

Предисловие

Учебное пособие позволяет студентам проверить и расширить свои знания и навыки в освоении теоретического и практического материала по теме «Внутренние усилия и напряжения при прямом изгибе стержней».

С помощью представленных тестов можно подготовиться к контрольным работам и прохождению тестирования по соответствующим расчетно-графическим работам: «Внутренние усилия при изгибе стержней» и «Определение напряжений в балках при изгибе. Расчет на прочность».

Задания сгруппированы по четырем разделам. Так как каждый тест снабжен комментируемым ответом, то это позволяет учащемуся контролировать уровень своей подготовки в режиме «самотестирования».

К каждому тесту (заданию) предлагаются пять вариантов ответа. При этом все ответы помечены или символом «○» (кружок) или символом «□» (квадрат).

Символом «○» обозначены ответы, из которых только *один* является правильным, а символом «□» — ответы, из которых правильными являются *несколько* из пяти предложенных (но не более четырех). Таким образом, тестируемому дается некоторая подсказка, в целом упрощающая задание.

В следующем за ответами *комментарии* содержится решение поставленной в тесте задачи и краткие сведения по соответствующему теоретическому материалу. В конце каждого теста предлагается *правильный ответ*.

При прохождении реального аудиторного тестирования на кафедре сопротивления материалов действуют такие же принципы. Студент должен ответить на пять вопросов, включающих три задачи и два теоретических задания. Время тестирования — 15 минут. Для получения удовлетворительной оценки необходимо правильно ответить на три вопроса из пяти предложенных.

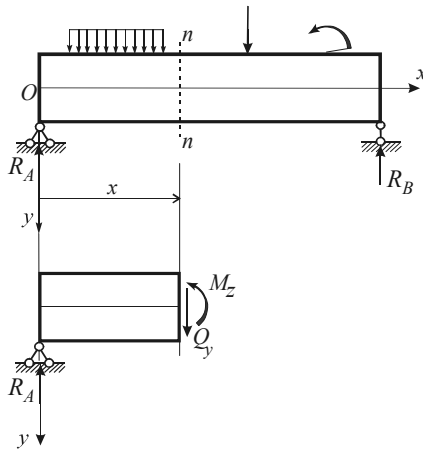
Авторы выражают особую благодарность профессору кафедры «сопротивления материалов МГСУ А.Н. Леонтьеву за ценные советы и замечания.

Введение

КЛЮЧЕВЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ

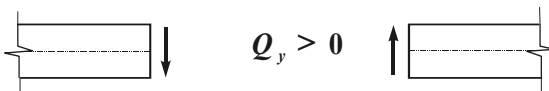
Плоский прямой изгиб — это напряженно-деформированное состояние, возникающее в стержне при условии, что вся внешняя нагрузка лежит в одной из главных плоскостей инерции — Oxy или Oxz . Ox — продольная ось стержня, zy — главные центральные оси инерции сечения.

Во всех примерах далее силовой плоскостью будет плоскость Oxy . Тогда внутренними усилиями, возникающими в поперечном сечении стержня, будут: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z . В дальнейшем в тестах для простоты часто будем отбрасывать индексы и писать кратко: Q и M .



• Правило знаков для поперечной силы Q_y

$Q_y > 0$, если она стремится вращать отсеченную часть балки по ходу часовой стрелки (независимо от того, с какой стороны балки ведется расчет: «слева направо» или «справа налево»).



Численно поперечная сила равна сумме проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок (включая реакции), расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения.

• Правило знаков для изгибающего момента M_z

$M_z > 0$, если он растягивает нижние волокна балки (изгибает стержень выпуклостью вниз).



Численно изгибающий момент равен сумме моментов всех нагрузок (включая реакции), приложенных к одной из частей балки, относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.

Эпюра моментов строится со стороны растянутого волокна балки.

• Дифференциальные зависимости, связывающие между собой внутренние усилия Q_y , M_z и распределенную нагрузку q

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q(x); \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y(x); \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = -q(x).$$

• Характерные особенности эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z

1. Если на участке балки распределенная нагрузка $q = \text{const}$, то поперечная сила Q_y в пределах этого участка изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M_z — по закону квадратной параболы.

