического метода в гидромеханике несколько снизилась. *Важность экспериментальных методов заключается в том, что опыт служит как для первичного изучения явления, так и для создания адекватных расчетных схем*. Первичное изучение явления необходимо для правильного выбора границ контрольного объема и формулирования граничных условий. Экспериментальное изучение явления необходимо для установления адекватности расчетных методов.

Рассмотренная методика изучения движения жидкости позволяет сформулировать следующие этапы изучения дисциплины «Механика жидкости и газа»:

1-й этап — это знакомство с основными свойствами жидкостей и газов. Для того чтобы описать поведение какого-то объекта, необходимо знать свойства этого объекта.

2-м этапом является, естественно, вывод законов сохранения для рассматриваемого объекта — жидкости.

3-й этап — упрощения и допущения, используемые при решении уравнений МЖГ.

4-й этап — решение задач механики жидкости и газа.

Первые три этапа изучения по сути дела представляют собой создание математической модели движения жидкости.

В отношении математической подготовки предполагается хорошее владение дифференцированием и интегрированием функций одной переменной, а также некоторое знакомство с теорией вероятности, векторной алгеброй и анализом для функций нескольких переменных. Во многих случаях будут выводиться и решаться дифференциальные уравнения, но не предполагается у читателя больших предварительных познаний в этой области. Одна из целей этой книги — предоставить вам возможность оттренировать приобретенные математические знания, почувствовать их полезность и действенность для приложений и даже расширить полученные знание математики, т. е., коротко говоря, научить производить сложные, строгие и точные выкладки.

Однако другая и, быть может, более важная цель состоит в том, чтобы научить читателя производить простые, грубые, приближенные оценки. Эти две цели выглядят противоречивыми, но на самом деле они дополняют друг друга: если читатель совершенно не представляет, чего следует ожидать в какой-то данной физической ситуации, то обычно полезно сначала попытаться сделать очень грубую оценку порядка величины эффекта. Этот шаг в действительности даст вам гораздо большую информацию, чем последовательные, очень точные, но и очень трудоемкие вычисления. Например, если вы совершенно не представляете себе, будет ли некая энергетическая установка давать мощность микроватт или мегаватт, то колоссальную информацию вам даст оценка того, что эта мощность будет порядка 100 Вт (т. е. не 10 и не 1000). Для некоторых целей может оказаться интересным уточнить, что эта мощность равна 60 Вт, а не 75, например, но это различие очень слабое, если его сравнить с различием между 100 Вт и 100 МВт. Получение реальных (но не обязательно точных) значений различных величин является одним из краеугольных камней физики.

1.3. Использование буквенных индексов

Большинство задач механики жидкости будем рассматривать в декартовой системе координат. Но вместо обычного обозначения координат x, y, z введем обозначения x_1, x_2, x_3, т. е. индексную форму записи величин. Более кратко координаты можно записать, если использовать буквенный индекс, определив значения, которые он может принимать:

$$x_1, x_2, x_3 \quad \Rightarrow \quad x_i, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, 3.$$

При такой записи предполагается, что скалярная величина изображается без индекса, векторная величина — с одним индексом, тензорная — с двумя индексами. Используя буквенные индексы, будем руководствоваться следующими правилами.

1. Правилом суммирования. По индексу, встречающемуся дважды (немой индекс), производят суммирование от 1 до 3.

2. Индекс, встречающийся один раз (свободный индекс), должен пробегать значения от 1 до 3.

Таким образом, уравнение с одним свободным индексом означает запись трех уравнений. Очевидно, что для двумерного движения суммирование по немому индексу производят от 1 до 2, а свободный индекс принимает значения 1 и 2. В одномерном движении необходимости в подобных индексах нет.

Правило суммирования и определение свободного индекса можно относить не только к векторам, а вообще к любой записи и любым операциям над полевыми величинами. Так, например, запись $a_k \dfrac{\partial a_i}{\partial x_k} = b_i$ означает, что вектор b_i имеет три проекции:

$$a_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = b_1;$$

$$a_1 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = b_2;$$

$$a_1 \frac{\partial a_3}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = b_3.$$

Здесь индекс k — немой, индекс i — свободный. Немой индекс потому так называется, что при суммировании он заменяется цифрами, поэтому немой индекс пропадает, и его можно заменить любой другой буквой. Можно, например, заменить индекс k на j , но не на i, так как i в данном случае принят в качестве свободного индекса (неповторяющегося).

В другом примере свободный индекс отсутствует:

$$u_i u_i = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Нужно отметить, что все члены уравнения должны иметь один и тот же свободный индекс (либо вообще не иметь свободного индекса). Это означает, что все члены уравнения представляют проекцию на одну и ту же ось координат.

Поскольку при изучении МЖГ необходимо определение полей параметров жидкости, которые могут быть скалярными, векторными и тензорными, то необходимо освоить правила записи векторных операций.

При записи векторных операций вводятся два символа.

1. Символ Кронекера. Он определен следующими свойствами:

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{при} \quad i = j, \qquad \delta_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j .$$

2. Тензор (символ) перестановок по определению обладает следующими свойствами:

$e_{ijk} = 1$ при циклическом порядке индексов: 1, 2, 3, 1...;

$e_{ijk} = -1$ при антициклическом порядке индексов: 3, 2, 1...;

$e_{ijk} = 0$, если любые два индекса равны.

Рассмотрим запись векторных операций с помощью буквенных индексов. Пусть даны два вектора ***a*** и ***b***, которые в индексной записи задаются компонентами a_i и b_i.

Скалярное произведение двух векторов является скалярной величиной и вычисляется в виде суммы произведений одноименных проекций:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |a|\cdot|b|\cdot\cos\theta \ |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Следовательно, в индексной записи скалярное произведение выглядит так:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_ib_i.$$

Векторное произведение является вектором, i-проекцию которого можно записать с помощью тензора перестановок:

$$c_i = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i = e_{ijk}a_jb_k.$$

Компоненты этого вектора:

$$c_1 = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_1 = a_2b_3 - a_3b_2;$$
$$c_2 = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_2 = a_3b_1 - a_1b_3;$$
$$c_3 = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_3 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Вихрь (ротор) вектора является вектором, и его проекции определяются формулой

$$b_i = (rot\boldsymbol{a})_i = e_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j},$$

согласно которой проекции этого вектора равны:

$$b_1 = (rot\boldsymbol{a})_1 = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3};$$
$$b_2 = (rot\boldsymbol{a})_2 = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1};$$
$$b_3 = (rot\boldsymbol{a})_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}.$$

Градиент скалярной функции φ является вектором:

$$c_i = (grad\,\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

с проекциями: $c_1 = (grad\,\varphi)_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $c_2 = (grad\,\varphi)_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $c_3 = (grad\varphi)_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$.

Дивергенция вектора *a* является скалярной величиной:

$$div\,\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Теорема Остроградского — Гаусса, согласно которой можно преобразовать поверхностный интеграл в объемный, формулируем так: *полный поток вектора b_i через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, равен объемному интегралу от дивергенции этого вектора.* Индексная запись этой теоремы имеет вид