2. Если на участке балки распределенная нагрузка q изменяется по линейному закону, то поперечная сила Q_y в пределах этого участка изменяется по закону квадратной параболы, а изгибающий момент M_z — по закону кубической параболы.

3. Если на участке балки распределенная нагрузка $q = 0$, то в пределах этого участка поперечная сила $Q_y = \text{const}$, а изгибающий момент M_z изменяется по линейному закону.

4. Если эпюра Q_y пересекает осевую линию балки, то изгибающий момент M_z в этом сечении имеет *экстремум*.

5. В сечениях балки, где эпюра Q_y имеет *экстремум*, на эпюре M_z возникает *точка перегиба*.

6. В сечении балки, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q_y возникает *скачок*, численно равный величине этой силы. На эпюре M_z в этом сечении появляется *излом*, направленный в сторону действия силы.

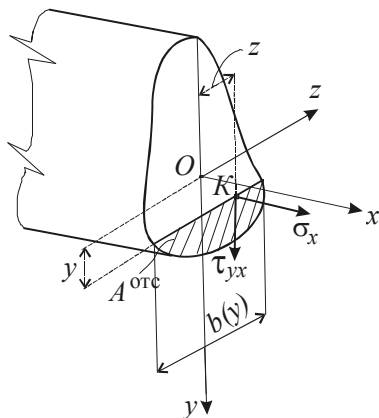
7. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре M_z возникает *скачок*, численно равный величине этого момента.

• Формулы для напряжений

В поперечных сечениях балки при плоском прямом изгибе действуют нормальные σ_x и касательные $\tau = \tau_{yx} = \tau_{xy}$ напряжения, определяемые по формулам

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y; \quad \tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}(y)}{J_z b(y)},$$

где M_z, Q_y — соответственно изгибающий момент и поперечная сила в рассматриваемом сечении балки; J_z — осевой момент инерции всего сечения относительно главной центральной оси z ; y — координата точки K , в которой ищется напряжение, $S_z^{\text{отс}}(y)$ — статический момент отсеченной части сечения (на уровне точки K) относительно оси z ; $b(y)$ — ширина сечения на уровне указанной точки K .

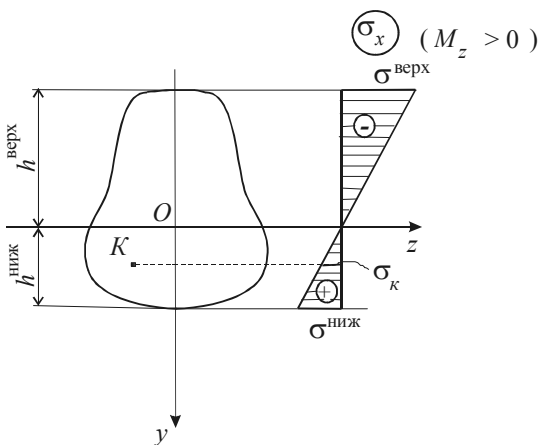


Наибольшие (наименьшие) нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных от нейтральной оси z волокнах:

$$\sigma_x^{\text{ниж}} = \frac{M_z}{J_z} h_{\text{ниж}} = \frac{M_z}{W_z^{\text{ниж}}};$$

$$\sigma_x^{\text{верх}} = \frac{M_z}{J_z} h_{\text{верх}} = \frac{M_z}{W_z^{\text{верх}}},$$

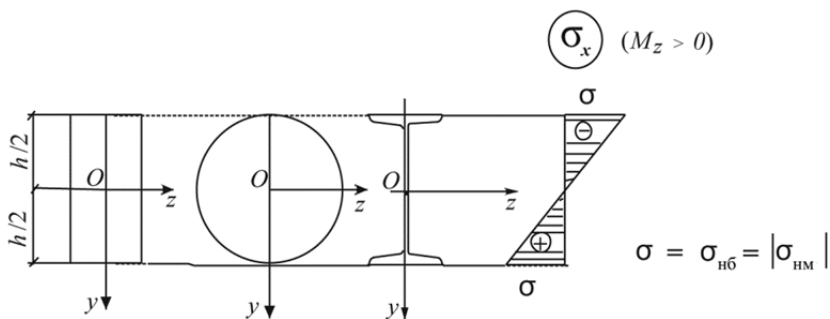
где $W_z^{\text{ниж}}$ и $W_z^{\text{верх}}$ – моменты сопротивления сечения для нижних и верхних волокон.



Наибольшие (наименьшие) нормальные напряжения в *симметричном* относительно нейтральной оси z сечении возникают в крайних волокнах балки и определяются по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z},$$

где $W_z^{\text{ниж}} = W_z^{\text{верх}} = W_z = \frac{J_z}{h}$.



• Правило знаков для нормальных напряжений σ_x

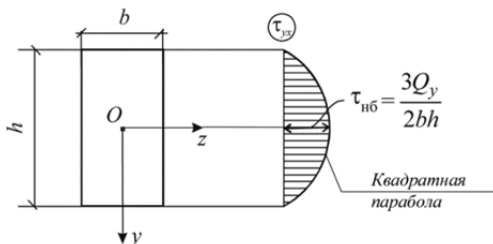
Знак *плюс* на эпюре нормальных напряжений σ_x ставится со стороны растянутых волокон, знак *минус* – со стороны сжатых.

• Правило знаков для касательных напряжений τ

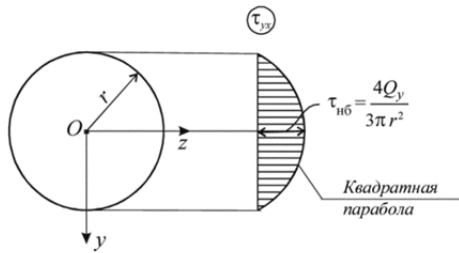
Касательное напряжение τ имеет *такой же* знак, как и знак поперечной силы в рассматриваемом сечении: если $Q_y > 0$, то $\tau > 0$; если $Q_y < 0$, то $\tau < 0$.

Наибольшие касательные напряжения в *симметричном* относительно центральной оси z сечении возникают в точках на уровне нейтральной оси. Значения $\tau_{н6}$ для прямоугольного, круглого и двутаврового сечений позволяет

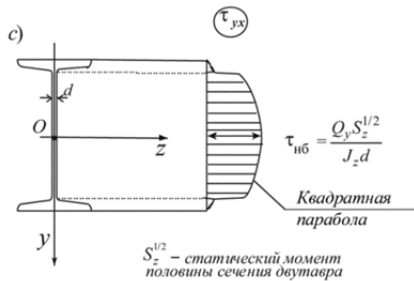
определить формула Д.И. Журавского: $\tau = \frac{Q_y S_z^{отс}(y)}{J_z b(y)}$ при $y = 0$:



a)



б)



с)

Главные напряжения $\sigma_{1,2}$ в балке при поперечном изгибе определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} .$$

Углы наклона $\alpha_{1,2}$ главных напряжений к оси балки x вычисляются так:

$$\text{tg}\alpha_{1,2} = \frac{\tau}{\sigma_{1,2}} .$$

• Условия прочности при плоском прямом изгибе по методу предельных состояний

△ Для балок из *пластичного* материала ($R_{\text{рас}} = R_{\text{сж}} = R$) с *несимметричным* относительно нейтральной оси поперечным сечением должно выполняться условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W_{\text{нм}}} \leq \gamma_c R,$$

где наименьший момент сопротивления $W_{\text{нм}} = \frac{J_z}{y_{\text{нб}}}$, $y_{\text{нб}}$ — расстояние от нейтральной оси z до наиболее удаленного от нее волокна; $M_{\text{нб}}$ — наибольший по абсолютной величине расчетный изгибающий момент. Сечение, в котором действует $M_{\text{нб}}$, называется *опасным*.

△ Для балок из *пластичного* материала с *симметричным* относительно нейтральной оси сечением условие прочности по нормальным напряжениям упрощается:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W_z} \leq \gamma_c R,$$

где $W_{\text{нм}} = W_{\text{нб}} = W_z$.

△ Для балок из *хрупкого* материала ($R_{\text{рас}} \square R_{\text{сж}}$) при расчете на прочность необходимо удовлетворить двум условиям — на растяжение и на сжатие:

$$\sigma_{\text{нб}}^{\text{рас}} \leq \gamma_c R_{\text{рас}} \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{нб}}^{\text{сж}} \leq \gamma_c R_{\text{сж}}.$$

△ Условия прочности по касательным напряжениям записывают с помощью расчетного сопротивления материала при сдвиге R_s :

$$\tau_{\text{нб}} \leq \gamma_c R_s.$$

Для деревянных балок $R_s = R_{\text{ск}}$ — расчетное сопротивление древесины скалыванию вдоль волокон.

• Разрушающая нагрузка при изгибе балки ...

За пределом упругости характер распределения напряжений зависит от диаграммы растяжения и сжатия материала. Используем идеализированную диаграмму Прандтля, в которой площадка текучести распространяется безгранично. Тогда в предельном состоянии, когда напряжения во всех волокнах балки достигнут предела текучести, в опасном (наиболее напряженном) сечении появится так называемый *пластический шарнир*. Изгибающий момент в этом сечении станет *разрушающим*:

$$M_{\text{разр}} = \sigma_T W^{\text{пл}},$$

где $W^{\text{пл}}$ – *пластический* момент сопротивления сечения, определяемый по-разному для симметричных и несимметричных сечений. В частности, для *симметричных* поперечных сечений $W^{\text{пл}} = 2S_z^{1/2}$.

$$\text{Для прямоугольного сечения } W^{\text{пл}} = 2\left(b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{4}.$$

$$\text{Для круглого сечения } W^{\text{пл}} = 2\left(\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{4r^3}{3}.$$

В случае *несимметричного* сечения относительно главной центральной оси z пластический момент сопротивления ищется как сумма статических моментов сжатой и растянутой частей сечения относительно нейтральной оси, смещенной от центра тяжести. Положение нейтральной оси определяется из условия равенства площадей сжатой и растянутой частей сечения.

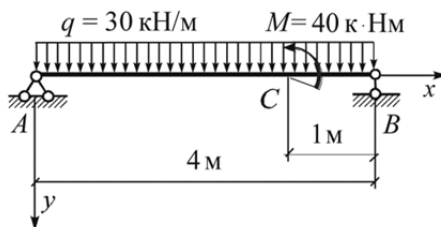
Раздел 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЕЙ

Тест 1.1

Поперечная сила в сечении C балки равна ...

- 1) -20 кН;
- 2) -40 кН;
- 3) 70 кН;
- 4) 50 кН;
- 5) -80 кН.



Комментарий

Сначала найдем опорную реакцию на опоре B . Мысленно направим ее вверх (\uparrow). В статически определимой балке реакции ищутся с помощью уравнений статики: $\sum M_A = 30 \cdot 4 \cdot 2 - 40 - 4R_B = 0$.

Отсюда имеем $R_B = \frac{200}{4} = 50$ (кН). Знак «плюс» означает, что направление реакции задано верно, реакция R_B направлена вверх (\uparrow).

Поперечная сила в сечении C определяется как сумма проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения. Возьмем, например, сумму проекций справа от сечения C :

$$Q_C = -50 + 30 \cdot 1 = -20 \text{ кН.}$$

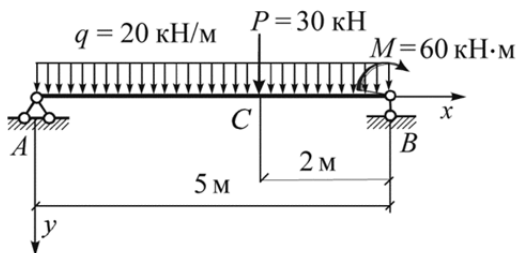
Здесь Q_C отрицательна, так как она стремится повернуть оставшуюся часть балки против хода часовой стрелки относительно центра тяжести сечения C .

Правильный ответ: 1).

Тест 1.2

Поперечная сила в сечении C справа равна ...

- 1) -80 кН;
- 2) -40 кН;
- 3) 120 кН;
- 4) -50 кН;
- 5) 10 кН.



Комментарий

Найдем опорную реакцию на опоре B . Мысленно направим ее вверх (\uparrow). В статически определимой балке реакции ищутся с помощью уравнений статики: $\sum M_A = 20 \cdot 5 \cdot 2,5 + 30 \cdot 3 + 60 - 5R_B = 0$. Отсюда имеем: $R_B = \frac{400}{5} = 80$ (кН). Знак «плюс» означает, что направление реакции задано верно, реакция направлена вверх (\uparrow).

На эпюре поперечных сил Q в сечении C будет скачок (то есть два значения силы в сечении — *слева* и *справа*), так как в этом сечении приложена сила $P = 30$ кН. Поперечная сила в сечении C справа $Q_C^{\text{сп}}$ определяется как сумма проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с правой стороны от рассматриваемого сечения без учета силы 30 кН:

$$Q_C^{\text{сп}} = -80 + 20 \cdot 2 = -40 \text{ кН.}$$

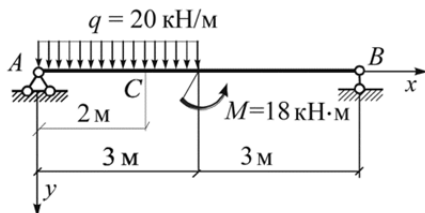
Здесь $Q_C^{\text{сп}}$ *отрицательна*, так как она стремится повернуть оставшуюся часть балки против хода часовой стрелки относительно центра тяжести сечения C .

Правильный ответ: 2).

Тест 1.3

Поперечная сила в сечении C балки равна ...

- 1) -40 кН;
- 2) 48 кН;
- 3) 2 кН;
- 4) -12 кН;
- 5) 8 кН.



Комментарий

Вычислим опорную реакцию на опоре B . Мысленно направим ее вверх (\uparrow). В статически определимой балке реакции ищутся с помощью уравнений статики: $\sum M_A = 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 18 - 6R_B = 0$. Отсюда имеем $R_B = \frac{72}{6} = 12$ кН. Знак «плюс» означает, что реакция R_B направлена вверх (\uparrow).

Поперечная сила в сечении C определяется как сумма проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения. Возьмем, например, сумму проекций справа от сечения C :

$$Q_C = -12 + 20 \cdot 1 = 8 \text{ (кН)}.$$

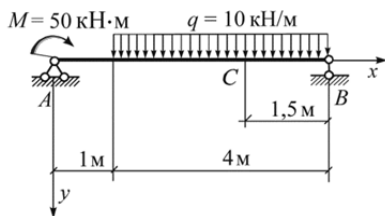
Здесь Q_C *положительна*, так как она стремится повернуть оставшуюся часть балки по ходу часовой стрелки относительно центра тяжести сечения C .

Правильный ответ: 5).

Тест 1.4

Поперечная сила в сечении C балки равна ...

- 1) 15 кН;
- 2) -34 кН;
- 3) 6 кН;
- 4) -19 кН;
- 5) -9 кН.



Комментарий

Определим опорную реакцию на опоре B . Мысленно направим ее вверх ($R_B \uparrow$). Используем уравнение статики:

$$\sum M_A = 10 \cdot 4 \cdot 3 + 50 - 5R_B = 0. \text{ Отсюда имеем } R_B = \frac{170}{5} = 34 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» означает, что реакция R_B направлена вверх (\uparrow).

Поперечная сила в сечении C определяется как сумма проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения. Возьмем, например, сумму проекций справа от сечения C :

$$Q_C = -34 + 10 \cdot 1,5 = -19 \text{ кН.}$$

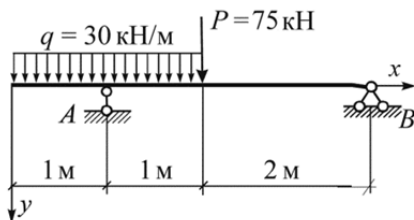
Здесь Q_C отрицательна, так как она стремится повернуть оставшуюся часть балки против хода часовой стрелки относительно центра тяжести сечения C .

Правильный ответ: 4).

Тест 1.5

Поперечная сила в сечении A справа равна ...

- 1) 105 кН;
- 2) 50 кН;
- 3) 80 кН;
- 4) -110 кН;
- 5) -30 кН.



Комментарий

Найдем опорную реакцию на опоре B . Мысленно направим ее вверх ($R_B \uparrow$). В статически определимой балке реакции ищутся с помощью уравнений статики: $\sum M_A = 75 \cdot 1 - 3R_B = 0$. Отсюда имеем

$$R_B = \frac{75}{3} = 25 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» означает, что реакция R_B направлена вверх (\uparrow).

На эпюре поперечных сил Q в сечении A будет скачок (то есть два значения силы в сечении – *слева* и *справа*), так как здесь приложена опорная реакция R_A . Поперечная сила в сечении A справа $Q_A^{сп}$ определяется как сумма проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения. Возьмем сумму проекций правых сил относительно сечения A без учета реакции R_A :

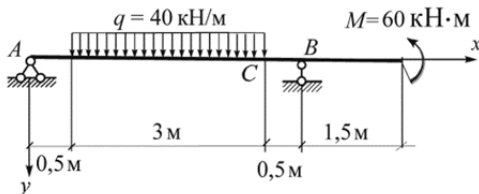
$$Q_A^{сп} = -25 + 75 + 30 \cdot 1 = 80 \text{ кН.}$$

Правильный ответ: 3).

Тест 1.6

Поперечная сила в сечении С балки равна ...

- 1) – 45 кН;
- 2) – 120кН;
- 3) 75 кН;
- 4) 40 кН;
- 5) – 60 кН.



Комментарий

Начнем с определения опорной реакции на опоре B . Мысленно направим ее вверх (\uparrow). Используем уравнение статики:

$$\sum M_A = 40 \cdot 3 \cdot 2 - 60 - 4R_B = 0. \text{ Отсюда имеем } R_B = \frac{180}{4} = 45 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» означает, что реакция R_B направлена вверх (\uparrow).

Поперечную силу в сечении C определим как сумму проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения. Возьмем сумму проекций справа от сечения C , куда войдет только одна реакция R_B (\uparrow):

$$Q_C = -45 \text{ кН}$$

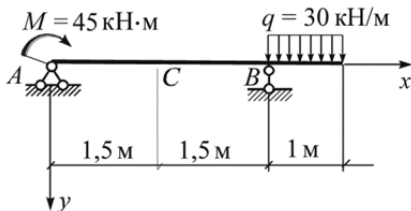
Здесь Q_C отрицательна, так как она стремится повернуть оставшуюся часть балки против хода часовой стрелки относительно центра тяжести сечения C .

Правильный ответ: 1).

Тест 1.7

Поперечная сила в сечении C балки равна ...

- 1) 30 кН;
- 2) – 50 кН;
- 3) – 20 кН;
- 4) 15 кН;
- 5) – 10 кН.



Комментарий

Вычислим опорную реакцию на опоре A . Мысленно направим ее вниз (\downarrow). Используем уравнение статики:

$\sum M_B = 30 \cdot 1 \cdot 0,5 + 45 - 3R_A = 0$. Отсюда имеем $R_A = \frac{60}{3} = 20$ кН. Знак «плюс» означает, что реакция R_A направлена вниз (\downarrow).

Поперечную силу в сечении C определим как сумму проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения. Возьмем сумму проекций слева от сечения C , куда войдет только одна реакция R_A (\downarrow):

$$Q_C = -20 \text{ кН.}$$

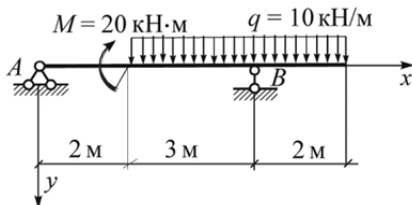
Здесь Q_C отрицательна, так как она стремится повернуть оставшуюся часть балки против хода часовой стрелки относительно центра тяжести сечения C .

Правильный ответ: 3).

Тест 1.8

Поперечная сила в сечении B слева равна ...

- 1) 20 кН;
- 2) – 3 кН;
- 3) 10 кН;
- 4) – 49 кН;
- 5) – 29 кН.



Комментарий

Определим опорную реакцию на опоре B . Мысленно направим ее вверх (\uparrow). Используем уравнение статики:

$$\sum M_A = 10 \cdot 5 \cdot 4,5 + 20 - 5R_B = 0. \text{ Отсюда имеем } R_B = \frac{245}{5} = 49 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» означает, что реакция R_B направлена вверх (\uparrow).

Поперечная сила в сечении B слева $Q_B^{\text{лев}}$ определяется как сумма проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения. Удобнее взять сумму проекций справа от сечения B с учетом реакции R_B :

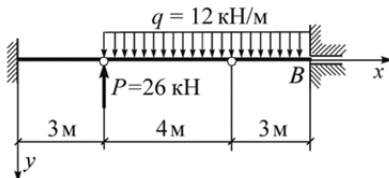
$$Q_B^{\text{лев}} = 10 \cdot 2 - 49 = -29 \text{ кН.}$$

Правильный ответ: 5).

Тест 1.9

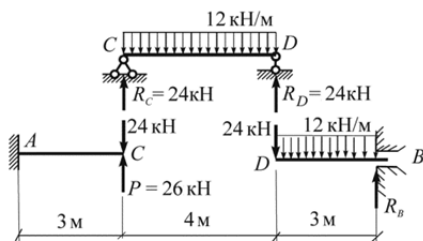
Поперечная сила в сечении B балки равна ...

- 1) 12 кН;
- 2) -60 кН;
- 3) 85 кН;
- 4) -36 кН;
- 5) -144 кН.



Комментарий

Балка содержит два промежуточных шарнира. Мысленно сделаем разрез по шарнирам. Построим поэтажную схему – выделим несомую часть CD , которая не может работать самостоятельно, и несущие самостоятельные балки AC и DB :



На подвесной балке CD возникают одинаковые опорные реакции, что следует из симметрии нагрузки ($q = 12 \text{ кН/м}$): $R_C = R_D = 24 \text{ кН}$. Нагрузка с верхнего этажа CD на нижний (консоли AC и DB) передается с помощью условных сосредоточенных сил R_C и R_D , но направленных в обратную сторону (\downarrow). Нагрузка на левой консоли AC никак не сказывается на правой DB . Поэтому поперечная сила Q_B определяется только от нагрузок, находящихся на консоли DB , как сумма проекций на нормаль к оси балки всех нагрузок, расположенных с одной стороны от рассматриваемого сечения B .

С учетом правила знаков имеем:

$$Q_B = -24 - 12 \cdot 3 = -60 \text{ кН}.$$

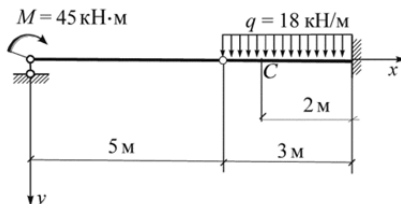
Знак «минус» означает, что Q_B направлена вверх (\uparrow), то есть стремится повернуть балку против хода часовой стрелки.

Правильный ответ: 2).

Тест 1.10

Поперечная сила в сечении C слева равна ...

- 1) 36 кН;
- 2) 54 кН;
- 3) -9 кН;
- 4) -27 кН;
- 5) -18 кН.



Комментарий

Балка содержит один промежуточный шарнир. Мысленно сделаем разрез по шарниру. Построим поэтажную схему – выделим несомую балку AD , которая не может работать самостоятельно, и несущую самостоятельную балку DB .

Сначала рассмотрим балку верхнего этажа AD . Она рассчитывается независимо от нижней балки DB . Найдем реакцию на опоре D , так как нагрузка с верхнего этажа AD на нижний DB передается именно с помощью этой реакции R_D . Мысленно направим

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru